پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

گزارش درس پروژه

محاسبه عدد پریش

استاد راهنما

جناب آقای دکتر درفشه

گردآورنده

امیرحسین رضازاده اردبیلی

نیمسال دوم ۹۶ـ۹۵

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

چکیده

در ریاضیات ترکیباتی یک پریش عبارتست از جایگشتی از گروه متقارن که دارای نقطه ثابت نباشد. این مساله در نظریه احتمال دارای کاربردی زیر است:

فرض کنید n نامه را درون n پاکت آدرس دار به تصادف قرار می دهیم احتمال اینکه هیچ نامه ای درون پاکت خودش نباشد چند است؟

محاسبه تعداد پریش ها یکی از مسائل تحقیقاتی روز است. تعداد پریش ها در گروه که با d_n نمایش داده می شود ابتدا توسط P.R.de Montmort مطرح شد. در این پروژه ضمن محاسبه عدد پریش حداکثر $\frac{d_n}{n!}$ وقتیکه $n \to \infty$ را محاسبه کرده و عدد پریش را تعمیم داده و پیچیدگی محاسبه و مطالعه می کنیم.

فصل ۱

مقدمه

در طول تاریخ ریاضیات دانشمندان به مسائل گوناگونی بر خورد کردن که به نوعی مفهوم پریشانی داشت این نوع نگاه ریاضیدانان را به تعریف عدد پریش و به دست آوردن روابط مرتبط سوق داد.

مسائلی که نگاه به آنها عدد پریش را در جایگاه مهمی در ریاضیات قرار داد:

۱. n تا نامه و n تا جعبه پست داریم می خواهیم تعداد حالت هایی را پیدا کنیم که هیچ نامه بدست صاحبش نرسد

۲. شیوه محاسبه عدد نپر

۳. رنگامیزی گراف: چگونه یک گراف خا صی را با k رنگ مختلف رنگ کنیم به طوری که راس های مجاور همرنگ نباشد

۴. مسائل انتقال نیرو(از قبیل آب،برق،.........)

۵. یک سیستم انتقال نیرو را چگونه طراحی کنیم که از هر بخش انرژی کمتر از توان آن بخش عبور کند

۶. یا در مسائل رمزنگاری که برای رمز گشایی یا رمز نگاری یک سیستم بررسی می شود

۱.۱ مقدماتی از گروه ها

در ابتدا برخی از تعاریف و قضایای مرتبط با مبحث گروه ها را بیان می کنیم. همچنین با توجه به مطالب مورد نیاز درباره ی مجموعه ها، مختصری از قوانین و قضایای پیرامون احتمال و نظریه ی اعداد نیز گردآوری شده است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید Γ یک گروه باشد و S یک زیر مجموعه ی Γ ، اگر برای هر $x \in S$ داشته باشیم $x^{-1} \in S$ گوییم S نسبت به معکوس گرفتن بسته است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید Γ یک گروه و H مجموعه ای غیرتهی باشد. فرض کنید به ازای هر $g \in \Gamma$ و هر $x \in H$ عضو یکتایی از H که آن را با علامت $X * g$ نشان می دهیم، وجود داشته باشد به طوری که:

۱. به ازای هر $x \in H$ ، $x * 1 = x$

۲. به ازای هر $g_1.g_2 \in \Gamma$ و هر $x \in H$ ، $x * (g_1 g_2) = (x * g_1) * g_2$

در این صورت گوییم گروه Γ بر مجموعه ی غیرتهی H عمل می کند و $*$ را عمل Γ بر H گویند. برای سهولت در نوشتن به جای $x * g$ معمولا خواهیم نوشت xg .

تعریف ۳.۱.۱. گوییم گروه Γ روی مجموعه ی H متعدی عمل می کند، هرگاه برای هر دو رأس x و y از H ، $g \in \Gamma$ ای وجود داشته باشد به طوری که $xy = g$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیدگروه Γ بر مجموعه ی غیرتهی H عمل کند و $X \in H$ در این صورت مجموعه ی $\{g \in \Gamma | xg = x\}$ را پایدارساز x در Γ می نامیم و آن را با علامت $st_\Gamma(x)$ را نشان می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید گروه Γ بر مجموعه ی غیر تهی H عمل کند. رابطه ی $\sim$ را در H چنین تعریف می کنیم:

گوییم $X_1 \sim X_2$ هرگاه وجود داشته باشد $g \in \Gamma$ به طوری که $x_1g = x_2$ رابطه ی $\sim$ یک رابطه ی هم ارزی در H است. هر رده ی هم ارزی را یک Γ ـ مدار می نامیم. اگر $x \in H$ آن گاه رده ی هم ارزی شامل X را مدار X در Γ می نامیم و آن را با علامت $Orb(x)$ نشان می دهیم.

با توجه به تعریف فوق واضح است که $Orb_\Gamma(x) = \{xg | g \in \Gamma\}$. بر طبق خواص رده های هم ارزی ، معلوم می شود که مدارها افرازی از H می باشند و در نتیجه هر دو مدار متمایز، از هم جدا هستند و اجتماع آنها برابر با H است. در صورتی که $Orb_\Gamma(x)$ مجموعه ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن را طول مدار x در Γ می نامیم.

۲.۱ مقدمات گراف ها

تعریف ۱.۲.۱. $G = (V, E)$ شامل مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال های $E(G)$ است، که در آن یک یال زوج نا مترتبی از رأس های متمایز گراف G باشد. در این پایان نامه برای نمایش یک یال از نماد xy به جای $\{x, y\}$ استفاده می کنیم.

درجه رأس x در گراف G که با $deg_G(X)$ نشان داده می شود، برابر با تعداد یال های واقع بر X می باشد. اگر گراف شناخته شده باشد، برای سادگی $deg_G(X)$ را با $deg(X)$ نشان می دهیم.

اگر xy یک یال باشد، آن گاه گوییم x و y دو رأس مجاور می باشند، به عبارت دیگر y یک همسایه ی x است، و با نماد $y \sim x$ نمایش می دهیم. مجموعه ی همسایه های رأس x ، را همسایگی $N_G(x)$ نامیم، هرگاه شامل تمام رئوس مجاور با x باشد. توجه داریم $N_g(x)$

شامل رأس x نیست. در یک گراف ساده، تعداد همسایه های یک رأس با درجه آن رأس برابر است.

تعداد رئوس در گراف G را، مرتبه ی گراف G می نامیم و به صورت $|V(G)|$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۲.۲. یک قوس یا یال جهت دار، زوج مرتبی از رأس های مجاور است.

