دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پروژه ی کارشناسی

رشته:

علوم کامپیوتر

عنوان:

نظریه‌ی گره‌ها و چندجمله‌ای جونز

نگارش:

وحید شمس‌الدینی

استاد پروژه:

دکتر علی کمالی‌نژاد

تیر ماه ۱۳۹۸

چکیده

یک گره نشاندنی هموار از دایرهیدر فضای اقلیدسی سه بعدیاست. نظریه‌ی گره‌ها، مطالعه‌ی رده‌ی هم‌ارزی گره‌ها در حد ایزوتوپی هموار محیطی است. تحت شرایطی، با تصویر کردن روی یک صفحه، دیاگرامی برای یک گره به دست می‌آید. هر گره میتواند دیاگرام‌های متفاوتی داشته باشد. در نظریه‌ی گره‌ها تشخیص اینکه دو دیاگرام متفاوت، مربوط به یک گره هستند یا خیر اهمیت پیدا میکند.

ناورداهایی وجود دارند که برحسب دیاگرام یک گره قابل محاسبه هستند. یکی از این ناورداها چندجمله‌ای جونز است. یکی از اهداف ما در این پروژه بررسی برخی از ناورداهای گره‌ها، به خصوص چندجمله‌ای جونز است. از دیگر ناورداهای مهم در بررسی گره‌ها، میتوان به عدد کراسینگ اشاره کرد که ارتباط نزدیکی با عدد کراسینگ در گراف‌ها دارد. در ادامه‌ی این پروژه،رابطه‌ی این دو ناوردا را مطالعه خواهیم کرد که یکی مربوط به گره‌ها و دیگری مربوط به گراف‌هاست و همچنین تلاش می‌کنیم تا ارتباط بین عدد کراسینگ در نظریه‌ی گره‌ها و ناورداهای ترکیبیاتی دیگری مانند عدد رنگی گراف‌ها را مطالعه کنیم. این گزارش، گزارشی از مراحل اولیه‌ی این پروژه است. که در اولین فصل آن مقدمات هندسه و توپولوژی مورد نیاز را بیان کرده‌ایم. سپس در فصل بعد معرفی گره‌ها را آغاز می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۰

مقدماتی از توپولوژی و هندسه‌ی مورد نیاز

۱.۰ تعاریف اولیه

اگر دقت کافی را در تعریف علم توپولوژی کنار بگذاریم، میتوان گفت توپولوژی به بررسی برخی از خواص هندسی که تحت تغییرات پیوسته ناوردا هستند، میپردازد. منظورمان از این شبه‌تعریف به مرور روشن تر خواهد شد. اولین تعریف مورد نیاز برای ورود به این مبحث تعریف فضای توپولوژیک است:

تعریف ۱. فرض کنید X یک مجموعه و τ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد(که اعضای آن را زیر مجموعه‌های باز مینامیم) اگر:

- $X, \emptyset \in \tau$
- اجتماع اعضای هر زیرمجموعه‌ی دلخواه τ عضوی از τ باشد.
- اشتراک اعضای هر زیرمجموعه‌ی متناهی دلخواه τ عضوی از τ باشد.

آنگاه زوج مرتب (X, τ) را فضای توپولوژیک مینامیم.

چند مثال از فضای توپولوژیک را بررسی میکنیم.

مثال ۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $\tau = ۲^X$ [1] باشد. آنگاه به سادگی میتوان دید که زوج مرتب (X, τ) در شروط تعریف ۱ صدق میکند و یک فضای توپولوژیک است.

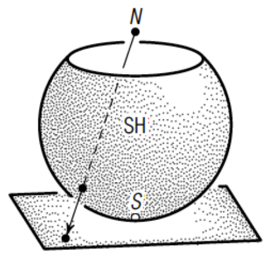
در یک فضای توپولوژیک مجموعه‌هایی که مکمل یک مجموعه‌ی باز باشند را مجموعه‌ای بسته مینامیم. همچنین کوچکترین مجموعه‌ی بسته‌ی شامل A را بستار A گوییم.

