پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

درون‌یابی برای منطق‌های شهودی میانی به کمک نظریه برهان ساختی

نگارنده

گیتی امیدوار

استاد راهنما: دکتر مجید علی‌زاده

پروژه کارشناسی
در رشته علوم کامپیوتر

چکیده

قصد داریم درون‌یابی کرگ [1] و درون‌یابی لیندون [2] را از طریق روش‌های نظریه برهانی ساختی روی ابررشته‌ها [3] و رشته‌های تودرتو خطی [4] هابرای منطق‌های میانی (Jankov)KC و گودل [5] اثبات کنیم. می‌دانیم که هر دوی این منطق‌ها دارای حساب ابررشته‌ای هستند. اما نشان می‌دهیم که روش ارائه شده روی این حساب فقط برای منطق KC قابل اجرا است. (و نه برای گودل) برای اثبات روی منطق دوم روش را روی حساب رشته‌ای تودرتو خطی اعمال می‌کنیم. برای این اثبات ابتدا قاعده برش [6] را از دستگاه حذف کرده و سپس از روش گفته شده استفاده می‌کنیم. در انتها بررسی خواهیم کرد که آیا دو منطق KC و گودل خاصیت درون‌یابی لیندون را دارند؟

---

[1] Craig Interpolation
[2] Lyndon Interpolation
[3] hyper sequent
[4] nested sequent
[5] *Gödel*
[6] cut

پیشگفتار

درون‌یابی کرگ یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های یک منطق است. منطقی دارای این خاصیت است که شرایط زیر را داشته باشد. اگر فرمولی مانند $A \to B$ در قضایای آن باشد، فرمولی مانند C وجود داشته باشد که اولا اتم‌های آن زیرمجموعه‌ای از اشتراک اتم‌های A و B باشد و دوما $A \to C$ و $C \to B$ نیر قضایای این منطق باشند. از روی این ویژگی، انواع دیگری از جمله درون‌یابی لیندون معرفی شده‌اند. درون‌یابی لیندون فرمول C را به گونه‌ای انتخاب می‌کند که قطبیت اتم‌های آن کاملا مانند قطبیت‌شان در فرمول‌های A و B باشند. در سال ۱۹۹۷ توسط ماکسیموا [۷] اثبات شده است که فقط هفت عدد از منطق‌های میانی درون‌یابی کرگ دارند. همچنین او در سال ۲۰۱۴ نشان داده‌است که پنج عدد ار این منطق‌ها درون‌یابی لیندون دارند. در این مقاله نشان می‌دهیم که توسط حساب ابررشته‌ای می‌توان فرمول درون‌یابی کرگ را برای دو منطق IPC[۸] و KC ثابت کرد. اما این روش جواب خوبی برای منطق گودل ارائه نخواهد کرد. در نتیجه حساب تودرتو خطی را در فصل پنج ارائه کرده و قضیه‌ی حذف برش را برای آن اثبات می‌کنیم. سپس در فصل ششم نشان می‌دهیم که الگوریتم ارائه شده روی این حساب نیز قابل اعمال است. در نهایت اثبات می‌کنیم که درون‌یابی لیندون نیز برای این منطق‌ها برقرار است و الگوریتم فرمول مورد نظر را به صورت دقیق تولید می‌کند.

[۷] Maximova
[۸] Intuitionistic Propositional Logic

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

زبان منطق دارای اتم‌ها، $\wedge$ ، $\vee$ و $\rightarrow$ است. که اتم‌ها از مجموعه‌ای نامتناهی شمارا انتخاب می‌شوند.

نکته ۱.۱. $\neg\varphi := \varphi \rightarrow \bot$

تعریف ۲.۱. *دوتایی $< W, R >$ را یک فرم کریپکی می‌گوییم هرگاه W مجموعه‌ی ناتهی و R رابطه‌ای روی $W \times W$ باشد. مدل کریپکی متشکل از $<< W, R >, V$ است که $< W, R >$ یک فرم کریپکی است و V تابع‌ای از اتم‌ها به $\mathscr{P}(W)$ است.*

تعریف ۳.۱. *تابع V با نظر به R ، یکنوا است اگر: از wRv و $w \in V(p)$ بتوان $v \in V(p)$ را نتیجه گرفت.*

تعریف ۴.۱. *فرض کنید $\mathfrak{M} =< W, \leqslant, V >$. آنگاه رابطه‌ی forcing بین گره‌ها و فرمول‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

- $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash p \quad iff \quad w \in V(p)$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash A \wedge B \quad iff \quad \mathfrak{M}, w \Vdash A \quad and \quad \mathfrak{M}, w \Vdash B$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash A \vee B \quad iff \quad \mathfrak{M}, w \Vdash A \quad or \quad \mathfrak{M}, w \Vdash B$
- $\mathfrak{M}, w \Vdash A \rightarrow B \quad iff \quad \forall v \geqslant w \quad (if \quad \mathfrak{M}, v \Vdash A \quad then \quad \mathfrak{M}, v \Vdash B)$

تعریف ۵.۱. *درستی فرمول φ در مدل $\mathfrak{M}$ هنگامی برقرار است که به ازای هر گره w در $\mathfrak{M}$ ، $\mathfrak{M}, w, \Vdash \varphi$ را داشته باشیم. همچنین درستی فرمول φ در کلاس $\mathfrak{C}$ هنگامی است که:*

$$\forall \mathfrak{M} \in \mathfrak{C}, \mathfrak{M} \Vdash \varphi$$

قضیه ۶.۱ (تمامیت).
- IPC نسبت به کلاس تمام مدل‌ها درست و تمام است.
- $KC = IPC + \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ نسبت به کلاس مدل‌های دارای گره ماکسیمم درست و تمام است.
- $Gödel = IPC + (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ نسبت به کلاس مدل‌های خطی درست و تمام است.

تعریف ۷.۱. $HInt$ یک حساب ابررشته‌ای برای IPC است که در جدول زیر قواعد آن آورده شده است.

قواعد آغازین

$$\frac{}{\perp \Rightarrow}\ id_\perp \qquad\qquad \frac{}{A \Rightarrow A}\ id$$

قواعد ساختاری

$$\frac{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow}{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow A}\ \Rightarrow W \qquad\qquad \frac{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathscr{G}|\Gamma, A \Rightarrow \Delta}\ W \Rightarrow$$

$$\frac{\mathscr{G}}{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow \Delta}\ C \Rightarrow \qquad\qquad \frac{\mathscr{G}}{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow \Delta}\ EW$$

$$\frac{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow}{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow A}\ Ec \qquad\qquad \frac{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow \Delta|\Lambda \Rightarrow \Theta}{\mathscr{G}|\Lambda \Rightarrow \Theta|\Gamma \Rightarrow \Delta}\ Ex$$

قواعد منطقی

$$\frac{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow A \quad \mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow B}{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow A \wedge B}\ \Rightarrow \wedge \qquad\qquad \frac{\mathscr{G}|\Gamma, A_i \Rightarrow \Delta}{\mathscr{G}|\Gamma, A_1 \wedge A_2 \Rightarrow \Delta}\ \wedge \Rightarrow$$

$$\frac{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow A_i}{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow A_1 \vee A_2}\ \Rightarrow \vee \qquad\qquad \frac{\mathscr{G}|\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \mathscr{G}|\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\mathscr{G}|\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}\ \vee \Rightarrow$$

$$\frac{\mathscr{G}|\Gamma, A \Rightarrow B}{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow A \to B}\ \Rightarrow \vee \qquad\qquad \frac{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow A \quad \mathscr{G}|\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\mathscr{G}|\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta}\ \to\Rightarrow$$

HLQ حساب ابررشته‌ای ای است که همان $HInt$ به علاوه‌ی قاعده زیر است که برای KC ارائه شده‌است.

$$\frac{\mathscr{G}|\Gamma, \Lambda \Rightarrow}{\mathscr{G}|\Gamma \Rightarrow |\Lambda \Rightarrow}\ lq$$

HG حساب ابررشته‌ای برای منطق گودل است که همان $HInt$ به علاوه‌ی قاعده زیر است.

$$\frac{\mathscr{G}|\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta \quad \mathscr{G}|\Lambda, \Lambda' \Rightarrow \Delta'}{\mathscr{G}|\Gamma, \Lambda' \Rightarrow \Delta|\Lambda, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}\ com$$

تعریف ۸.۱. *هنگامی که بتوان رشته‌ی $\mathscr{G}$ را با یکی از حساب‌های معرفی شده در تعریف قبل اثبات کرد، (مثلا HL) آنگاه می‌نویسیم $HL \vdash \mathscr{G}$ که $L \in \{Int, G, LQ\}$ است.*

قضیه ۹.۱ (تمامیت نسبت به حساب ابررشته‌ای)**.** *برای منطق $L \in \{Int, LQ, G\}$ داریم:* $(\iota(\mathscr{G}) = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge \Gamma_i \to \bigvee \Delta_i))$

$$HL \vdash \mathscr{G} \quad iff \quad L \vdash \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge \Gamma_i \to \bigvee \Delta_i)$$

فصل ۲

درون‌یابی توسط ابررشته‌ها

تعریف ۱.۲. *یک ابررشته ی شکافته* [۱] *، رشته‌ای است که فقط بین فرمول‌های هر مجموعه‌ی مکرر آن یک ; قرار گرفته است. همچنین داریم:*

$$
\begin{aligned}
R\tilde{\mathscr{G}} &:= \Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1 | \ldots | \Pi_n \Rightarrow \Sigma_n \\
L\tilde{\mathscr{G}} &:= \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 | \ldots | \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n \\
LR\tilde{\mathscr{G}} &:= \Gamma_1, \Pi_1 \Rightarrow \Delta_1, \Sigma_1 | \ldots | \Gamma_n, \Pi_n \Rightarrow \Delta_n, \Sigma_n \\
\tilde{\mathscr{G}} &:= \Gamma_1; \Pi_1 \Rightarrow \Delta_1; \Sigma_1 | \ldots | \Gamma_n; \Pi_n \Rightarrow \Delta_n; \Sigma_n
\end{aligned}
$$

حساب شکافته هیچ تفاوت‌ای با حساب قبلی ندارد. تنها دلیلی که این حساب را معرفی کرده‌ایم بدست آوردن فرمول درون‌یابی است. زیرا نیاز داریم که بین اتم‌های دو سمت ادات $\rightarrow$ اشتراک بگیریم و بعضی از قواعد حسابمان این اشتراک‌گیری را به صورت کامل محقق نمی‌کنند. هنگامی که ; را به حساب اضافه می‌کنیم، این قابلیت را خواهیم داشت که بین تمام مجموعه‌های مکرر سمت چپ و راست اشتراک بگیریم.