قضیه ۱.۲.۳. برای هر گراف $G = (V, E)$ داریم:

$$\sum_{X \in V(G)}^{n} deg(x) = 2|E(G)| \tag{۱.۱}$$

تعریف ۱.۲.۴. گراف تهی، گرافی است که هیچ یالی ندارد و گراف پوچ، گرافی است که هیچ رأس و یالی ندارد.

تعریف ۱.۲.۵. گرافی است بدون جهت که طوقه و یال چندگانه ندارد. گراف ساده ای که در آن هر دو رأس متمایز، با یک یال به یکدیگر متصل شده اند، گراف کامل نامیده می شود.

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید X زیر مجموعه ای ناتهی از $V(G)$ باشد. در این صورت زیر گرافی از G که مجموعه رئوس آن X و مجموعه یال های آن ، مجموعه ی یال هایی از G باشد که هر دو رأس آنها در X واقع است ، را زیر گراف القایی G روی X نامیم.

تعداد زیرگراف های القایی گراف G برابر تعداد زیر مجموعه های $V(G)$ است. زیر گرافی از G که تمامی مجموعه رئوس G را در بردارد و هر یال درآن، یالی در گراف G باشد، زیرگراف فراگیر نامیده می شود.

تعریف ۱.۲.۷. زیر مجموعه ی S از رئوس G یک خوشه نامیده می شود، هرگاه زیرگراف القایی G روی S گرافی کامل باشد.

عدد خوشه ای G برابر با اندازه ی بزرگترین خوشه گراف G است و با $\omega(G)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۸.۲.۱. دو گراف G و H را یکریخت نامیم هرگاه نگاشت دوسویی $\theta : V(G) \to V(H)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $u, v \in V(G)$ داشته باشیم:

$uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

اگر دو گراف G و H یکریخت باشند، آنگاه می نوسیم $G \cong H$.

یکریختی از گراف G به خودش را، یک خودریختی G گوییم. در واقع خود ریختی، یک جایگشت از رئوس G است که حافظ یال باشد.

مجموعه ی همه ی خود ریختی های گراف G تشکیل یک گروه می دهد که به آن گروه خودریختی گراف G گوییم و با نماد $Aut(G)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. یک مسیر از G عبارت است از دنباله ی متناهی $v_0e_1v_1e_2\ldots e_kv_k$ به طوری که جملات آن یک در میان رأس ها و یال های متمایز G بوده و برای هر i ، $1 \leq i \leq k$ ، v_{i-1} و v_i دو سر e_i باشند. دنباله ی فوق، مسیر بین v_k و v_0 است و طول این مسیر برابر K می باشد.

طول کوتاه ترین مسیر بین دو رأس u و v در گراف G را فاصله ی بین دو رأس نامیم و با نماد $d_G(u, v)$ نمایش می دهیم. اگر بین دو رأس u و v مسیری وجود نداشته باشد، آن گاه $d_G(u, v) = \infty$ است.

تعریف ۱۰.۲.۱. بیشترین فاصله ی رأس x از دیگر رئوس گراف G را خروج از مرکز رأس x نامیم.

بیشترین فاصله در میان تمام رئوس گراف G به عبارت دیگر بیشترین مقدار خروج از مرکز گراف G را قطر گراف G نامیم. و با نماد $diam(G)$ نمایش می دهیم. بنابراین:

$$Diam(G) = max\{d_g(x, y) : \forall x, y \in V(G)\} \tag{۲.۱}$$

تعریف ۱۱.۲.۱ . مسیری که دو رأس ابتدا و انتهای آن یکسان باشد، یک دور نام دارد. طول یک دور برابر تعداد یال هایش است.

طول کوتاهترین دور گراف G کمر G نامیده می شود، و با $girth(G)$ نمایش می دهند.

تعریف ۱۲.۲.۱. گراف G را منظم نامیم، هرگاه درجه ی تمام رئوس آن برابر باشد. اگر درجه ی هر رأس آن برابر n باشد، آن گاه G را یگ گراف n —منظم و یا گراف منظم از درجه n نامیم.

قضیه ۱۳.۲.۱. هر گراف n —منظم از مرتبه ی k دارای $kn/2$ یال می باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید G یک گراف باشد،

آ. مسیر همیلتونی در گراف G ، مسیری است که از تمام رئوس گراف G فقط و فقط یک بارعبور کند.

ب. دور همیلتونی، دوری است که از تمام رئوس گراف یک بار عبور کند.

پ. یک گراف با دور همیلتونی را گراف همیلتونی می نامیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. گراف k ـ بخشی گرافی است که می توان مجموعه ی رأس های آن را به k زیر مجموعه افراز کرد به طوری که دو سر هیچ یالی در یک زیر مجموعه قرار نگیرد.

گراف k —بخشی کامل، یک گراف ساده ی k —بخشی است که در آن هر رأس با تمام رأس هایی که در زیر مجموعه ای غیر یکسان با آن قرار دارند، مجاور است.

تعریف ۱.۲.۱۶. گراف G همبند است، هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت G ناهمبند است.

یک زیر گراف القایی G مؤلفه ی همبند نامیده می شود هرگاه بزرگترین زیرگراف همبند G باشد.

تعریف ۱.۲.۱۷. مجموعه ای از رئوس در گراف G ، که با حذف هر رأس آن ، تعداد مؤلفه های همبند گراف G افزایش یابد، را مجموعه ی برش رأسی گراف G می نامیم.

عدد همبندی در گراف G ، کوچکترین تعداد رئوس در مجموعه ی برش رأس گراف G است و با نماد $K(G)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱.۲.۱۸. یک K —رنگ آمیزی رأسی گراف G عبارت است از نسبت دادن K رنگ به رأس های آن به طوری که هیچ دو رأس مجاور متمایزی دارای رنگ یکسانی نباشند.

عدد رنگی $x(G).(G)$ ، برابر با کوچکترین K ای است که به ازای آن ، گراف G یک k ـ رنگ آمیزی رأسی دارد.

تعریف ۱.۲.۱۹. یک مجموعه ی مستقل گراف G ، زیر مجموعه ای مانند S از $V(G)$ است به طوری که هیچ دو رأس آن در G مجاور نیستند.

اندازه بزرگترین مجموعه مستقل G ، عدد استقلال G نامیده و با $\alpha(G)$ نشان داده می شود.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید S زیر مجموعه ای از رئوس گراف G باشد. در این صورت مجموعه ی رئوس G که یا عضو S هستند و یا با رأسی از رئوس S مجاور باشند را با $N_G(S)$ نمایش می دهیم. اگر $N_G(S) = V(G)$ باشد، آنگاه S را مجموعه ی غالب می نامیم.

کوچکترین اندازه ی مجموعه ی غالب G ، را عدد غلبه ی G نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. جورسازی M در گراف G ، مجموعه ای از یال های G است که هیچ دو یالی رأس مشترک نداشته باشند.