مثال ۲. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشند. میخواهیم با مشخص کردن مجموعه‌های باز، توپولوژی‌ای روی X تعریف کنیم؛ $A \subset X$ را باز گوییم هر گاه برای هر $a \in A$ یک عدد مثبت حقیقی r موجود باشد که گوی باز حول a و به شعاع r زیرمجموعه‌ی A باشد.(یعنی $B_r(a) \subset A$). اگر τ خانواده‌ی مجموعه‌های باز در فضای متریک X باشد، آنگاه (X, τ) فضای توپولوژیک است.

اثبات. از آنجا که مجموعه‌ی تهی عضوی ندارد به انتفاع مقدم، طبق تعریف بیان شده باز است. همچنین از آنجا که هر گوی باز به کلی زیرمجموعه‌ی X است، X نیز باز است. فرض کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای دلخواه از مجموعه‌های باز در فضای متریک X باشد. نشان میدهیم $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ نیز باز است. برای هر $a \in \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ میدانیم $\beta \in I$ به نحوی موجود است که $a \in A_\beta$. از باز بودن A_β نتیجه می‌شود که یک عدد مثبت حقیقی مانند r به نحوی موجود است که $B_r(a) \subset A_\beta$ و در نتیجه $B_r(a) \subset \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$. بدین ترتیب باز بودن مجموعه‌ی $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ثابت میشود. کافی است نشان دهیم برای هر $I = \{۱, ۲, ..., n\}$ متناهی و خانواده‌ی $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از مجموعه‌های باز فضای متریک، $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha$ نیز باز است. برای اثبات این مطلب فرض کنید $a \in \cap_{\alpha \in I} A_\alpha$ باشد. از آنجا که همه‌ی اعضای این خانواده باز اند، برای هر $۱ \leq i \leq n$ عدد حقیقی مثبتی مانند r_i موجود است که $B_{r_i}(a) \subset A_i$. قرار دهید $r = min_{۱ \leq i \leq n} r_i$ آنگاه به وضوح برای هر $۱ \leq i \leq n$ داریم $B_r(a) \subset A_i$ و در نتیجه $B_r(a) \cap_{\alpha \in I} A_\alpha$ که این باز بودن مجموعه‌ی $\cap_{\alpha \in I} A_\alpha$ را نتیجه میدهد. □

مثال بالا نشان میدهد که هر فضای متریک یک فضای توپولوژیک القا میکند. در آنالیز دیده‌ایم هر مجموعه‌ی باز را میتوان به صورت اجتماع چند گوی باز نوشت. این حقیقت باعث میشود تا بتوانیم جور دیگری نیز مجموعه‌های باز توپولوژی القا شده از فضای متریک را تعریف کنیم: مجموعه های باز توپولوژی القا شده از یک متر، به صورت اجتماع خانواده‌ای از گوی های باز آن هستند. این توصیف از فضاهای توپولوژیک گاهی کار را ساده تر میکند. تعریف زیر ابزار این نوع بیان را فراهم کرده‌است.

[1] منظور از ۲^X مجموعه‌ی توانی X میباشد.



شکل ۱: یکسان ریختی کره‌ی سوراخ و صفحه

تعریف ۲. خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های باز فضای توپولوژیک (X,τ) مانند $\{A_\alpha\}$ را پایه‌ای برای این فضا گوییم هر گاه هر مجموعه‌ی باز را بتوان به صورت اجتماع اعضای زیرخانواده‌ای از این خانواده نوشت.

همان طور که در مثال فضاهای متریک دیدیم، گاهی اوقات راحت تر است فضای توپولوژیک را با پایه‌هایش معرفی کنیم.

تعریف ۳. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. تابع $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گوییم هرگاه تصویر وارون هر مجموعه‌ی باز در Y تحت تابع f باز باشد.