قضیه ۲.۲. *برای* $L \in \{Int, LQ, G\}$ *داریم:*

$$SHL \vdash \tilde{\mathscr{G}} \quad iff \quad HL \vdash LR\tilde{\mathscr{G}}$$

برهان ۳.۲. *به استقرا روی طول برهان ثابت می‌کنیم. برای قواعد آغازین واضح است. برای* $\rightarrow^l \Rightarrow$ *اثبات می‌کنیم.*

---

[۱] split hyper sequent

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, A; \Pi \Rightarrow B;}{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi \Rightarrow A \rightarrow B;}$$

$$and \quad SHL \vdash \tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, A; \Pi \Rightarrow B;$$

$$\Longleftrightarrow \quad HL \vdash \tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, A, \Pi \Rightarrow B$$

$$\Longleftrightarrow \quad HL \vdash \tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, \Pi \Rightarrow A \rightarrow B$$

برای بقیه‌ی قواعد نیز به همین صورت اثبات پذیر است.

نتیجه ۴.۲. *برای هر $L \in \{Int, LQ, G\}$ داریم:*

$$SHL \vdash A; \Rightarrow; B \quad iff \quad L \vdash A \rightarrow B$$

تعریف ۵.۲. *ابررشته‌ی زیر در مدل $\mathfrak{M} =< W, \leqslant, V >$*

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 | \ldots | \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$$

و در رشته‌ی $\boldsymbol{w}$ از گره‌ها به صورت مولفه به مولفه [۲] برقرار است هرگاه شرط زیر برقرار باشد. $(|\boldsymbol{w}| = \| \tilde{\mathscr{G}} \|)$

$$\mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 | \ldots | \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n \quad iff$$

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} \ (\exists A \in \Gamma_i \, \mathfrak{M}, w_i \nVdash A \quad or \quad \exists B \in \Delta_i \, \mathfrak{M}, w_i \Vdash B)$$

این ابررشته در یک مدل به صورت مولفه به مولفه درست است هرگاه برای هر $\boldsymbol{w}$ در $\mathfrak{M}$ برقرار باشد. برای یک کلاس از مدل‌ها نیز همین تعریف را خواهیم داشت.

لم ۶.۲. *$\mathscr{G}$ در کلاسی از مدل‌ها مانند $\mathfrak{C}$ ، به صورت مولفه به مولفه درست است اگر و تنها اگر $\mathfrak{C} \Vdash \iota(\mathscr{G})$*

برهان ۷.۲. • *از چپ به راست:*

$$\mathfrak{M}, v \nVdash \iota(\mathscr{G})$$

$$\Longrightarrow \exists i \, \mathfrak{M}, v \nVdash \bigwedge \Gamma_i \rightarrow \bigvee \Delta_i$$

[۲] componentwise

$$\Longrightarrow \exists w_i \geqslant v\, \mathfrak{M}, w_i \Vdash \bigwedge \Gamma_i \quad and \quad \mathfrak{M}, w_i \nVdash \bigvee \Delta_i$$

$$\Longrightarrow \exists \boldsymbol{w} \quad w \quad is \quad v-rooted \quad and \quad \mathfrak{M}, w \nvDash \mathscr{G}$$

- از راست به چپ:

$$\exists \boldsymbol{w} \quad w \quad is \quad v-rooted \quad and \quad \mathfrak{M}, w \nvDash \mathscr{G}$$

$$\Longrightarrow \exists i\, \mathfrak{M}, v \nVdash \bigwedge \Gamma_i \to \bigvee \Delta_i$$

$$\Longrightarrow \mathfrak{M}, v \nVdash \iota(\mathscr{G})$$

تعریف ۸.۲. *اگر C یک فرمول گزاره‌ای باشد، آنگاه $\overline{C^{(k)}}$ و $C^{(k)}$ را یک تک‌فرمول [۳] گوییم. $(k \geqslant 1)$ هر تک‌فرمول یک چندفرمول [۴] است. همچنین اگر $\mho_1$ و $\mho_2$ ، چندفرمول باشند آنگاه دو فرمول $\mho_1 \ovee \mho_2$ و $\mho_1 \owedge \mho_2$ نیز چندفرمول هستند.*
$\| \mho \|$ برابر با بزرگترین k ای است که در $\mho$ ظاهر شده است.

تعریف ۹.۲. *درستی یک چندفرمول در یک مدل و رشته‌ی $\boldsymbol{w}$ از گره‌های آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

- $\mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash C^{(k)} \quad iff \quad \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \nvDash \overline{C^{(k)}} \quad iff \quad \mathfrak{M}, w_k \Vdash C$
- $\mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho_1 \owedge \mho_2 \quad iff \quad \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho_1 \quad and \quad \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho_2$
- $\mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho_1 \ovee \mho_2 \quad iff \quad \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho_1 \quad or \quad \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho_2$

تعریف ۱۰.۲. *$\mho_1$ و $\mho_2$ به صورت مولفه به مولفه یکسان اند اگر:*

$$\mho_1 \doteqdot \mho_2 \Longleftrightarrow$$

$$\forall \mathfrak{M}\, \forall \boldsymbol{w} \parallel \boldsymbol{w} \parallel \geqslant \parallel \mho_1 \parallel \quad and \quad \parallel \boldsymbol{w} \parallel \geqslant \parallel \mho_2 \parallel \quad and \ (\mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho_2 \Leftrightarrow \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho_2)$$

---

[۳] uniformula
[۴] multiformula

تعریف ۱۱.۲ (SCNF)SDNF)). همان فرم نرمال عطفی و فصلی روی یک چندفرمول مانند $\mho$ است که در هر عطف یا فصل آن به ازای هر $1 \leqslant k \leqslant\, \| \mho \|$ فقط یک تک‌فرمول مانند $C^{(k)}$ و فقط یکی مانند $\overline{D^{(k)}}$ وجود داشته باشد.

لم ۱۲.۲ (فرم نرمال). هر چندفرمول مانند $\mho$ به یک $SDNF(SCNF)$ تبدیل می‌شود که با آن به صورت مولفه به مولفه برابر است.

برهان ۱۳.۲. توسط استقرا می‌توان این تبدیل را با توجه به برابری‌های زیر انجام داد.

$$C^{(k)} \vee D^{(k)} \doteqdot (C \vee D)^{(k)} \quad C^{(k)} \owedge D^{(k)} \doteqdot (C \wedge D)^{(k)}$$

$$\overline{C^{(k)}} \ovee \overline{D^{(k)}} \doteqdot \overline{(C \wedge D)^{(k)}} \quad \overline{C^{(k)}} \owedge \overline{D^{(k)}} \doteqdot \overline{(C \vee D)^{(k)}}$$

$$\overline{C^{(k)}} \doteqdot \overline{(C)^{(k)}} \ovee \overline{\bot^{(k)}} \qquad \overline{C^{(k)}} \doteqdot \overline{C^{(k)}} \owedge \overline{\top^{(k)}}$$

تعریف ۱۴.۲. $\mho$ یک فرمول درون‌یاب مولفه به مولفه‌ای [۵] برای $\mathscr{G}$ است و می‌نویسیم $\mho \overset{\mathfrak{C}}{\leftarrow} \tilde{\mathscr{G}}$ هرگاه:

- $\| \mho \| \leqslant \| \mathscr{G} \|$
- $V(\mho) = V(L\mathscr{G}) \cap V(R\mathscr{G})$
- $\forall \mathfrak{C} \in \mathfrak{C}\, \forall \boldsymbol{w}\ \mathfrak{M} - rooted\ \ \| \boldsymbol{w} \| = \| \tilde{\mathscr{G}} \|$,
  $\mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \nvDash \mho \Rightarrow \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash L\tilde{\mathscr{G}}$
  $and \quad \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho \Rightarrow \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash R\tilde{\mathscr{G}}$

لم ۱۵.۲. فرض کنید منطق L نسبت به کلاس مدل‌های $\mathfrak{C}$ درست و تمام است. همچنین فرض کنید $\mho = \owedge_{i=1}^{n}(\overline{C_i^{(k)}} \ovee D_i^{(k)})$ را داریم. اگر $A; \Rightarrow; B \overset{\mathfrak{C}}{\leftarrow} \mho$ ، آنگاه $I := \bigwedge_{i=1}^{n}(C_i \to D_i)$ یک فرمول درون‌یابی کرگ برای $A \to B$ در منطق L است.

برهان ۱۶.۲. کافی است نشان دهیم به ازای هر مدل از کلاس $\mathfrak{C}$ مانند $\mathfrak{M} =< W, \leqslant, V >$ و $v \in W$ دو گزاره‌ی زیر برقرار اند.

$$\mathfrak{M}, v \Vdash A \to I$$

$$\mathfrak{M}, v \Vdash I \to B$$

[۵] componentwise interpolant

- فرض کنید $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ که $v \geqslant w$ است. در این صورت داریم:

$$\forall w' \geqslant w\, \mathfrak{M}, w' \Vdash A \Longrightarrow \mathfrak{M}, w' \nvDash A$$

$$\xrightarrow[sub]{L(A;\Rightarrow;B)=A\Rightarrow} \mathfrak{M}, w' \vDash \mho \Longrightarrow \mathfrak{M}, w' \vDash \overline{C_i^{(1)}} \oslash D_i^{(1)}$$

$$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}\, \mathfrak{M}, w' \nVdash C_i \quad or \quad \mathfrak{M}, w' \Vdash D_i$$

$$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}\, \mathfrak{M}, w' \nVdash C_i \to D_i \quad or \quad \mathfrak{M}, w' \Vdash I$$

$$\mathfrak{M}, v \Vdash A \to I$$

- فرض کنید $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ که $v \geqslant w$ است. در این صورت داریم:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\, \mathfrak{M}, w' \nVdash C_i \to D_i$$

$$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}\, \mathfrak{M}, w' \nVdash C_i \quad or \quad \mathfrak{M}, w' \Vdash D_i$$

$$\Longrightarrow \mathfrak{M}, w' \vDash \overline{C_i^{(1)}} \oslash D_i^{(1)} \Longrightarrow \mathfrak{M}, w \vDash \mho$$

$$\mathfrak{M}, w \vDash \Rightarrow B \Longrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash B$$