اندازه هر جورسازی برابر تعداد یال های متعلق به آن مجموعه می باشد. هر رأس شامل یک یال را در جورسازی M ، اصطلاحا پوشیده شده توسط M می نامیم. یک جورسازی که در آن هر رأس G پوشیده شده باشد، جورسازی کامل و یا ۱ ـ عاملی نامیده می شود.

تعریف ۲۲.۲.۱. گراف G را گراف رأس متعدی یا به طور ساده تر گراف متعدی نامیم، اگر برای هر دو رأس متمایز y و x در G یک خودریختی $\Phi \in AUT(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $\Phi(x) = y$. به عبارت دیگر $AUT(G)$ به طور متعدی روی $V(G)$ عمل می کند.

بنا بر قضیه ی ذیل، برای محاسبه ی قطر در یک گراف رأس متعدی، کافی است خروج از مرکز یک رأس، را محاسبه کنیم.

فصل ۲
پریش ها

پریش (Derangement) از پریشانی می آید. هرگاه هیچ کس سرجای خود نباشد، گوییم پریش رخ داده است. در ترکیبات شمارشی، به جای گشت $<\pi_1;\pi_2;\ldots;\pi_n>$ از اعداد $1,2,\ldots,n$ پریش گوییم، اگر هیچ $1\leq i\leq n$ وجود نداشته باشد که $\pi_i=i$ باشد (در واقع هیچ عنصری سرجای خود نباشد). برای مثال، جایگشت $<3,1,4,2>$ یک پریش ۴ عنصری است. تعداد پریش های n عنصره را با D_n یا $!n$ (با $n!$ اشتباه نگیرید) نشان می دهند. یا ازنگاهی دیگر:

پریش تعداد توابع دو سویی $f:n\rightarrow n$ می باشد به طوری که $\forall i\in\{1,2,\ldots n\}$ داشته باشیم $f(i)\neq i$

۱.۲ تعداد پریش ها

می خواهیم تعداد پریش های n عنصر یا همان D_n را پیدا کنیم n زیر مجموعه ی $A_1A_2\ldots A_n$ از تمام جای گشت های n ـ عنصره، به این صورت تعریف می کنیم که A_i شامل جای گشت هایی است که عدد i در مکان i (سر جای خودش) باشد. ما باید تعداد جای گشت هایی که در هیچ یک از A_i نیستند را بشماریم.در واقع باید مقدار $|(A_1\cup A_2\cup\ldots A_n)'|$

را محاسبه کنیم. طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$D_n = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n)'|$$

$$= n! - (\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_j \wedge A_i| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n|)$$

حال اعداد صحیح $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ و زیر مجموعه های $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ را در نظر بگیرید. می خواهیم تعداد اعضای $A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \ldots \wedge A_{i_k}$ را حساب کنیم. این اشتراک k ـ تایی، شامل جای گشت هایی است که اعداد $i_1, i_2, \ldots, i_n$ سر جای خود باشند. تعداد این جای گشت ها، برابر $(n-k)!$ است (این k عدد باید سر جای خود باشند و بقیه ی اعداد، یک جای گشت $n-k$ عنصره در میان خود تشکیل می دهند.) به محاسبه D_n بر می گردیم. داریم:

$$\begin{aligned} D_n = n! - (\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!) \\ = n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)! \\ = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} (n-i)! \\ = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \frac{n! + (n-i)!}{i!(n-i)!} \\ = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \frac{n!}{i!} \\ D_n = n!(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}) \end{aligned}$$

به راحتی می توان نشان داد:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_i = n_i \qquad (۱.۲)$$

زیرا جایگشت n شی s را برابر است می توان با جمع کردن حالاتی که i تا از n تا سر جایگشت شان نیست بدست آورد یعنی یا صفر هستن یا سرجایشان نیستند. ثابت می کنیم عبارت سمت چپ برابر تعداد جای گشت های n ـ عنصره است. تعداد جای گشت هایی که دقیقاً i عضو دارند که سر جای خودشان هستند، برابر

$$\binom{n}{i} D_{n-i} = \binom{n}{n-i} D_{n-i} \qquad (۲.۲)$$

هستند؛ زیرا انتخاب آن i عضو $\binom{n}{i}$ حالت دارد و بقیه باید تشکیل یک پریش $(n-i)$ عنصره بدهند. پس با در نظر گرفتن i های مختلف، تعداد جایگشت های n ـ عنصره برابر

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_i \qquad (۳.۲)$$

است پس رابطه ی داده شده ثابت شد.

۲.۲ روابط بازگشتی برای D_n

می خواهیم یک رابطه بازگشتی برای $n!$ پیدا کنیم. فرض کنید عدد ۱ در جایگاه شماره i باشد. در این صورت برای جایگاه عدد i ، دو حالت داریم:

$(n-1)$ ـ عنصره یا همان D_{n-1} است پس نتیجه می شود:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (۴.۲)$$

پس یک رابطه بازگشتی برای D_n به دست آمد. اگر نماد $n!$ را استفاده کنیم داریم:

$$!n = (n-1)(!(n-1)+!(n-2)) \quad (۵.۲)$$

از طرفی در بحث فاکتوریل دیدیم:

$$n! = (n-1)((n-1)! + (n-2)!) \quad (۶.۲)$$

دور از ذهن نیست که شاید یکی از انگیزه های ایجاد نماد $n!$ همین شباهت روابط بازگشتی $n!$ و $!n$ باشد. روابط بازگشتی دیگری نیز برای D_n می توان تعریف کرد برای مثال، رابطه ی بازگشتی زیر، مستقیماً از روی فرمول D_n و همچنین با ساده کردن رابطه ی بازگشتی بالا به دست می آید:

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \quad (۷.۲)$$

فرض کنید k و n اعداد طبیعی باشند که $1 \leq k \leq n$ جای گشت هایی از اعداد $1, 2, \ldots, n$ را در نظر بگیرید، که هیچ کدام از اعداد $1, 2, \ldots, k$ سر جای خود نباشند. تعداد این جای گشت ها را با $D_{n,k}$ نشان می دهیم. به وضوح داریم: $D_{n,0} = n!$ و $D_{n,n} =!n$

مثال ۱.۲.۲. $D_{4,3}$ را بیابید.

پاسخ: تمام جای گشت هایی را که هیچ یک از اعداد ۱و۲و۳ سر جای خود نیستند، لیست می کنیم:

$< 2,1,4,3 >, < 2,3,1,4 >, < 2,3,4,1 >, < 2,4,1,3 >, < 3,1,2,4 >$
$, < 3,1,4,2 >, < 3,4,1,2 >, < 3,4,2,1 >, < 4,1,2,3 >, < 4,3,1,2 >, <$
$4,3,2,1 >$

پس پاسخ برابر ۱۱ است.

می خواهیم $D_{n,k}$ را پیدا کنیم. ابتدا یک رابطه بازگشتی برای $D_{n,k}$ می یابیم. جایگشت های متناظر $D_{n,k-1}$ هستند از $D_{n,k-1}$ باید جایگشت هایی را کم کنیم که عدد k سر جای خودش باشد که تعداد آن ها برابر $D_{n-1,k-1}$ است زیرا $n-1$ عدد باقی مانده، اعداد $1,2,\ldots,k-1$ نباید سر جای خود بیایند پس داریم:

$$D_{n,k} = D_{n,k-1} + D_{n-1,k-1} \tag{۸.۲}$$

حال با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، فرمول صریح D_n را می یابیم. زیر مجموعه های $A_1, A_2, \ldots, A_k$ از جایگشت های اعداد $1,2,\ldots,n$ را به این صورت تعریف می کنیم که A_i شامل جایگشت هایی باشد که عدد i ، سر جای خود باشد. ما باید $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$ را محاسبه کنیم داریم:

$$D_{n,k} = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$$
$$= n! - (\sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq k} |A_i \wedge A_j| + \ldots + (-1)^{k-1}|A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_K|)$$

از طرفی به ازای هر $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq k$ مجموعه ی $A_{i_1} \wedge A_{i_2} \wedge \ldots \wedge A_{i_m}$ شامل جایگشتهایی است که اعداد $i_1, i_2, \ldots, i_m$ سر جای خود باشند که تعداد جایگشت ها با این ویژگی، برابر $(n-m)!$ است پس داریم:

$$D_{n,k} = n! - (\binom{k}{1}(n-1)! - \binom{k}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}(n-k)!) \quad (۹.۲)$$

پس

$$D_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (n-i)! \quad (۱۰.۲)$$

فصل ۳

نگاهی دیگر در شیوه محاسبه عدد پریش

n تا نامه و n تا جعبه پست داریم، می خواهیم تعداد حالت هایی را پیدا کنیم که هیچ نامه ای بدست صاحبش نرسد. تابع دوسویی f را تعریف می کنیم:

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

در حل این مسأله تعداد f هایی را باید پیدا کنیم که بازای هر i داشته باشیم: $f(i) \neq i$

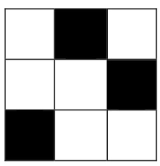
۱.۳ نگاه ماتریسی به عدد پریش

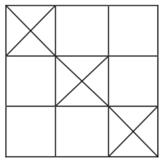
هر سطر مصرف برد باید باشد و هر ستون مصرف دامنه می باشد. مثلا تابع

$$f(1) = 3.f(2) = 1.f(3) = 2$$

مثلا برای این تابع ماتریس روبرو (شکل ۱.۳) وجود دارد:

حال ماتریس متناظر با توابعی $\forall i f(i) \neq i$ فاقد ع مت روی قطر اصلی است. (شکل





(۱.۳

۲.۳ پاسخ محاسبه C_n

پیشامد اینکه بعد از j ، $j+1$ ظاهر شود، برابر است با اندازه A_j

$$|A_j| = (n-1)!$$

در مسائل اعداد پریش نکاتی که مد نظر است. پیدا کردن جواب برای مسائلی است که یک سری عدد خاص نمی توانند در جای مشخش شده قرار بگیرند.برای تفهیم مطلب تعریف زیر را بیان می کنیم:

مجموعه ای از جایگشت های ۱ تا n به صورت $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$Xic\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

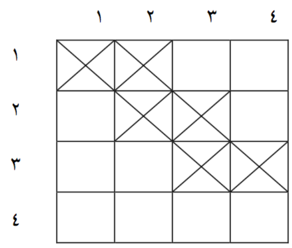
برای $j = 1, \ldots, n$ به فرم $i_1, i_2, \ldots, i_n$ که برای هر j ، $i_j \notin x_j$

به طور مثال : $p|(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ برای مجموعه های $x_j = \{j\}$ برابر خواهد بود با عدد پریش D_n زیرا طبق تعریف $i_j \notin j$ و در نتیجه $i_j \neq j$ است.

شکل ماتریس برای مسأله با در جاهایی که باید پر شده باشد همان قطر اصلی می باشد.

مثال ۱.۲.۳. $x_j = \{j, j+1\}, n = 4, x_4 = \emptyset$

ماتریس های حل این مثال باید به گونه ای باشد که در جاهای ضربدر خورده هیچ علامت نباشد. (شکل ۱.۳)



برای حل این فرم مسائل یعنی بدست آوردن $|p(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ از فرمول زیر استفاده می شود:

$|p(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = |s| - \sum_{j=1}^{n} |A_j| + \sum_{i,j} |A_i \wedge A_j| + (-1)^n |A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n|$

که در آن s مجموعه توابع دو سویی روی $\{1, 2, \ldots, n\}$ که مجموعه توابع دو سویی A_j که برد آن به فرم $|s| = n_i$ می باشد و $i_1, i_2, \ldots, i_n$ می باشد $i, j \in x_j$ است حال x_j برابر تعداد حالتی است که مؤلفه ی که در مکان j است در مجموعه ی x_j باشد.آنگاه $|A_j| = |x_j|x(n-1)!$ که در نتیجه

$$|A_j| = |x_j|(n-1)!$$
$$\sum_{j=1}^{n} |A_j| = \sum_{j=1}^{n} |X_j|(n-1)! = (n-1)! \sum_{j=1}^{n} |X_j| = r_1(n-1)!$$
$$r_1 = \sum_{j=1}^{n} |X_j|$$

حال $A_j \wedge A_k$ معرف پیشامدی است $c_k \in x_k, c_j \in x_j$ باشد که $|x_k|$ تعداد حالتهایی است که $i_k \in x_k$ و $|x_j|$ برابر با تعداد حالتهایی است که $c_j \in x_j$ پس

$$|A_j \cup A_k| = |X_j||X_k|(n-2)!$$

$$|A_i \cup A_j| = \sum_{i,j} |X_j||X_k|(n-2)! = (n-2)! \sum_{i,j} |X_j||X_k|$$

$$r_2 = \sum_{i,j} |X_j||X_k|$$

به طور مشابه برای $A_{j_1} \wedge A_{j_2} \wedge \ldots \wedge A_{j_k}$ رابطه ی زیر بدست می آید

$$\sum |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}| = r_k(k-1)! \qquad (۱.۳)$$

با جایگذاری روابط با خواهیم داشت

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots + (-1)^2 r_n \qquad (۲.۳)$$

تعداد جایگشت های روی n حرف که دارای نقطه ثابت نباشند با $n!$ نمایش می دهیم.