فصل ۳

درون‌یابی برای KC و IPC

تعریف ۱.۳. *$\mho^{n+1\mapsto n}$ همان فرمول $\mho$ است که به جای $n+1$ ها n گذاشته‌ایم.*

تعریف ۲.۳. *$\mho^{n\leftrightarrow n+1}$ همان فرمول $\mho$ است که جای $n+1$ ها و n ها را عوض کرده‌ایم.*

لم ۳.۳. *فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک مدل، $\mho$ یک چندفرمول و $\boldsymbol{w}$ رشته‌ای از گره‌های ریشه‌دار در $\mathfrak{M}$ باشند. در صورتی که $\|\boldsymbol{w}\| = n$ و $\|\mho\| \leqslant n+1$ خواهیم داشت:*

$$\mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho^{n+1\mapsto n} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{M}, \boldsymbol{w}, w_n \vDash \mho$$

در صورتی که $\|\mho\| \leqslant n+k$ و $\|\boldsymbol{w}\| = n+k$ برای $k \geqslant 1$ خواهیم داشت:

$$\mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \mho^{n\leftrightarrow n+1} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{M}, w_1, \ldots, w_{n-1}, w_{n+1}, w_n, \ldots, w_{n+k} \vDash \mho$$

برهان ۴.۳. *با توجه به تعریف $\vDash$ واضح است.*

حال الگوریتم را با استفاده از دستگاه شکافته نشان می‌دهیم. سپس نشان می‌دهیم که در هر قاعده از دستگاه شکافته، اگر در مقدم $\mho$ یک درون‌یابی مولفه به مولفه‌ای باشد، $\mho'$ داده شده در تالی نیز یک درون‌یابی مولفه به مولفه‌ای است.

$$\frac{}{;A \Rightarrow A; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \overline{A^{(1)}}}\ id^{rl} \qquad \frac{}{A; \Rightarrow A; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \bot^{(1)}}\ id^{ll}$$

$$\frac{}{;A \Rightarrow ;A \xleftarrow{\mathfrak{c}} \top^{(1)}}\ id^{rr} \qquad \frac{}{A; \Rightarrow ;A \xleftarrow{\mathfrak{c}} A^{(1)}}\ id^{lr}$$

$$\frac{}{;\bot \Rightarrow \xleftarrow{\mathfrak{c}} \top^{(1)}}\ id^{r}_{\bot} \qquad \frac{}{\bot; \Rightarrow \xleftarrow{\mathfrak{c}} \bot^{(1)}}\ id^{l}_{\bot}$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Pi} \Rightarrow \tilde{\Theta}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Delta}|\mathscr{H} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho}{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Delta}|\tilde{\Pi} \Rightarrow \tilde{\Theta}|\mathscr{H} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho^{n+1 \leftrightarrow n}}\ Ex \qquad \frac{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Delta}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho}{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho^{n+1 \mapsto n}}\ EC$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow ;A \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \quad \tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow ;B \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_2}{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow ;A \wedge B \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \owedge \mho_2}\ \Rightarrow \wedge^r \qquad \frac{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow A; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \quad \tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow B; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_2}{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow A \wedge B; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \ovee \mho_2}\ \Rightarrow \wedge^l$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, A; \Pi \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \quad \tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma}, B; \Pi \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_2}{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, A \vee B; \Pi \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \ovee \mho_2}\ \vee^l \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi, A \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \quad \tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma}; \Pi, B \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_2}{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi, A \vee B \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \owedge \mho_2}\ \vee^r \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi \Rightarrow A; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \quad \tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma}, B; \Pi \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_2}{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, A \to B; \Pi \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \ovee \mho_2}\ \to^l \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi \Rightarrow ;A \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \quad \tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma}; \Pi, B \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_2}{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi, A \to B \Rightarrow \tilde{\Delta} \xleftarrow{\mathfrak{c}} \mho_1 \owedge \mho_2}\ \to^r \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, A; \Pi \Rightarrow B; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \ovee_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \owedge D_j^{(n)} \owedge \owedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}))}{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi \Rightarrow A \to B; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \ovee_{j=1}^{m}(\overline{D_j \to C_j}^{(n)} \owedge \owedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}))}\ \Rightarrow \to^l$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi, A \Rightarrow B; \xleftarrow{\mathfrak{c}} \owedge_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \ovee D_j^{(n)} \ovee \ovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))}{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi \Rightarrow ;A \to B \xleftarrow{\mathfrak{c}} \owedge_{j=1}^{m}((C_j \to D_j)^{(n)} \ovee \ovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))}\ \Rightarrow \to^r$$

نکته ۵.۳. در قواعد $(\to^l \Rightarrow), (\to^r \Rightarrow), (\vee^r \Rightarrow), (\Rightarrow \wedge^r), (\vee^r \Rightarrow), (\Rightarrow \wedge^r)$ داریم :

$$for\ i=1,2: \|\mho_i\| \leqslant \|\tilde{\mathscr{G}}\|+1$$

نکته ۶.۳. در قواعد $(Ex),(EC),(\Rightarrow\to^r),(\Rightarrow\to^l)$ داریم: $\|\tilde{\mathscr{G}}\|=n-1$

نکته ۷.۳. در (EC): $\|\mho\| \leqslant n+1$

نکته ۸.۳. در (Ex): $\|\mho\| \leqslant n+\|\mathscr{H}\|+1$

لم ۹.۳. *همانند بحثی که در صفحه قبل مطرح شد، اگر چندفرمولی در بالای یک قاعده درون‌یابی مولفه به مولفه‌ای باشد، فرمول پایینی داده شده نیز درون‌یابی مولفه به مولفه‌ای خواهد بود.*

برهان ۱۰.۳. برای چندتا از قواعد سخت‌تر بررسی می‌کنیم. فرض کنید
$\mathfrak{M}=<W,\leqslant,V>\in\mathfrak{C}$ باشد و $\boldsymbol{w}$ رشته‌ای از گره‌های $\mathfrak{M}-rooted$ باشد.

- $(\Rightarrow\to^l)$: دو حالت داریم.

۱. $$let\quad \mathfrak{M},\boldsymbol{w}\nvDash \oslash_{j=1}^{m}(\overline{D_j\to C_j}^{(n)} \oslash \oslash_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \oslash F_{jl}^{(l)}))$$

$$let\quad \boldsymbol{v}=: w_1,\dots w_{n-1}$$

$$\Longrightarrow \forall j=1,\dots,m \forall w_n'\geqslant w_n \boldsymbol{v}\nvDash \oslash_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}}\oslash F_{jl}^{(l)})\ or\ w_n'\nVdash D_j\ or\ w_n'\Vdash C_j$$

$$\Longrightarrow \forall w_n'\geqslant w_n \boldsymbol{v},w_n'\nvDash \oslash_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}}\oslash D_j^{(n)}\oslash \oslash_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}}\oslash F_{jl}^{(l)}))$$

می‌دانیم $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v},w_n$ و $\mathfrak{M}-rooted$ است. پس $\boldsymbol{v},w_n'$ نیز چنین است. پس خواهیم داشت:

$$\overset{ind}{\Longrightarrow} \forall w_n'\geqslant w_n\ \boldsymbol{v},w_n'\vDash L\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma,,A\Rightarrow B$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{v}\vDash L\tilde{\mathscr{G}}\ or\ \forall w_n'\geqslant w_n\ \ (\exists G\in\Gamma\ w_n'\nVdash G)\vee w_n'\nVdash A\vee w_n'\Vdash B$$

$$\Longrightarrow \exists G\in\Gamma\ w_n\nVdash G \Longrightarrow \boldsymbol{w}\vDash L\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma,A\Rightarrow B$$

$$let \quad \mathfrak{M}, \boldsymbol{w} \vDash \ovee_{j=1}^{m}(\overline{D_j \to C_j}^{(n)} \owedge \owedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}))$$.۲

$$\Longrightarrow \exists 1 \leqslant j \leqslant m \ \boldsymbol{v} \vDash \owedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}) \ and \ w_n \nVdash D_j \to C_j$$

$$\Longrightarrow \exists w_n' \geqslant w_n \ w_n' \Vdash D_j \ and \ w_n' \nVdash C_j$$

$$\boldsymbol{v}, w_n' \vDash \ovee_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \owedge D_j^{(n)} \owedge \owedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}))$$

$$\stackrel{ind}{\Longrightarrow} \boldsymbol{v}, w_n' \vDash R\tilde{\mathscr{G}}|\Pi \Rightarrow$$

- *(EC): توسط لم ۳.۳ واضح است که اگر $\boldsymbol{w}, w_n \vDash L(\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Delta}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Delta})$ ، آنگاه $\boldsymbol{w} \vDash L(\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \tilde{\Delta})$. همین برای قسمت R نیز برقرار است.*

حال برای منطق KC همان دستگاه قبل به علاوه‌ی قاعده زیر را خواهیم داشت. همچنین ثابت خواهیم کرد که این دستگاه درون‌یابی مورد نظر را نیز تولید خواهد کرد. ($\|\tilde{\mathscr{G}} = n - 1$)

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, \Lambda; \Pi, \Theta \Rightarrow \stackrel{\mathfrak{J}}{\leftarrow} \owedge_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \ovee D_j^{(n)} \ovee \ovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))}{\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma; \Pi \Rightarrow |\Lambda, \Theta \Rightarrow \stackrel{\mathfrak{J}}{\leftarrow} \owedge_{j=1}^{m}(\overline{\neg(C_j \to D_j)^{(n)}} \ovee \ovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))} \ lqS$$

لم ۱۱.۳. *فرض کنید $\mathfrak{J}$ کلاس مدل‌های دارای گره بیشینه باشد. اگر عبارت بالای قاعده lqs ، درون‌یابی باشد. عبارت پایینی نیز چنین است.*