$N=2, id., (12), !2=1$

$N=3, id., (12), (13), (23), (123), (132), !3=2$

$N=4, id., (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1324), (1243), (1342), (1423), (1432)$

$N=5$

$(12)(345), (12)(354), (13)(245), (13)(254), (14)(235), (14)(253), (15)(234), (15)(243), (23)(145),$

$(23)(154), (24)(135), (24)(153), (25)(134), (25)(143), (34)(125), (34)(152), (35)(124), (35)(142),$

$(45)(123), (45)(122), (12345), (12354), (13245), (13254), (14325), (14523), (14532), (12435),$

$(12453), (13425), (13452), (14235), (14253), (14352), (12543), (12534), (15243), (15234), (15342),$

$(13542), (15234), (15423), (15432), (13524)$

$!5=44$

$$!n = n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\begin{cases} 1,0,1,2,9,44,265,1854,14833,14833,133496,133496,14684570, \\ 176214841,2290792932,32071101049,481066515734, \\ 7697064251745,130850092279664,2355301661033953,\ldots \end{cases}$$

$$\{1,0,1,2,9,4,5,4,3,6\}$$

که ما را به جدول شماره ۱.۳ می رساند

$(d_3+d_4)(n-1)=d_5$

$N=5 \rightarrow 2+9(n-1)$

جدول ١.٣: ـ

n	$d_n \equiv n!\sum_{k=٠}^{n}\frac{(-١)^k}{k!}$ $d_n \approx \left(\frac{١}{e}\right)n!$ $d_n = \left[\frac{n!}{e}\right] = \left[\frac{n!}{e}+\frac{١}{٢}\right]; n \geq ١$	n!	$a_n \equiv n!\sum_{k=٠}^{n}\frac{١}{k!}$ $a_n \approx en!$ $a_n = [en!]; n \geq ١$
٠	١	١	١
١	٠	١	٢
٢	١	٢	٥
٣	٢	٦	١٦
٤	٩	٢٤	٦٥
٥	٤٤	١٢٠	٣٢٦
٦	٢٦٥	٧٢٠	١٩٥٧
٧	١٨٥٤	٥٠٤٠	١٣٧٠٠
٨	١٤٨٣٣	٤٠٣٢٠	١٠٩٦٠١
٩	١٣٣٤٩٦	٣٦٢٨٨٠	٩٨٦٤١٠
١٠	١٣٣٤٩٦١	٣٦٢٨٨٠٠	٩٨٦٤١٠١
١١	١٤٦٨٤٥٧٠	٣٩٩١٦٨٠٠	١٠٨٥٠٥١١٢
١٢	١٧٦٢١٤٨٤١	٤٧٩٠٠١٦٠٠	١٣٠٢٠٦١٣٤٥
١٣	٢٢٩٠٧٩٢٩٣٢	٦٢٢٧٠٢٠٨٠٠	١٦٩٢٦٧٩٧٤٨٦
١٤	٣٢٠٧١١٠١٠٤٩	٨٧١٧٨٢٩١٢٠٠	٢٣٦٩٥٧٥١٦٤٨٠٥
١٥	٤٨١٠٦٦٥١٥٧٣٤	١٣٠٧٦٧٧٤٣٦٨٠٠٠	٣٥٥٤٦٢٧٤٧٢٠٧٦
١٦	٧٦٩٧٠٦٤٢٥١٧٤٥	٢٠٩٢٢٧٨٩٨٨٨٠٠٠	٥٦٨٧٤٠٣٩٥٥٣٢١٧
١٧	١٣٠٨٥٠٠٩٢٢٧٩٦٦٤	٣٥٥٦٨٧٤٢٨٠٩٦٠٠٠	٩٦٦٨٥٨٦٧٢٤٠٤٦٩٠
١٨	٢٣٥٥٣٠١٦٦١٠٣٣٩٥٣	٦٤٠٢٣٧٣٧٠٥٧٢٨٠٠٠	١٧٤٠٣٤٥٦١٠٣٢٨٨٤٤٢١
١٩	٤٤٧٥٠٧٣١٥٥٩٦٤٥١٠٦	١٢١٦٤٥١٠٠٤٠٨٨٣٢٠٠٠	٣٣٠٦٦٥٦٦٥٩٦٢٤٠٤٠٠٠
٢٠	٨٩٥٠١٤٦٣١١٩٢٩٠٢١٢١	٢٤٣٢٩٠٢٠٠٨١٧٦٦٤٠٠٠٠	٦٦١٣٣١٣٣١٩٢٤٨٠٨٠٠٠١

۳.۳ قضایای مربوط به عدد پریش

اگر برای هر n عضو اعداد طبیعی می داریم

اثبات

$$D_n \begin{cases} \lfloor \frac{n!}{e} + m_1 \rfloor, n\ is\ odd, m_1 \in \lfloor 0, \frac{1}{2} \rfloor \\ \lfloor \frac{n!}{e} + m_2 \rfloor, n\ is\ even, m_2 \in \lfloor \frac{1}{3}, 1 \rfloor \end{cases}$$

با نوشتن بسط تیلور e^{-1} خواهیم داشت

$$|\frac{n!}{e} - D_n| \leq \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+2)} + \dots$$

که از آنجایی که $n+1 < n+i$ هست به ازای هر i بزرگتر از یک آنگاه:

$$M(n) < \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{n}$$

که

$$M(n) = |\frac{n_1}{e} - D_n|$$

که نتیجه می دهد

$$D_n = [\frac{n!}{e} + \frac{1}{n}], (n \geq 2)$$

ما می توانیم یک کران بهتری برای D_n پیدا کنیم اگر $\frac{1}{n+1}$ را از فرمول زیر فاکتور بگیریم

$$|\frac{n!}{e} - D_n| \leq \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+2)} + \dots$$

به عبارت زیر می رسیم

$$M(n) < \frac{1}{n+1}(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots) = \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

که در نتیجه:

$$D_n = [\frac{n!}{e} + \frac{n+2}{(n+1)^2}], (n \geq 2)$$

ایده بالا قابل تعمیم است.

اثبات: برای هر عدد طبیعی مانند k داریم:

خطای بسط تیلور این عبارت را $2(x-1)!$ در هر سه طرف معادله ضرب می کنیم

$$0 < \frac{1}{e} - \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{(-1)^{-i}}{i!} < \frac{1}{(2k)!}$$

برای هر m_1 ، $(2k-1)!$ را ضرب کرده سپس با m_1 جمع می بندیم

$$m_1 < \frac{(2k-1)!}{e} + m_1 - \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{(-1)^i (2k-1)!}{i!} < m_1 + \frac{1}{2}$$

اگر این شرط بر قرار باشد $0 \le m_1 \le \frac{1}{2}$

$$\sum_{i=0}^{2k-1} \frac{(-1)^i (2k-1)!}{i!} = \lfloor \frac{(2k-1)!}{e} + m_1 \rfloor$$

مانند

$$0 < \frac{1}{e} - \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{(-1)^i}{i!} < \frac{1}{(2k)!}$$

برای هر m_2 داریم

$$m_2 - 1 < \frac{(2k)!}{e} + m_2 - \sum_{i=0}^{2k} \frac{(-1)^i (2k)!}{i!} < m_2$$

که اگر $m_2 \ge \frac{1}{3}$ باشد آنگاه

$$0 \le \frac{(2k)!}{e} + m_2 - \sum_{i=0}^{2k} \frac{(-1)^i (2k)!}{i!}$$

با شرط $\frac{1}{3} \le m_2 \le 1$

$$\sum_{i=0}^{2k} \frac{(-1)^i (2k)!}{i!} = \lfloor \frac{(2k)!}{e} + m_2 \rfloor$$

و حکم اثبات می شود.

۴.۳ خانواده های جدید بعضی دیگر از فرمول ها

۱.۴.۳ فرمول های مختلف عدد پریش

M اگر عدد صحیح و بزرگتر مساوی عدد ۳ باشد آنگاه عدد پریش n از رابطه ی زیر بدست می آید.

اثبات:

$D_n = \lfloor(\frac{\lfloor e(n+m-2)!\rfloor}{(n+m-2)!} + \frac{n+m}{(n+m-1)(n+m-1)!} + e^{-1})n!\rfloor - \lfloor en!\rfloor$

برای

$m \geq 3$

داریم

$|\frac{n!}{e} - D_n| < \frac{1}{(n+1)}(1 + \frac{1}{(n+2)}(\dots 1 + \frac{1}{(n+m-1)}(\frac{n+m}{n+m-1})\dots))$

$M_m(n)$ را سمت راست نا مساوی با تعریف می کنیم آنگاه خواهیم داشت

$(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m-1)M_m(n) =$

$(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m-1) + (n+3)\dots(n+m-1) + \dots + (n+$
$m-1) + \frac{n+m}{n+m-1}$

$(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m-1)$

و با ساده کردن عبارت با به این نتیجه می رسیم:

$M_m(n) = n!\frac{n+m}{(n+m-1)(n+m-1)!} + \sum_{i=n+1}^{n+m-2}\frac{1}{i!}$

بنابراین

$D_n = \lfloor\frac{n!}{e} + n!(\frac{n+m}{(n+m-1)(n+m-1)!} + \sum_{i=n+1}^{n+m-2}\frac{1}{i!})\rfloor$

با استفاده از این رابطه بالا

$\sum_{i=n+1}^{n+m-2}\frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{n+m-2}\frac{1}{i!} - \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$

اثبات کامل می شود.

فرمول دیگر برای $n \geq 2$ داریم

$D_n = \lfloor(e + e^{-1})^{-1}n!\rfloor\lfloor en!\rfloor$

برای این قضییه دو تا اثبات ارائه می دهیم روش اول چون قضییه قبل برای همه $m \geq 3$ بود.

بنابراین داریم

$D_n = lim_{m\to\infty} \lfloor (\frac{\lfloor e(n+m-2)! \rfloor}{(n+m-2)!} + \frac{n+m}{(n+m-1)(n+m-1)!} + e^{-1})n! \rfloor \lfloor en! \rfloor$

$\lfloor (e+e^{-1})en! \rfloor$

روش دوم: با استفاده از نامساوی $\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} = [en!]$

$M(n) = n!(n - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}) = en! - \lfloor en! \rfloor = \{en!\}$

اثبات شد.

در الگوریتم برنامه میپل محاسبه D_n به گونه می باشد برنامه نویسی میپل که تابع تعریف شده برای گاما است:

$D_n = (-1)^n hypergeom([1, -n], [], 1)$

$D_n = e^{-1}\Gamma(n+1, -1)$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p & \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p & ; x \end{bmatrix}$$

$$pF_q \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p & \\ b_1 & b_2 & \dots & b_p & ; x \end{bmatrix} = \sum_{k\geq 0} t_k x^k$$

$$\frac{t_k + 1}{t_k} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\dots(k+a_p)}{(k+b_1)(k+b_2)\dots(k+b_p)(k+1)} x$$

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad Re(a) > 0$$

می خواهیم پیدا کنیم اندازه عدد پریش D_n را می توانیم تخمین بزنیم بعضی از جمع ها و انتگرال ها برای این کار تعریف می کنیم تابع پریش را با نام $D_n(x)$ به صورت زیر بیان

می کنیم:

$$D_n(x) = \begin{cases} n!\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} & x = 0, \\ n! & x \neq 0 \end{cases}$$

$$D_n(x) = (x+n)D_{n-1}(x) - x(n-1)D_{n-2}(x) = x^n + nD_n(x) \quad (D_0(x) = 1, D_1(x) = x+1)$$

$$D_n(1) = \lfloor en! \rfloor \quad (n \geq 1) \quad (see[3])$$

$$D_n(x) = x^n.2f_0 \begin{bmatrix} 1 & -n \\ - & ; -\frac{1}{x} \end{bmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$$D_n(x) = e^x \Gamma(n+1, x)$$

$$D_n(1) = 2f_0 \begin{bmatrix} 1 & -n \\ - & ; -1 \end{bmatrix} = \lfloor en! \rfloor$$

$$D_n(-1) = 2f_0 \begin{bmatrix} 1 & -n \\ - & ; -1 \end{bmatrix} = (-1)^n \lfloor \frac{n!+1}{e} \rfloor$$

$$1f_1 \begin{bmatrix} n+1 & \\ n+2 & ; -x \end{bmatrix} = \frac{(n+1)(n! - e^{-x}D_n(x))}{x^{n+1}}$$

مقدار تابع پریش $D_n(x)$ در $x = -1$ همان مقدار عدد پریش است در $x = 1$:

$$D_n(1) = \lfloor en! \rfloor \quad (n \geq 1)$$

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-t} t^n dt = e \lfloor \frac{n! + 1}{e} \rfloor$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t} t^n dt = n!$$

$$\int_{1}^{\infty} e^{-t} t^n dt = \frac{\lfloor en! \rfloor}{e}$$

$$\int_{1}^{\infty} e^{-t} t^n dt = \frac{\{en!\}}{e}$$

$$\int_{-1}^{0} e^{-t} t^n dt = \begin{cases} -e\{\frac{n!}{e}\} & n \; is \; odd \\ e - e\{\frac{n!}{e}\} & n \; is \; even \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-t} t^n dt = e \lfloor (e + e^{-1}) n! \rfloor - (e + e^{-1}) \lfloor en! \rfloor$$

$$a_n = !(n+1) + !n = !(n+2)/(n+1) \;,\; a_0 \;,\; a_1 = 1$$

$$a_n = n a_{n-1} + (n-1) a_n - 2$$

!n	١	٠	١	٢	٩	٤٤	٢٦٥	١٨٥٤	١٤٨٣٣	١٣٣٤٩٦	١٣٣٤٩٦١
N	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
a_n	١	١	٣	١١	٥٣	٣٠٩	٢١١٩	١٦٦٨٧	١٤٨٣٢٩	١٤٦٨٤٥٧	١٦٠١٩٥٣١

$$!n = (n-1)a_{n-2}$$

$$G_{!N}(X) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} !n x^n = \frac{1}{x}\frac{Ei(1+1/x)}{e^{1+1/x}}$$

$$E_{!n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} !n \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n!}{!n} = e$$