برهان ۱۲.۳. $\|\mathscr{G}\| = n - 1$ *. فرض کنید* $\boldsymbol{v} = w_1, \ldots, w_{n-1}$ *باشد که گره‌های اول رشته‌ی* $\mathfrak{M} - rooted$ *ای مانند $\boldsymbol{w}$ به طول $\|\boldsymbol{w}\| = n + 1$ باشند. (که $\mathfrak{M} \in \mathfrak{J}$).*

$$let \ \boldsymbol{w} \nvDash \owedge_{j=1}^{m}(\overline{\neg(C_j \to D_j)^{(n)}} \ovee \ovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))$$.۱

$$\Longrightarrow \exists 1 \leqslant j \leqslant m \ \boldsymbol{v} \nvDash \ovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}) \ and \ w_n \Vdash \neg(C_j \to D_j)$$

$$\Longrightarrow \infty =: top \ element \ \infty \nVdash C_j \to D_j \Longrightarrow \infty \Vdash C_j \ and \ \infty \nVdash D_j$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{v}, \infty \nvDash \owedge_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \ovee D_j^{(n)} \ovee \ovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))$$

$$\overset{ind}{\Longrightarrow} \boldsymbol{v}, \infty \vDash L\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma, \Delta \Rightarrow \xrightarrow{w_n \leqslant \infty, w_{n+1} \leqslant \infty} \boldsymbol{w} \vDash L\tilde{\mathscr{G}}|\Gamma \Rightarrow |\Lambda \Rightarrow$$

۲. $$let\ \boldsymbol{w} \vDash \bigowedge_{j=1}^{m}(\overline{\neg(C_j \to D_j)^{(n)}} \ovee \bigovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))$$

$$\Longrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant m\ \boldsymbol{v} \vDash \bigovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)})\ and\ w_n \nVdash \neg(C_j \to D_j)$$

$$\Longrightarrow \forall 1 \leqslant j \leqslant m\ \boldsymbol{v} \vDash \bigovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)})\ and\ \exists z_j \geqslant w_n z_j \Vdash C_j \to D_j$$

$$\overset{z_j \leqslant \infty}{\Longrightarrow} \infty \Vdash C_j \to D_j \Longrightarrow \infty \nVdash C_j\ or\ \infty \Vdash D_j$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{v}, \infty \vDash \bigowedge_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \ovee D_j^{(n)} \ovee \bigovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))$$

$$\overset{ind}{\Longrightarrow} \boldsymbol{v}, \infty \vDash R\tilde{\mathscr{G}}|\Pi, \Theta \Rightarrow \xrightarrow{w_n \leqslant \infty, w_{n+1} \leqslant \infty} \boldsymbol{w} \vDash R\tilde{\mathscr{G}}|\Pi \Rightarrow |\Theta \Rightarrow$$

قضیه ۳.۱۳. $Int,\ LQ$ *دارای درون‌یابی کرگ هستند.*

برهان ۳.۱۴. *فرض کنید* $L \vdash A \to B$ *برای* $L \in \{Int, LQ\}$ *. بر اساس نتیجه ۲.۴ خواهیم داشت:*

$$SHL \vdash A; \Rightarrow B;$$

$$\xrightarrow{lemma\ 3.11} \mho\ is\ the\ interpolant\ for\ A; \Rightarrow B;$$

حال توسط اعمال لم ۲.۱۲ میتوان $\mho$ *را به* $\mho'$ *تبدیل کرد که در حالت فرم نرمال که* $SCNF$ *است، قرار دارد. حال توسط اعمال لم ۲.۱۵ به فرمول* C *می‌رسیم که همان فرمول درون‌یابی برای* $A \to B$ *است.*

قضیه ۳.۱۵. SHG *خاصیت درون‌یابی مولفه به مولفه‌ای را در کلاس مدل‌های خطی ندارد.*

برهان ۳.۱۶. *می‌دانیم:*

$$\frac{p; \Rightarrow p; \quad ; q \Rightarrow ; q}{; q \Rightarrow p; |p; \Rightarrow ; q}\ comS$$

توسط قواعد گفته شده می‌توان دید که $\bot^{(1)}, \top^{(1)}$ *فرمول‌های درون‌یابی برای بالای* $comS$ *هستند. این به این معناست که برای هر مدل خطی مانند* $\mathfrak{M}$ *، دو گره* w_1, w_2 *داریم که:*

$$\mathfrak{M}_1, w_1, w_2 \vDash q \Rightarrow | \Rightarrow q\ or\ \mathfrak{M}_1, w_1, w_2 \vDash \Rightarrow p|p \Rightarrow$$

اما می‌دانیم هر دوی این ابررشته‌ها توسط مدلی رد می‌شوند که تناقض است.

فصل ۴

حساب رشته‌ای تودرتو خطی برای منطق گودل

تعریف ۱.۴ (رشته تودرتو خطی [۱]). *لیستی متناهی از رشته‌هایی است که نتیجه‌ی آن‌ها نیز می‌تواند چندتایی باشد. به صورت زیر نوشته می‌شود:*

$$\mathscr{G} = \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \sslash \cdots \sslash \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n \, n > 0$$

تعبیر آن به صورت زیر است:

$$\iota(\Gamma \Rightarrow \Delta) := \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$$

$$\iota(\Gamma \Rightarrow \Delta \sslash \mathscr{G}) := \bigwedge \to (\bigvee \Delta \vee \iota(\tilde{\mathscr{G}}))$$

تعریف ۲.۴. *قواعد حساب LNG را در زیر آورده‌ایم.*

$$\frac{}{\mathscr{G} \sslash \Gamma, p \Rightarrow \Delta, p \sslash \mathscr{H}} \; init_1$$

$$\frac{}{\mathscr{G} \sslash \Gamma, p \Rightarrow \Delta, p \sslash \mathscr{H} \sslash \Sigma \Rightarrow \Pi, p \sslash \mathscr{I}} \; init_2$$

$$\frac{}{\mathscr{G} \sslash \Gamma, \bot \Rightarrow \Delta \sslash \mathscr{H}} \; \bot_L$$

---

[۱] linear nested sequent

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \Sigma, A \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ Lift$$

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A, B \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ \wedge L$$

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \quad \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, B \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ \wedge R$$

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \quad \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, B \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ \vee L$$

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A, B \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ \vee R$$

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, B \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \quad \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ \to L$$

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ \to R^1$$

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \quad \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, A \to B \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ \to R^2$$

دقت کنید که در قاعده $\to R^1$ و $\to R^2$ دو شیوه ساخت مثال نقض برای فرمول $A \to B$ را بازسازی می‌کنند. یکی هنگامی است که بالای یک گره هنوز گره فرزندی وجود ندارد. و دیگری زمانی است که گره بالاسر وجود دارد.

قضیه ۳.۴ (صحت برای LNG)**.** *اگر $LNG \vdash \mathscr{G}$ آنگاه $G \vdash \iota(\mathscr{G})$*

برهان ۴.۴. *توسط استقرا روی طول برهان اثبات می‌کنیم. برای $(\to R^2)$ بررسی می‌کنیم. فرض کنید نتیجه‌ی این قاعده به صورت*

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 /\!/ \cdots /\!/ \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n /\!/ \Gamma_{n+1} \Rightarrow \Delta_{n+1}, A \to B /\!/ \Gamma_{n+2} \Rightarrow \Delta_{n+2} /\!/ \cdots /\!/ \Gamma_m \Rightarrow \Delta_m$$

باشد. مدل $\mathfrak{M} =< W, \leqslant, V >$ و $w_0 \in W$ موجود باشند که: $\mathfrak{M}, w_0 \nVdash \iota(\mathfrak{G})$ در نتیجه $w_0, \ldots, w_m \in W$ موجودند که:

$\forall i \geqslant 1\ w_i \Vdash \bigwedge \Gamma_i\ and\ w_i \nVdash \bigvee \Delta_i\ and\ w_i \leq w_{i+1} \Longrightarrow w_{n+1} \nVdash A \to B \Longrightarrow$
$\exists u \geqslant w_{n+1}\ u \Vdash A\ and\ u \nVdash B \xRightarrow{linear\ model} u < w_{n+2}\ or\ w_{n+2} \leq u$

۱. $u < w_{n+2}$: رشته $w_0, \ldots, w_{n+1}, u, w_{n+2}, \ldots, w_m$ رشته‌ای است که نشان می‌دهد مقدم قاعده $(\to R^2)$ برقرار نیست.

۲. $w_{n+2} < u$: پس $w_{n+2} \not\Vdash A \to B$ را داریم. پس $w_0, \ldots, w_{n+1}, w_{n+2}, w_{n+2}, \ldots, w_m$ همان رشته‌ای است که مقدم را درست نمی‌بیند.

حال برای آنکه تمامیت را اثبات کنیم نیاز داریم که نشان دهیم قواعد مربوط به ساختار پذیرفتنی [۲] هستند. همچنین برای اثبات حذف برش نیاز خواهیم داشت که برای بعضی از این قواعد معکوس‌پذیری [۳] را اثبات کنیم.

قواعد ساختاری

$$\frac{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Pi \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}\ W \qquad \frac{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Rightarrow \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}\ EW$$

$$\frac{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Pi \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}\ mrg \qquad \frac{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, A \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}\ Lower$$

$$\frac{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A, A \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}\ ICL \qquad \frac{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A, A \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}{\mathcal{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \mathcal{H}}\ ICR$$

لم ۵.۴. *قاعده تضعیف (W) در LNG با حفظ طول پذیرفتنی [۴] است.*

برهان ۶.۴. *به استقرا روی طول برهان واضح است.*

لم ۷.۴. *قاعده تضعیف بیرونی در LNG ، پذیرفتنی است.*

برهان ۸.۴. *استقرا روی طول برهان. در حالت $d = 0$ حکم واضح است. فرض کنید $d = n+1$، اثبات برای بعضی از قواعد را بیان می‌کنیم. بقیه با توجه به فرض استقرا واضح‌اند.*

- $lift$: *با استفاده از فرض استقرا و اعمال قاعده $lift$ یا استفاده از لم ۵.۴ و دوبار استفاده از قاعده $lift$.*
- $\frac{\mathcal{G} /\!/ \Gamma \Rightarrow \Delta /\!/ A \Rightarrow B}{\mathcal{G} /\!/ \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B} (\to R^1)$: *اگر $\Rightarrow$ به انتهای رشته اضافه نشده‌باشد، از فرض استقرا و اعمال $(\to R^1)$ آن را به‌دست می‌آوریم. در غیر این صورت با استفاده از فرض استقرا*

[۲] admissible
[۳] invertability
[۴] dp-admissible

$\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow$ و $\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow \mathbin{/\!\!/} A \Rightarrow B$ را داریم. پس اثبات زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow \mathbin{/\!\!/} A \Rightarrow B}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow A \to B} (\to R^1) \tag{4.1}$$

$$\frac{4.1 \qquad \mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow} (\to R^2)$$

- $(\to R^2)$:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H} \\ \mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, A \to B \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}\end{array}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}} (\to R^2)$$

اگر $\Rightarrow$ در جایی به‌جز بین $\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B$ و $\Sigma \to \Pi$ اضافه شده‌باشد، توسط فرض استقرا و استفاده از $\to R^2$ حکم به‌دست می‌آید. در غیر این صورت با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow \mathbin{/\!\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow \mathbin{/\!\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H} \\ \mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow \mathbin{/\!\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, A \to B \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}\end{array}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow A \to B \mathbin{/\!\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}} (\to R^2)}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!\!/} \Rightarrow \mathbin{/\!\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}} (\to R^2)$$

لم ۹.۴. *Lower* در *LNG* با حفظ طول پذیرفتنی است.

برهان ۱۰.۴. به استقرا روی طول برهان. اگر $d = 0$ در این صورت حتما نتیجه‌ی یکی از قواعد آغازین است. اگر $d = n + 1$ آنگاه:

$(\to R^1)$: در این حالت *lower* روی $A \to B$ اعمال نشده‌است. پس با فرض استقرا و اعمال $(\to R^1)$ حکم اولیه را داریم.

$(\to R^2)$: در این حالت اگر $A \to B$ فرمول انتقال داده‌شده توسط $lower$ نباشد، اثبات زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\mathscr{G} \,/\!\!/\, \Gamma \Rightarrow \Delta, A \,/\!\!/\, C \Rightarrow D \,/\!\!/\, \Sigma \Rightarrow \Pi \,/\!\!/\, \mathscr{H}}{\mathscr{G} \,/\!\!/\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,/\!\!/\, C \Rightarrow D \,/\!\!/\, \Sigma \Rightarrow \Pi, A \,/\!\!/\, \mathscr{H}}\ 2*(ind) \qquad (4.2)$$

$$\frac{\mathscr{G} \,/\!\!/\, \Gamma \Rightarrow \Delta, A \,/\!\!/\, \Sigma \Rightarrow \Pi, C \to D \,/\!\!/\, \mathscr{H}}{\mathscr{G} \,/\!\!/\, \Gamma \Rightarrow \Delta \,/\!\!/\, \Sigma \Rightarrow \Pi, A, C \to D \,/\!\!/\, \mathscr{H}}\ ind \qquad (4.3)$$

$$\frac{4.2 \qquad 4.3}{\mathscr{G} \,/\!\!/\, \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D \,/\!\!/\, \Sigma \Rightarrow \Pi, A \,/\!\!/\, \mathscr{H}}\ (\to R^2)$$

حال اگر $A \to B$ همان فرمول انتقال یافته توسط $lower$ باشد، آنگاه سمت راست مقدم‌های $(\to R^2)$ همان نتیجه دلخواه است.

$(\wedge R), (\vee R)$: اگر $lower$ روی فرمول اصلی اعمال شده‌باشد، با فرض استقرا و استفاده از همین قاعده نتیجه به‌دست می‌آید.

- برای بقیه قواعد چون $lower$ روی فرمول اصلی نیست، با استفاده از فرض استقرا و استفاده از همان قاعده نتیجه به‌دست می‌آید.

لم ۱۱.۴. $(\wedge R)$ و $(\vee R)$ در LNG ، معکوس‌پذیر هستند.

برهان ۱۲.۴. توسط استقرا روی طول برهان، واضح است.

لم ۱۳.۴. فرض کنید $\sum_{i=1}^{n} k_i \geq 1$ ، داریم:

$1 \Rightarrow 2, 3 \Rightarrow 4, 3 \Rightarrow 5, 6 \Rightarrow 7, 6 \Rightarrow 8$

1. $LNG \vdash \Gamma_1, (A \wedge B)^{k_1} \ \Rightarrow\ \Delta_1 \,/\!\!/\, \cdots \,/\!\!/\, \Gamma_n, (A \wedge B)^{k_n} \Rightarrow \Delta_n$
2. $LNG \vdash \Gamma_1, A^{k_1}, B^{k_1} \ \Rightarrow\ \Delta_1 \,/\!\!/\, \cdots \,/\!\!/\, \Gamma_n, A^{k_n}, B^{k_n} \Rightarrow \Delta_n$
3. $LNG \vdash \Gamma_1, (A \vee B)^{k_1} \ \Rightarrow\ \Delta_1 \,/\!\!/\, \cdots \,/\!\!/\, \Gamma_n, (A \vee B)^{k_n} \Rightarrow \Delta_n$
4. $LNG \vdash \Gamma_1, A^{k_1} \ \Rightarrow\ \Delta_1 \,/\!\!/\, \cdots \,/\!\!/\, \Gamma_n, A^{k_n} \Rightarrow \Delta_n$
5. $LNG \vdash \Gamma_1, B^{k_1} \ \Rightarrow\ \Delta_1 \,/\!\!/\, \cdots \,/\!\!/\, \Gamma_n, B^{k_n} \Rightarrow \Delta_n$

6. $LNG \vdash \Gamma_1, (A \to B)^{k_1} \ \Rightarrow \ \Delta_1 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Gamma_n, (A \to B)^{k_n} \Rightarrow \Delta_n$

7. $LNG \vdash \Gamma_1, B^{k_1} \ \Rightarrow \ \Delta_1 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Gamma_n, B^{k_n} \Rightarrow \Delta_n$

8. $LNG \vdash \Gamma_1, (A \to B)^{k_1} \ \Rightarrow \ \Delta_1, A^{k_1} \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Gamma_n, (A \to B)^{k_n} \Rightarrow \Delta_n, A^{k_n}$

برهان ۱۴.۴. $2 \Rightarrow 1$: با استقرا روی طول درخت برهان. مهم‌ترین حالت هنگامی است که آخرین قاعده، $lift$ باشد. در این صورت اثبات به شکل زیر خواهد بود(مثلا وقتی روی دومی اعمال شده):

$$\frac{\Gamma_1, (A \wedge B)^{k_1} \Rightarrow \Delta_1 \mathbin{/\!/} \Gamma_2, (A \wedge B)^{k_2+1} \Rightarrow \Delta_2 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Gamma_n, (A \wedge B)^{k_n} \Rightarrow \Delta_n}{\Gamma_1, (A \wedge B)^{k_1} \Rightarrow \Delta_1 \mathbin{/\!/} \Gamma_2, (A \wedge B)^{k_2} \Rightarrow \Delta_2 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Gamma_n, (A \wedge B)^{k_n} \Rightarrow \Delta_n} \ lift$$

که می‌توان دید با اعمال استقرا به رشته‌ی زیر می‌رسیم.

$$LNG \vdash \Gamma_1, A^{k_1}, B^{k_1} \ \Rightarrow \ \Delta_1 \mathbin{/\!/} \Gamma_n, A^{k_2+1}, B^{k_2+1} \Rightarrow \Delta_2 \cdots \mathbin{/\!/} \Gamma_n, A^{k_n}, B^{k_n} \Rightarrow \Delta_n$$

حال واضح است که با دوبار اعمال $lift$ به نتیجه‌ی دلخواه می‌رسیم. (یکی روی A و دیگری روی B .)

$4,5 \Rightarrow 3$: به طریق مشابه.

$8 \Rightarrow 6$: با استفاده از لم ۵.۴ .

$7 \Rightarrow 6$: استقرا: در حالتی که آخرین قاعده روی $A \to B$ ها نباشد یا $lift$ باشد، با استفاده از فرض استقرا و اعمال آن قاعده ، 7 به‌دست می‌آید. حال حالتی را بررسی می‌کنیم که $(L \to)$ استفاده شده‌است. در این صورت از مقدم چپ $(L \to)$ استفاده کرده و روی آن استقرا می‌زنیم که نتیجه مورد نظر را خواهد ساخت.

لم ۱۵.۴. $(\to R^2)$ در LNG ، معکوس‌پذیر است.

برهان ۱۶.۴. برای مقدم راست از پذیرفتنی بودن $lower$ به‌دست می‌آید. برای مقدم چپ استقرا روی طول درخت برهان می‌زنیم. اگر $d = 0$ ، آخرین قاعده یکی از قواعد آغازین بوده است که در حالت مقدم چپ هم درست است. اگر $d = n + 1$ باشد. آنگاه برای قواعد زیر با استفاده از فرض استقرا و اعمال همان قاعده نتیجه‌ی دلخواه را داریم.

$$(\wedge L), (\vee L), (\to L), (\wedge R), (\vee R), (\to R^1)$$

برای $lift$ ابتدا از فرض استقرا استفاده کرده و به $\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma, A \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} B \Rightarrow C \mathbin{/\!/} \Sigma, A \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}$ می‌رسیم. سپس با استفاده از قاعده تضعیف و دوبار اعمال $lift$ نتیجه بدست می‌آید.

$(\to R^2)$: این حالت اگر روی فرمول مورد نظر اعمال شود که تمام است. پس فرض می‌کنیم روی فرمول دیگری مانند $C \to D$ اعمال شده. پس داریم:

$$\dfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \qquad \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, C \to D \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B, C \to D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}} \ (\to R^2)$$

با استفاده از استقرا روی مقدم‌ها استدلال زیر را خواهیم داشت:

$$\dfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \qquad \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, C \to D \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B, C \to D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}} \ (\to R^2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D, A \to B \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}} \ \textit{dp-admissibility of lower}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}} \ \textit{ind}$$

$$\dfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B, C \to D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \qquad \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}} \ (\to R^2)$$

لم ۱۷.۴. $(\to R^1)$ در LNG ، معکوس‌پذیر است.