اثبات:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\ ,\ e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\ ,\ e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n!}{!n} = lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}} = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}} = \frac{1}{1/e} = e$$

$$lim_{n\to\infty} = \frac{a_n}{d_n} = e^2$$

$$lim_{n\to\infty} = \sqrt{a_n}d_n = n!$$

$$f_n = n! - !n = n! - n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

مسئله

فرض کنید C_n تعداد جای گشت هایی از اعداد $1, 2, \ldots, n$ باشد که به ازای هیچ $1 \leq i < n$ ، عدد $i+1$ بلافاصله بعد از عدد i نیامده باشد.

۱. یک فرمول برای C_n بیابید.

۲. ثابت کنید:

$$C_n = D_n + D_{n-1}$$

اثبات:

$$D_n = n! - (1^n)(n-1)! + (2^n)(n-2)! - (3^n)(n-3)!$$

$$D_{n-1} = (n-1)! - (1^{n-1})(n-2)! + (2^{n-1})(n-3) - (3^{n-1})(n-4)!$$

استفاده از عدد پریش

$$n! - (1^{n-1})(n-1)! + ((2)^n - (1)^n)(n-2)!$$

$$(i^n) = (i - 1^{n-1}) + (i^{n-1}) \Rightarrow (i^n) - (i - 1^{n-1}) = (i^{n-1})$$

انتخاب i تا از n تا می دانیم برابر (i^n) است از طرفی دیگر می توانیم n امین را انتخاب کنیم و از $(n-1)$ باقیمانده $i-1$ را انتخاب کنیم یا هر i تا را از $(n-1)$ دیگر انتخاب کنیم

$$D_n + D_{n-1} = n! - ((1^n) - (0^{n-1}))(n-1)! + ((2)^n - (1^{n-1}))(n-2)!$$

$$= n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)((i^n) - (i - 1^{n-1}))(n-i)! = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1^i)((i^{n-1})(n-1))! = Qn$$

$$Qn = D_n + D_{n-1}$$

فصل ۴
ارتباطی چند با عدد نپر

عدد e (عدد نپر) ، یک عدد ثابت گنگ است و تقریبن برابر با ۲/۱۷ می باشد. در ریاضیات ثایت می شود به ازای هر عدد حقیقی x :

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

از طرفی با قرار دادن $x = -1$ داریم:

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

به شباهت مقدار $\frac{1}{e}$ با عبارت $(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (1)^n \frac{1}{n!})$ که در فرمول D_n تأثیر داشت، دقت کنید. در بسط نوشته شده در بالا برای $\frac{1}{e}$ جملات هر چه جلوتر می روند کوچک تر می شوند و تأثیرشان کمتر می شود. پس می توان نتیجه گرفت:

$$D_n \approx \frac{n!}{e}$$

برای محاسبه ی دقیق D_n با استفاده از e ، ثابت می شود که D_n برابر نزدیک ترین عدد صحیح به $\frac{n!}{e}$ است. هم چنین ثابت می شود:

$$D_n = [\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}]$$

پس یک فرمول بسته نیز برای e به دست آمد.

حال سراغ نکته ای دیگر می رویم. می خوایم احتمال آن که یک جای گشت، پریش باشد را محاسبه کنیم به وضوح این احتمال برابر است با:

$$P = \frac{D_n}{n!}$$

؟

فرض کنید n به حد کافی بزرگ باشدو به ∞ میل کند پس:

$$p = lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{n! \times \frac{1}{e}}{n!} = \frac{1}{e}$$

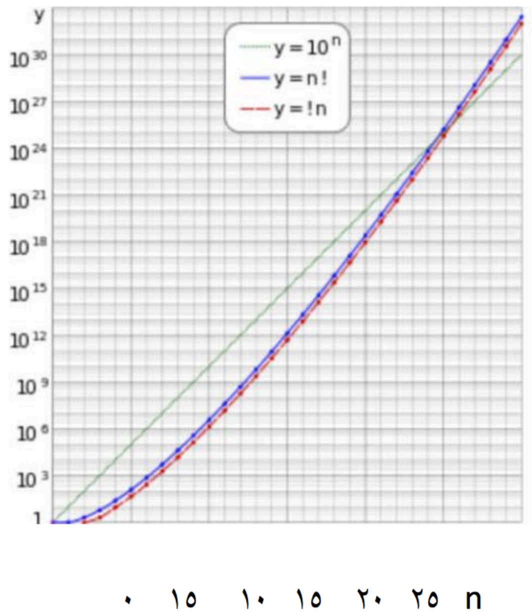
پس اگر؟ به حد کافی بزرگ باشد، از حدود هر ۳ جای گشت تصادفی، یکی از آن ها پریش است! البته باز هم به دلیل کوچک شدن جملات در سری دنباله، در n های کوچک نیز این امر مشاهده می شود.

در نمودار زیر می توانید نحوه ی رشد D_n با رشد n را ببینید:

برای $D_{n,k}$ نیز می توان ثابت کرد:

$$D_{n,k} \approx \frac{n!}{e^{\frac{k}{n}}}$$

$$lim_{n\to\infty} \frac{D_{n,k}}{n!} = e^{-\frac{k}{n}}$$



۱.۴ بررسی عدد پریش از طریق نظریه گراف

$$X = \{1, 2, \ldots, n\}$$

S_n گروه متقارن از جایگشت ها است

$$D_n := \{\sigma \in S_n : \sigma(x) \neq x, \forall x \in X\}$$

ما یک گروه متناهی مانند G داریم و $s \subseteq G$ یک مجموعه متقارن که $s \in S \Rightarrow S^{-1} \in$ S گراف کیلی گاما G ، $\Gamma(G, S)$ رئوسش اعضای G هستن و دو راس های المان متناظر با دو عضو $u, v \in G$ به هم متصل هستند اگر $uv^{-1} = S$ واضح است که $\Gamma(G, S)$ چون هر یال معرف یک عضو از S هست بنابراین تعداد یال های این گراف برابر $|S|$ می باشد.

$\Gamma_n := \Gamma(S_n, D_n)$ تعریف می شود گراف پریش روی $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ می نامیم

اطلاعات بیشتر در مورد این گراف:

Γ_n برای $(n > 3)$ همبند می باشد زیرا هر جایگشت می تواند نوشته شود زیرا می توان نوشت هر جایگشت را با ترانش $(k, k+1)$ فراهم کنیم.

$$(1, 2, \ldots, n)^2$$

و

$$(n, n-1, \ldots, 1)^2(k, k+1)$$

با ترانش های مجاور $(k, x+1)$ تولید می شود که هر تراشش $(x, x+1)$ با ترکیب دو تا جایگشت بریش $\delta_1 = (1, 2, \ldots, n)U^2$ و $\delta_2 = (n, n-1, \ldots, 1)^2(x, x+1)$ بیان می شود

δ_1 و δ_2 اعضای D_n می باشند و برای $n \geq 3$ لزوماً δ_1, δ_2 عضو D_n نمی باشندکه این ما را به این می رساند که r_n نتیجه می دهد که r_n همبند می باشد.

r_n یک گراف همیلتنی می باشد اولین بار مشاهده شده توسط $\alpha(r_n) = (n-1)!$ که α همان عدد استقلال نیز هست.

تعریف همیلتنی: یک گراف با دور همیلتونی را گراف همیلتونی می نامیم.

مجموعه مستقل : یک مجموعه ی مستقل گراف G ، زیر مجموعه ای مانند S از $V(G)$ است به طوری که هیچ دو رأس آن در G مجاور نیستند.

$\omega(r_n) = n$ ، که ω نیز clique-number نامیده می شود زیرا max-clique-number می باشد. در Γ_n فقط یک مربع لاتین از سایز n است.

clique یک رأسی در واقع همان تعداد رأس های گراف می باشد

clique دو رأسی تعداد یال ها نیز می باشد.

$\chi(\Gamma_n) = n$ جایی که X هست عدد رنگی گراف است $\chi(\Gamma) = \omega(\Gamma)$

عدد رنگی گراف: طوری رئوس گراف را رنگ آمیزی نماییم که رئوس مجاور همرنگ نباشد.

$X(G)$ عدد رنگی کامل: یک گراف است که برابر حداقل تعداد رنگ های زم برای رنگ آمیزی کامل یک گراف G است

با این شرایط اولا این که مجموعه رئوس T متناظر باشند با رئوس و یال های G و دوما این که دو رأس در T مجاور هستن اگر و فقط اگر عناصر متناظر آنها در G یا متناظر باشند یا متلاقی باشند.

Cayley گفته گراف $\Gamma(G, S)$ نرمال است Godsilshows نشان داد برای هر گراف Cayley نرمال اگر $\alpha(\Gamma) = \omega(\Gamma)$

اگر $x(\Gamma) = \omega(\Gamma)$ آنگاه $|\upsilon(\Gamma)| =$

$|\upsilon(\Gamma)|$ تعداد رئوس گاما که ما رو به نتیجه می رساند. چون

$$\omega(\Gamma) = n$$

$$\alpha(\Gamma) = (n-1)!$$

$$X(\Gamma) = \omega(\Gamma) = n$$

پس $|\upsilon(\Gamma) = n!|$

برای هر گراف از درجه ی k و μ رأس عدد استقلال در نامساوی Delsarte-Hoffman صدق می کند

$$\alpha \leq N\frac{-\eta}{k-\eta}$$

جایی که n هست کمترین مقدار ویژه ماتریس مجاورت گراف حال برای گراف پریش

$$N = n!$$

$$\alpha = (n-1)! \quad k = D_n := |\sigma_n|$$

با جایگذاری در نامساوی با :

$$n \leq \frac{-D_n}{n-1}$$

کمترین مقدار ویژه از ماتریس مجاورت در یک گران پریش برابر است با

$$\eta \leq \frac{-D_n}{n-1}$$

$$\eta = \frac{-D_n}{n-1}$$

فهرست منابع

[1] Mehdihassani.DerangementsandApplications(htt://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL6/Hassani/hassani5.htm1).Journal of Integer Sequences. 6(1).Article 03.1.2.2003.

[2] Weisstein.Eric W.(htt://matheworld .wolfram.com/about/author .html).Derangement (http://mathworld.wolfram.com/Derangement.html).from

[3] Mathe World—A Wolfram Web Resource. [htt://mathworld.wolfram.com/Derangement.html).as of 2010-12-19

[4] Weissin.Eric W .(htt://matheworld.wolfram.com/about/author.html) .Subfactorial(htt://matheworld .wolfram.com /Subfactorial .html).from

[5] Retrieved from http://oeis.org/wiki/Number-of-derangements

[6] Categories: Articles needing more work |Number of –derangements

[7] This page was last modified on 19 November 2014 .at 23:29.

[8] Content is available under The OEIS End-User License Agreement.

[9] L. Babai, ”Spectra of Cayley Graphs”, J. Comb. Th. B 27 (1979), 180-189.

[10] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, 2nd Edition (Cambridge University Press, Cam-bridge, .(1993

[11] P.J. Cameron and C.Y. Ku, ”Intersecting Families of Permutations”, Eur. J. Comb. 24 (2003), .881-890

[12] W.Y.C. Chen and J.D. Louck, ”The Factorial Schur Function”, J. Math. Phys. 34 (1993), 4144-.4160

[13] M. Deza and P. Frankl, ”On the Maximum Number of Permutations with Given Maximal or Minimal Distance”, J. Combin. Th. A 22 (1977), 352-360.

[14] P. Diaconis and M. Shahshahani, ”Generating a Random Permutation with Random Transpositions”, Zeit. für Wahrscheinlichkeitstheorie 57 (1981), 159-179.

[15] R.B. Eggleton and W.D. Wallis, "Problem 86: Solution I", Math. Mag. 58 (1985), 112-113

[16] C. Godsil, "Interesting Graphs and Their Colourings", April 3, 2006 version, unpub-lished lecture notes available at http://quoll.uwaterloo.ca/pstu /colours.pdf.

[17] C. Godsil and K. Meagher, "A New Proof of the Erdós-Ko-Rado The-orem for Intersecting Families of Permutations", preprint available at http://front.math.ucdavis.edu/0710.2109.

[18] D. Goldschmidt, Group Characters, Symmetric Functions, and the Hecke Algebra (American Mathematical Society, Providence, 1993).

[19] C. Ku and T. Wong, "Intersecting Families in the Alternating Group and Direct Product of Symmetric Groups", Elect. J. Combin. 14(1) (2007), #R25.