برهان ۱۸.۴. استقرا روی طول درخت برهان. برای پایه دقیقا مانند پایه لم ۱۵.۴ است.
حال برای $d = n+1$ اگر آخرین قاعده استفاده شده یکی از $(\to L), (\vee R), (\vee L), (\wedge R), (\wedge L)$
باشد، مانند لم ۱۵.۴ عمل می‌کنیم. همچنین برای $(\to R^2)$ نیز با اعمال فرض استقرا و $(\to R^2)$
نتیجه بدست می‌آید. اگر آخرین قاعده، $(\to R^1)$ باشد و روی همان $A \to B$ باشد، نتیجه همان
مقدم خواهد بود. در غیر این صورت داریم:

$$\dfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B, C \to D} \ (\to R^1)$$

در این صورت توسط لم‌های قبل و فرض استقرا داریم:

$$\dfrac{\dfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D, A \to B} \ \textit{dp-admissibility of lower}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B} \ \textit{ind}$$

$$\dfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} A \Rightarrow B, C \to D} \ (\to R^1) \ \textit{and lemma 4.15}$$

$$\frac{\mathscr{G} \parallel \Gamma \Rightarrow \Delta \parallel C \Rightarrow D \parallel A \Rightarrow B \qquad \mathscr{G} \parallel \Gamma \Rightarrow \Delta \parallel A \Rightarrow B, C \to D}{\mathscr{G} \parallel \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D \parallel A \Rightarrow B} (\to R^2)$$

لم ۱۹.۴. *انقباض چپ (ICL) در LNG ، پذیرفتنی است.*

برهان ۲۰.۴. *استقرا روی $(|A|, d)$ که d طول درخت برهان و $|A|$ پیچیدگی فرمول اصلی انقباض است.*
اگر قاعده استفاده شده روی A اعمال نشده باشد و یا $lift$ باشد، با همان روش فرض استقرا و اعمال قاعده به نتیجه می‌رسیم.
حال اگر $L\wedge$ یا $L\vee$ روی A اعمال شده باشند، روی مقدم آن‌ها لم ۱۳.۴ را اعمال می‌کنیم و توسط فرض استقرا و اعمال دوباره‌ی خود قواعد به نتیجه می‌رسیم.
اگر $L \to$ روی A اعمال شده‌باشد، $A = C \to D$ است و داریم:

$$\frac{\mathscr{G} \parallel \Gamma, C \to D, D \Rightarrow \Delta \parallel \mathscr{H} \qquad \mathscr{G} \parallel \Gamma, C \to D, C \to D \Rightarrow \Delta, C \parallel \mathscr{H}}{\mathscr{G} \parallel \Gamma, C \to D, C \to D \Rightarrow \Delta \parallel \mathscr{H}} \to L$$

$$\cfrac{\cfrac{\mathscr{G} \parallel \Gamma, C \to D, D \Rightarrow \Delta \parallel \mathscr{H}}{\mathscr{G} \parallel \Gamma, D, D \Rightarrow \Delta \parallel \mathscr{H}} \text{ Lemma 4.13}}{\mathscr{G} \parallel \Gamma, D \Rightarrow \Delta \parallel \mathscr{H}} \; ind \; (|D| \leq |C \to D| - 1)$$

$$\frac{\mathscr{G} \parallel \Gamma, C \to D, C \to D \Rightarrow \Delta, C \parallel \mathscr{H}}{\mathscr{G} \parallel \Gamma, C \to D \Rightarrow \Delta, C \parallel \mathscr{H}} \; ind$$

$$\frac{\mathscr{G} \parallel \Gamma, D \Rightarrow \Delta \parallel \mathscr{H} \qquad \mathscr{G} \parallel \Gamma, C \to D \Rightarrow \Delta, C \parallel \mathscr{H}}{\mathscr{G} \parallel \Gamma, C \to D \Rightarrow \Delta \parallel \mathscr{H}} \to L$$

لم ۲۱.۴. *$Merge\ (mrg)$ در LNG ، پذیرفتنی است.*

برهان ۲۲.۴. *به استقرا روی طول درخت برهان اثبات می‌کنیم. پایه دقیقا مانند لم‌های قبل است. برای قواعد $(\wedge L), (\vee L), (\wedge R), (\vee R), (\to L), (\to R^1)$ دقیقا مانند لم‌های قبل از فرض استقرا و اعمال خودشان روی نتیجه استفاده می‌کنیم. اگر $lift$ آخرین قاعده باشد، فرض استقرا را روی مقدم آن اعمال کرده و سپس از لم قبل استفاده کرده و نتیجه را بدست می‌آوریم. اگر آخرین قاعده، $R^2 \to$ باشد، مقدم سمت راست آن توسط فرض استقرا به نتیجه دلخواه می‌رسیم.*

لم ۲۳.۴. *انقباض راست (ICR) در LNG ، پذیرفتنی است.*

برهان ۲۴.۴. *استقرا روی $(|A|, d)$ مانند لم ۱۹.۴ . فقط چند تا از قواعد را نشان می‌دهیم . اگر یکی از $\wedge R$ یا $\vee R$ روی یکی از A ها اعمال شده باشد دیگری را توسط لم ۱۱.۴ ، معکوس می‌کنیم و سپس روی آن فرض استقرا را اعمال می‌کنیم. (زیرا پیچیدگی کم شده‌است.) این ما را به نتیجه‌ی مورد نظر می‌رساند. اگر $\to R^1$ روی یکی از A ها اعمال شده باشد، قاعده اعمال شده به صورت زیر است.*

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \Rightarrow D, C \to D} \to R^1$$

پس توسط لم ۱۵.۴ می‌توان مقدم را به $\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D$ تبدیل کرد. حال توسط لم قبل $\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C, D \Rightarrow C, D$ را خواهیم داشت که توسط لم ۱۹.۴ و فرض استقرا به نتیجه مورد نظر تبدیل خواهد شد. اگر آخرین قاعده اعمال شده $(\to R^2)$ روی یکی از A ها باشد، داریم:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \\ \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, C \to D \mathbin{/\!/} \mathscr{H}\end{array}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D, C \to D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}} (\to R^2)$$

مانند حالت قبل می‌توان از مقدم سمت چپ $\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C, C \Rightarrow D, D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}$ را بدست آورد. که مانند قبل به $\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} C \Rightarrow D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi \mathbin{/\!/} \mathscr{H}$ تبدیل می‌شود. همچنین اثبات زیر را خواهیم داشت:

$$\dfrac{\dfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, C \to D \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, C \to D, C \to D \mathbin{/\!/} \mathscr{H}} \text{ dp-admissibility of lower}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!/} \Sigma \Rightarrow \Pi, C \to D \mathbin{/\!/} \mathscr{H}} \text{ ind(lesser depth)}$$

که از نتیجه بدست آمده و اعمال $(\to R^2)$ روی آنها می‌توان نتیجه دلخواه را دید.

اکنون حذف برش را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲۵.۴ (حذف برش)**.** *اگر $\|\mathscr{I}\| = \|\mathscr{G}\|$ و $\Sigma_{i=1}^{n} k_i \geqslant 1$ و $\|\mathscr{H}\| = n - 1$ باشند، آنگاه از ۴.۴ و ۵.۴ می‌توان ۶.۴ را نتیجه گرفت.*

$$LNG \vdash \mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \tag{4.4}$$

$$LNG \vdash \mathscr{I} \mathbin{/\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n \tag{4.5}$$

$$LNG \vdash (\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!/} \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi_1 \mathbin{/\!/} (\mathscr{H} \oplus (\Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n)) \tag{4.6}$$

برهان ۲۶.۴. توسط استقرا روی دوتایی $(|A|, d)$ با اولویت روی $|A|$ اثبات می‌کنیم. که $|A|$ پیچیدگی فرمول برش و d برای نتیجه‌ی یک درخت برهان برابر طول درخت برهان سمت راست آن است. همچنین می‌گوئیم فرمول A اصلی است اگر یک قاعده روی آن اعمال شده باشد.

- $d = 0$: در این حالت ۵.۴ شکلی به صورت یکی از قواعد $(\bot_L), (init_2), (init_1)$ دارد. در صورتی که هیچ کدام از A ها در ۵.۴ اصلی نباشند، آنگاه ۶.۴ نیز یک شکل از همان قاعده‌ای که ۵.۴ است خواهد بود.
  - $A = p$: i را بین 1 تا n به گونه‌ای در نظر بگیرید که Π_i اولین Π ای باشد که $p \in \Pi_i$ است. حال خواهیم داشت:

$$\cfrac{\cfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, A \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}\,(lower)^i}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!\!/} \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} (\mathscr{H} \oplus (\Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n))}\,W$$

  - $A = \bot$: با استقرا روی طول درخت برهان می‌توان نشان داد که قاعده زیر پذیرفتنی است.

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}}$$

حال توسط این قاعده جدید $(\bot_R)$ و W خواهیم داشت:

$$\cfrac{\cfrac{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}}\,(\bot_R)}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!\!/} \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} (\mathscr{H} \oplus (\Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n))}\,(W)^*$$

- $d > 0$: در این‌جا نیز چندین حالت داریم که آن‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم.
  - A در آخرین قاعده که استفاده کرده‌ایم اصلی نباشد. در این صورت فرض استقرا را روی مقدم‌های این قاعده اعمال کرده و سپس خود قاعده را اعمال می‌کنیم. اثبات دو تا از این قواعد را در زیر می‌آوریم:
    * $\to R^2$: پس آخرین قاعده اعمال شده به صورت زیر است.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathscr{I} \mathbin{/\!\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} E \Rightarrow F \mathbin{/\!\!/} A^{k_2}, \Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n \\ \mathscr{I} \mathbin{/\!\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} A^{k_2}, \Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2, E \to F \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n\end{array}}{\mathscr{I} \mathbin{/\!\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1, E \to F \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n}\,(\to R^2)$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \Rightarrow \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ EW \qquad (4.7)$$

$$\frac{4.7 \quad \mathscr{I} \mathbin{/\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!/} E \Rightarrow F \mathbin{/\!/} A^{k_2}, \Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!/} \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi'_1 \mathbin{/\!/} E \Rightarrow F \mathbin{/\!/} (\mathscr{H} \oplus (\Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n))}\ cut \qquad (4.8)$$

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \quad \mathscr{I} \mathbin{/\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!/} A^{k_2}, \Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2, E \to F \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!/} \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi'_1 \mathbin{/\!/} (\mathscr{H} \oplus (\Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2, E \to F \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n))}\ cut \qquad (4.9)$$

$$\frac{4.8 \quad 4.9}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!/} \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi'_1, E \to F \mathbin{/\!/} (\mathscr{H} \oplus (\Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n))} \to R^2 \qquad (4.10)$$

* $(\to R^1)$: قاعده‌ی اعمال شده به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\mathscr{I} \mathbin{/\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n \mathbin{/\!/} E \Rightarrow F}{\mathscr{I} \mathbin{/\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n, E \to F} \to R^1$$

حال ۶.۴ را می‌توان توسط برهان زیر بدست آورد.

$$\frac{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, A \mathbin{/\!/} \mathscr{H} \mathbin{/\!/} \Rightarrow}\ EW \qquad (4.11)$$

$$\cfrac{\cfrac{4.11 \qquad \mathscr{I} \mathbin{/\!/} A^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} A^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n \mathbin{/\!/} E \Rightarrow F}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!/} \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi_1 \mathbin{/\!/} (\mathscr{H} \oplus (\Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Sigma_n \Rightarrow \Pi'_n)) \mathbin{/\!/} E \Rightarrow F}\ (cut)}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!/} \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi_1 \mathbin{/\!/} (\mathscr{H} \oplus (\Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!/} \cdots \mathbin{/\!/} \Sigma_n \Rightarrow \Pi'_n, E \to F))}\ (\to R^1)$$

- آخرین قاعده *lift* باشد و A در آن اصلی باشد. با اعمال فرض استقرا روی ۵.۴ به نتیجه می‌رسیم.
- $A = C \wedge D$:توسط معکوس‌پذیری برای قواعد $(\wedge R), (\wedge L)$ اثبات زیر را خواهیم داشت.

$$\frac{4.4}{\mathscr{G} \mathbin{/\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \mathbin{/\!/} \mathscr{H}}\ invertability \qquad (4.12)$$

$$\frac{4.4}{\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, D \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}}\ invertability \qquad (4.13)$$

$$\frac{4.5}{\mathscr{I} \mathbin{/\!\!/} C^{k_1}, D^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} C^{k_n}, D^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n}\ invertability \qquad (4.14)$$

$$\frac{4.13 \qquad 4.14}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!\!/} C^{k_1}, \Gamma, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta, \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} (\mathscr{H} \oplus (C^{k_2}, \Sigma_2 \Rightarrow \Pi_2 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} C^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi'_n))}\ (ind)$$

حال توسط اعمال فرض استقرا و قواعد انقباض به نتیجه‌ی مناسب می‌رسیم.

- $A = C \vee D$: کاملا مانند حالت قبل است.
- $A = C \to D$: حال که به این حالت رسیده‌ایم یعنی حتما یکی از A ها در ۵.۴ برای آخرین قاعده استفاده شده در درخت برهان اصلی است. که یعنی قاعده به صورت زیر است.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathscr{I} \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_m}, \Sigma_m \Rightarrow \Pi_m, C \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n \\ \mathscr{I} \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_m - 1}, \Sigma_m \Rightarrow \Pi_m \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n\end{array}}{\mathscr{I} \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_m}, \Sigma_m \Rightarrow \Pi_m \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n}\ (\to L)$$

حال فرض کنید $\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma \Rightarrow \Delta, C \to D \mathbin{/\!\!/} \mathscr{H}$ برابر با رشته‌ی زیر است.

$$\mathscr{G} \mathbin{/\!\!/} \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, C \to D \mathbin{/\!\!/} \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n \qquad (4.15)$$

حال اگر $\Sigma k_i = k_m = 1$ بود روی رشته‌ی زیر W را اعمال می‌کنیم.

$$\mathscr{I} \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_m - 1}, \Sigma_m \Rightarrow \Pi_m \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} (C \to D)^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n \qquad (4.16)$$

در غیر این صورت روی ۱۶.۴ و ۱۵.۴ ، برش اعمال می‌کنیم و فرمول زیر را بدست می‌آوریم:

$$(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \mathbin{/\!\!/} \Gamma_1, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta_1, \Pi_1 \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} \Gamma_m, \Sigma_m, D \Rightarrow \Delta_m, \Pi_m \mathbin{/\!\!/} \cdots \mathbin{/\!\!/} \Gamma_n, \Sigma_n \Rightarrow \Delta_n, \Pi_n \qquad (4.17)$$

حال با اعمال برش روی فرمول

$$\mathscr{I} \;/\!\!/\; (C \to D)^{k_1}, \Sigma_1 \Rightarrow \Pi_1 \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; (C \to D)^{k_m}, \Sigma_m \Rightarrow \Pi_m, C /\!\!/$$

$$\cdots \;/\!\!/\; (C \to D)^{k_n}, \Sigma_n \Rightarrow \Pi_n$$

و ۱۶.۴ رشته‌ی زیر را خواهیم داشت.

$$(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) /\!\!/ \Gamma_1, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta_1, \Pi_1 /\!\!/ \cdots /\!\!/ \Gamma_m, \Sigma_m \Rightarrow \Delta_m, \Pi_m, D /\!\!/ \cdots /\!\!/ \Gamma_n, \Sigma_n \Rightarrow \Delta_n, \Pi_n \tag{4.18}$$

حال اثبات توسط درخت برهان زیر به اتمام می‌رسد.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{4.16}{\mathscr{G} \;/\!\!/\; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_m \Rightarrow \Delta_m, C \to D \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}}{\mathscr{G} \;/\!\!/\; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_m \Rightarrow \Delta_m \;/\!\!/\; C \Rightarrow D \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}\;(m = n :\to R^1)(m < n :\to R^2)}{\mathscr{G} \;/\!\!/\; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_m, C \Rightarrow \Delta_m, D \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}\;(mrg)$$

$$\cfrac{4.18 \qquad \mathscr{G} \;/\!\!/\; \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_m, C \Rightarrow \Delta_m, D \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n}{\begin{array}{c}(\mathscr{G} \oplus \mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \;/\!\!/\; (\Gamma_1)^2, \Sigma_1 \Rightarrow (\Delta_1)^2, \Pi_1 \;/\!\!/\; \ldots \\ /\!\!/ (\Gamma_m)^2, \Sigma_m \Rightarrow (\Delta_m)^2, \Pi_m, D \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; (\Gamma_n)^2, \Sigma_n \Rightarrow (\Delta_n)^2, \Pi_n\end{array}}\;(cut)|C| < |A|$$

$$\cfrac{\cfrac{4.17 \qquad \text{the result from tree above}}{\begin{array}{c}(\mathscr{G} \oplus \mathscr{G} \oplus \mathscr{G} \oplus \mathscr{I} \oplus \mathscr{I}) \;/\!\!/\; (\Gamma_1)^3, (\Sigma_1)^2 \Rightarrow (\Delta_1)^3, (\Pi_1)^2 \;/\!\!/\; \ldots \\ /\!\!/ (\Gamma_n)^3, (\Sigma_n)^2 \Rightarrow (\Delta_n)^3, (\Pi_n)^2\end{array}}\;(cut)|D| < |A|}{(\mathscr{G} \oplus \mathscr{I}) \;/\!\!/\; \Gamma_1, \Sigma_1 \Rightarrow \Delta_1, \Pi_1 \;/\!\!/\; \cdots \;/\!\!/\; \Gamma_n, \Sigma_n \Rightarrow \Delta_n, \Pi_n}\;contractions$$

نتیجه ۲۷.۴ (تمامیت در LNG)**.** اگر $G \vdash A$ آنگاه $LNG \vdash \Rightarrow A$.

برهان ۲۸.۴. تمام اصول G در این دستگاه به راحتی اثبات می‌شوند. برای MP هم توسط حذف برش مشکلی نخواهیم داشت.

فصل ۵

درون‌یابی برای منطق گودل توسط حساب رشته‌ای تودرتو خطی

ارائه‌ی نمونه‌ی شکافته حساب رشته‌ای تودرتو خطی که در فصل پنجم به آن پرداختیم کاملا مانند الگوریتم ارائه شده روی حساب ابررشته‌ای است. این بدین معنی است که تعاریف و قضایای قبلی برای آن صادق است. زیرا می‌دانیم که حساب شکافته معنای تازه‌ای به حساب پیش از خود نمی‌بخشد. بلکه تنها مکان اتم‌ها را در یاد می‌سپارد. همچنین الگوریتم پیدا کردن چندفرمول مناسب که چندفرمول درون‌یاب مولفه به مولفه باشد نیز به همان صورت قبل است. در این‌جا تنها تفاوت‌های اندکی دیده می‌شود از جمله برای قواعد آغازین که اگر $p^{(1)}$ فرمول مورد نظر بود، آن را به $p^{\|\tilde{\mathscr{G}}\|+1}$ تبدیل می‌کنیم. برای قواعد $(\wedge L), (\wedge R), (\vee L), (\vee R), (\to L)$ کاملا تعاریف و قضایای شبیه به $(\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \wedge), (\vee \Rightarrow), (\Rightarrow \vee), (\to\Rightarrow)$ ها را داریم. همچنین برای قاعده Lift واضح است که اگر $\mho$ برای مقدم چندفرمول درون‌یابی مولفه به مولفه باشد، برای تالی نیز چندفرمول درون‌یاب مولفه به مولفه خواهد بود. (زیرا اگر $w_{k+1} \nVdash A$ ، آنگاه $w_k \nVdash A$. زیرا مدل در این‌جا خطی است و همچنین رشته‌های گره‌هایی که انتخاب می‌شوند نیز خطی اند.) برای $(\to R^1), (\to R^2)$ چهار قاعده زیر را معرفی می‌کنیم.

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta; \Pi \sslash A; \Rightarrow B; \leftarrow \ovee_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \owedge D_j^{(n)} \owedge \bigowedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}))}{\tilde{\mathscr{G}} \sslash \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta, A \to B; \Pi \leftarrow \ovee_{j=1}^{m}(\overline{(D_j \to C_j)^{(n-1)}} \owedge \bigowedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}))} \to R^{1l}$$

$$\frac{\tilde{\mathscr{G}}|\tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta; \Pi\sslash; A \Rightarrow; B \leftarrow \owedge_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \ovee D_j^{(n)} \ovee \bigovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))}{\tilde{\mathscr{G}} \sslash \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta; \Pi, A \to B \leftarrow \owedge_{j=1}^{m}((C_j \to D_j)^{(n-1)} \ovee \bigovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))} \to R^{1r}$$

$$\mho_1 := \bigovee_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \owedge D_j^{(n)} \owedge \bigowedge_{l\neq n}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}))$$

$$\mho_2 := \bigovee_{j=1}^{m}(\bigowedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}) \owedge \overline{(D_j \to C_j)^{(n-1)}} \owedge D_j^{(n)} \owedge \bigowedge_{l=n}^{n+k}(\overline{E_{jl+1}^{(l)}} \owedge F_{jl+1}^{(l)}))$$

$$\tilde{\mathscr{G}} \sslash \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta; \Theta \sslash \tilde{\Sigma} \Rightarrow \Pi, A \to B; \Lambda \sslash \tilde{\mathscr{H}} \leftarrow \mho \tag{5.1}$$

$$\frac{5.1 \qquad \tilde{\mathscr{G}} \sslash \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta; \Theta \sslash A; \Rightarrow B; \sslash \tilde{\Sigma} \Rightarrow \Pi; \Lambda \sslash \tilde{\mathscr{H}} \leftarrow \mho_1}{\tilde{\mathscr{G}} \sslash \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta, A \to B; \Theta \sslash \tilde{\Sigma} \Rightarrow \Pi; \Lambda \sslash \tilde{\mathscr{H}} \leftarrow \mho \ovee \mho_2} \to R^{2l}$$

$$\mho_1 := \bigowedge_{j=1}^{m}(\overline{C_j^{(n)}} \ovee D_j^{(n)} \ovee \bigovee_{l\neq n}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}))$$

$$\mho_2 := \bigowedge_{j=1}^{m}(\bigovee_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \ovee F_{jl}^{(l)}) \ovee (C_j \to D_j)^{(n-1)} \ovee \overline{C_j^{(n)}} \ovee \bigovee_{l=n}^{n+k}(\overline{E_{jl+1}^{(l)}} \ovee F_{jl+1}^{(l)}))$$

$$\tilde{\mathscr{G}} \sslash \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta; \Theta \sslash \tilde{\Sigma} \Rightarrow \Pi; \Lambda, A \to B \sslash \tilde{\mathscr{H}} \leftarrow \mho \tag{5.2}$$

$$\frac{5.2 \qquad \tilde{\mathscr{G}} \sslash \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta; \Theta \sslash; A \Rightarrow; B \sslash \tilde{\Sigma} \Rightarrow \Pi; \Lambda \sslash \tilde{\mathscr{H}} \leftarrow \mho_1}{\tilde{\mathscr{G}} \sslash \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta; \Theta, A \to B \sslash \tilde{\Sigma} \Rightarrow \Pi; \Lambda \sslash \tilde{\mathscr{H}} \leftarrow \mho \owedge \mho_2} \to R^{2r}$$

نکته ۱.۵. *در هر چهار قاعده $\|\tilde{\mathscr{G}}\| = n - 2$ و در دو قاعده آخر $\|\tilde{\mathscr{H}}\| = k$*

قضیه ۲.۵. *منطق گودل دارای خاصیت درون‌یابی کرگ است.*

برهان ۳.۵. *قاعده $(\to R^{2l})$ را بررسی می‌کنیم. سه قاعده‌ی دیگر کاملا مشابه اند. فرض کنید $\mathfrak{M} =< W, \leqslant, V >$ خطی داده شده و $\boldsymbol{w}$ رشته‌ای خطی از گره‌های آن به طول $\|\boldsymbol{w}\| = n + k$ است که $n = \|\tilde{\mathscr{G}}\| + 2$ و $k = \|\tilde{\mathscr{H}}\|$. واضح است که به ازای هر گره $w_{n-1} \leqslant u \leqslant w_n$ اگر داشته باشیم $\boldsymbol{v} := w_1, \ldots, w_{n-1}, u, w_n, \ldots, w_{n+k}$ آنگاه داریم:*

$$\boldsymbol{v} \vDash \bigowedge_{l\neq n}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}) \Leftrightarrow \boldsymbol{w} \vDash \bigowedge_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \owedge F_{jl}^{(l)}) \owedge \bigowedge_{l=n}^{n+k}(\overline{E_{jl+1}^{(l)}} \owedge F_{jl+1}^{(l)}) \quad (5.3)$$

حال دو حالت داریم. اگر درون‌یابی ای که در نتیجه $\to R^{2l}$ در نظر گرفته شده را χ بنامیم:

$$\boldsymbol{w} \vDash \chi \ or \ \boldsymbol{w} \nvDash \chi$$

- $w \nvDash \chi$: پس داریم:

$$\forall j=1,\dots,m \boldsymbol{w} \nvDash \oslash_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \oslash F_{jl}^{(l)}) \oslash \overline{(D_j \to C_j)^{(n-1)}} \oslash D_j^{(n)} \oslash \oslash_{l=n}^{n+k}(\overline{E_{jl+1}^{(l)}} \oslash F_{jl+1}^{(l)})$$

$$and\ \boldsymbol{w} \nvDash \mho$$

حال باید ثابت کنیم که اگر $\boldsymbol{w} \nvDash L\tilde{\mathscr{G}} \not\parallel \tilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta \not\parallel L\tilde{\Sigma} \Rightarrow \Pi \not\parallel L\tilde{\mathscr{H}}$ ، آنگاه:
$w_{n-1} \Vdash A \to B$
با این فرض اولیه و این که $\boldsymbol{w} \nvDash \mho$ می‌توان نتیجه گرفت که $w_n \Vdash A \to B$. از مقدم سمت راست $R^{2l} \to$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\forall u \geqslant w_{n-1}\ u \ngeqslant w_n\ and\ (u \nVdash A\ or\ u \Vdash B) \Rightarrow u < w_n$$

پس $\boldsymbol{v}$ که در بالا تعریف شده خطی است. حال کافی است نشان‌دهیم چندفرمول درون‌یاب مولفه به مولفه که برای مقدم راست که آن را $\mho'$ می‌نامیم در $\boldsymbol{v}$ برقرار نیست. توسط ۳.۴ می‌توان دید که قسمت شامل E, F در $\boldsymbol{v}$ برقرار نیست. همچنین فرض کنید $\boldsymbol{w} \nvDash D_j^{(n)}$ را داشته باشیم.

$$\Longrightarrow w_n \nVdash D_j \Longrightarrow u \nVdash D_j \Longrightarrow \boldsymbol{v} \nvDash D_j^{(n)}$$

همچنین اگر $\boldsymbol{w} \nvDash \overline{(D_j \to C_j)^{(n-1)}}$ ، آنگاه:

$$\Longrightarrow w_{n-1} \Vdash D_j \to C_j \Longrightarrow u \nVdash D_j\ or\ u \Vdash C_j \Longrightarrow \boldsymbol{v} \nvDash \overline{C_j^{(n)}} \oslash D_j^{(n)}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{v} \nvDash \mho' \Longrightarrow w_{n-1} \Vdash A \to B$$

- $\boldsymbol{w} \vDash \chi$: اگر χ به دلیل درست بودن $\mho$ درست است، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{w} \vDash R\tilde{\mathscr{G}} \not\parallel R\tilde{\Gamma} \Rightarrow \Theta \not\parallel R\tilde{\Sigma} \Rightarrow \Lambda \not\parallel R\tilde{\mathscr{H}}$$

که دقیقا با نتیجه‌ای که نیاز داریم یکسان است. در غیر اینصورت:

$$\exists j=1,\dots,m \boldsymbol{w} \nvDash \oslash_{l=1}^{n-1}(\overline{E_{jl}^{(l)}} \oslash F_{jl}^{(l)}) \oslash \overline{(D_j \to C_j)^{(n-1)}} \oslash D_j^{(n)} \oslash \oslash_{l=n}^{n+k}(\overline{E_{jl+1}^{(l)}} \oslash F_{jl+1}^{(l)})$$

$$\Longrightarrow w_{n-1} \nVdash D_j \to C_j\ and\ w_n \Vdash D_j \Longrightarrow \exists u' \geqslant w_{n-1} u' \Vdash D_j\ and\ u' \nVdash C_j$$

قرار دهید: اگر $w_n \leqslant u'$ بود $u := u'$ و اگر $w_n < u'$ بود $u := w_n$.

$$\Longrightarrow w_{n-1} \leqslant u \leqslant w_n \; and \; u \Vdash D_j \; and \; u \nVdash C_j$$

پس $\boldsymbol{v}$ خطی است و داریم:

$$\boldsymbol{v} \vDash R\tilde{\mathscr{G}} /\!\!/ R\tilde{\Gamma} \Rightarrow \Theta /\!\!/ \Rightarrow /\!\!/ R\tilde{\Sigma} \Rightarrow \Lambda /\!\!/ R\tilde{\mathscr{H}} \Longrightarrow \boldsymbol{w} \vDash \tilde{\mathscr{G}} /\!\!/ R\tilde{\Gamma} \Rightarrow \Theta /\!\!/ R\tilde{\Sigma} \Rightarrow \Lambda /\!\!/ R\tilde{\mathscr{H}}$$

نتیجه ۴.۵. *$IPC,\ KC,\ G$ دارای خاصیت درون‌یابی لیندون هستند.*

برهان ۵.۵. نحوه‌ی معرفی درون‌یاب ها قطبیت را تغییر نمی‌دهد.

Bibliography

[1] R. Kuznets. “Craig Interpolation via hypersequents”. In: *D. Probst and P. Schuster* (2016).

[2] L. L. Maksimova. “Craig’s theorem in superintuitionistic logics and amagamable varieties of pseudo-Boolean algebras”. In: *Algebra and Logic 16* (1977).

[3] B. Lellman R. Kuznets. “Grafting Hypersequents onto nested sequents”. In: *Logic Journal of IGPL* (2016).

[4] M. Fitting R. Kuznets. “Modal Interpolation via nested sequents”. In: *Annals of Pure and Applied logic 166* (2015).

Abstract

The goal to this project is to extend the constructive proof theoretical method of proving Craig and Lyndon interpolation property for the logics Jankov and *Gödel*. First, we will give the hyper sequent calculus for both of the logics. However, we will show that the method works just for the hyper sequent calculus which is given for Jankov Logic. In order to prove the Craig Interpolation property for the later logic, we will switch to Linear Nested Sequent calculus. Consequently, by proving the cut elimination theorem and using the so called method on this calculus we will find the wanted result. Lastly, we will give a positive answer to the question whether these two logics have the Lyndon Interpolation property.

College of Science
School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Interpolation for Super-intuitionistic Logic via Proof Theoretical Methods

Author: Giti Omidvar

Supervisor: Dr. Majid Ali Zadeh

A thesis submitted to Graduate Studies Office
in partial fulfillment of the requirements for the degree of
B.Sc. of Computer Science

2019