میتوان به راحتی مشاهده کرد که در فضای اقلیدسی این تعریف معادل با تعریفی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال ارائه میشود. این توابع ویژگی های مهمی از مجموعه‌ی مبدا را حفظ میکنند که در توپولوژی به بررسی این ویژگی ها میپردازیم.
فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و Y زیر مجموعه‌ای از آن، اگر همه‌ی مجموعه های باز در X را با Y اشتراک بگیریم به خانواده‌ای از مجموعه‌های باز برای Y میرسیم که این مجموعه را مجهز به یک توپولوژی میکند. این فضای توپولوژیک را فضای توپولوژی زیرفضایی گوییم.

تعریف ۴. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت دوسویی و پیوسته باشد که وارون آن نیز پیوسته است. در این صورت f را یک یکسان‌ریختی و X و Y را یکسان‌ریخت میگوییم.

مثلا یک کره با حذف یک نقطه با صفحه یکسان‌ریخت میشود.(با کمک شکل ۱ میتوانید یکسان‌ریختی مورد نظر را بیابید)

از آنجا که در نظریه‌ی گره‌ها علاوه بر توپولوژی به خواصی مربوط به متر اقلیدسی و اندکی هندسه نیز نیاز پیدا میکنیم در ادامه مطالب مورد نیاز از این دسته را بیان خواهیم کرد.

فرض کنید V یک زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^m$ و $v_۰$ عضوی دلخواه از $\mathbb{R}^m$ باشد. یک ابر صفحه [۲] را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$H = V + v_۰ = \{w | w = v + v_۰, v \in V\}$$

همچنین اگر بعد Vبرابر باk باشد، H را ابر صفحه‌ی k بعدی مینامیم. تعریف زیر نقش اساسی‌ای در ادامه ایفا خواهد کرد:

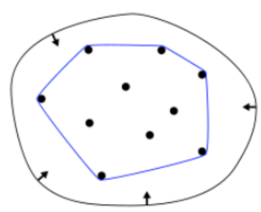
تعریف ۵. گوییم مجموعه‌ی $V \subset \mathbb{R}^m$ در وضعیت عمومی [۳] است اگر هیچ ابر صفحه‌ی kبعدی ($k < m$) شامل بیشتر از$k + ۱$ نقطه از اعضایVنباشد.

مثلا یک دایره را در صفحه‌ی اقلیدسی در نظر بگیرید. هر ابرصفحه‌ی یک بعدی(خط) حداکثر شامل دو نقطه از دایره است و هر ابر صفحه‌ی صفر بعدی(نقطه) شامل حداکثر یک نقطه از دایره است در نتیجه طبق تعریف بالا دایره در $\mathbb{R}^۲$ در وضعیت عمومی قرار دارد.

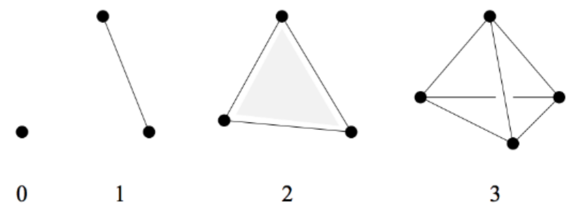
طبق معمول، مجموعه‌ی$X \subset \mathbb{R}^m$را محدب گوییم هرگاه برای هر جفت نقاط$u, w \in X$ مجموعه‌ی Xشامل مجموعه‌ی $\{\alpha u + \beta w | \alpha, \beta \geq ۰, \alpha + \beta = ۱\}$ باشد. به بیانی دیگر هر خط گذرنده از دو نقطه در مجموعه به طور کامل در مجموعه قرار گیرد.
فرض کنید$X \subset \mathbb{R}^m$، پوش محدب X را به صورت کوچکترین مجموعه ی محدب شامل X تعریف میکنیم. برای درک بیشتر در حالتی که مجموعه‌ی X متناهی باشد، فرض کنید مجموعه‌ی نقاط شما به صورت میخ‌هایی در دیوار قرار گرفته اند. پوش محدب این نقاط را میتوان به این صورت ساخت که کشی را باز کرد و دور این میخ‌ها انداخت.(به شکل ۲ دقت کنید!) تا به اینجای کار مقدمات تعریف یکی از مهم ترین ابزارهایمان فراهم شده، به سراغ تعریف سادک‌های n ـ بعدی میرویم:

تعریف ۶. مجموعه‌ی $V = \{v_۰, v_۱, ..., v_n\}$ را در وضعیت عمومی در $\mathbb{R}^m$ در نظر بگیرید.$(n \leq m)$ پوش محدب مجموعه‌ی V را سادک [۴] nـ بعدی مینامیم و با نماد $\sigma^n = v_۰ v_۱ ... v_n$ نمایش میدهیم.

[۲] hyperplane
[۳] general position
[۴] simplex



شکل ۲: پوش محدب چند نقطه‌ی مشخص



شکل ۳: سادک‌های ۰،۱،۲و۳ بعدی

همچنین اعضای V را راس هایσ^n میگوییم. اگر $W \subset V$ انگاه پوش محدب Wرا یک وجه V مینامیم.

در شکل ۳ نمونه‌ای از سادک‌ها آمده است.

تعریف ۷. منظور از یک مجتمع اقلیدسی [۵] گردایه ای از سادک ها در فضای $\mathbb{R}^m$مانند K است که دارای خواص زیر اند:

- همه‌ی وجوه اعضای K در K هستند.
- اگر $\sigma, \tau \in K$ و $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ آنگاه $\sigma \cap \tau \in K$
- هر عضوK مشمول مجموعه‌ای باز باشد که این مجموعه با متناهی تا از اعضای K اشتراک داشته باشد.

رئوس سادک‌های K را راس‌های K می‌گوییم. برای هر i از اعداد طبیعی i ـ‌پیکر بندی [۶] برای مجتمع اقلیدسی K ،همه‌ی سادک‌های آن که بعد کمتر یا مساوی i دارند تعریف میکنیم. منظورمان از $|K|$

[۵] euclidean complex
[۶] i-skeleton

اجتماع تمام اعضای K است که با توپولوژی زیرفضایی اقلیدسی مجهز شده‌است.

تعریف ۸. فرض کنید K و L دو مجتمع اقلیدسی باشند و هر عضو K زیرمجموعه‌ی عضوی از L باشد و $|K| = |L|$ ، در این صورت L را زیر تقسیمی از K مینامیم.

اکنون برای فراهم آوردن مقدمات تعریف "معادل بودن دو پیوند" که در فصول بعدی آن را بیان می‌کنیم، تعریفی از تابع قطعه‌قطعه خطی ارائه می‌کنیم:

تعریف ۹. فرض کنید L و K دو متجمع اقلیدسی باشند و تابع $f : |K| \longrightarrow |L|$ مفروض باشد. گوییم f قطعه قطعه خطی [۷] است هر گاه یک زیر تقسیمی از K مانند K' وجود داشته باشد که تحدید f به همه ی اعضای K' خطی باشد.

۲.۰ گروه‌های بنیادی

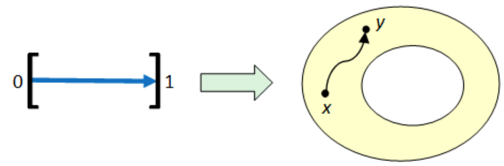
اساسا در موضوعات متفاوت ریاضی با نوع خاصی از اشیا و همچنین نگاشت‌های بین آن‌ها(نگاشت‌هایی که ویژگی‌هایی مشخص را ثابت نگه میدارند) سر و کار داریم. مثلا در توپولوژی اشکال و نگاشت های پیوسته‌ی بین آن‌ها برایمان اهمیت زیادی دارد. اما از آنجا که بررسی و دسته‌بندی اشکال توپولوژی اغلب با سختی‌های زیادی روبرو میشود، یک راه برای ساده تر کردن طبقه‌بندی اشکال هندسی، متناظر کردن آن‌ها به اشیا جبری مانند گروه‌ها است. یکی از راه‌های متناظر کردن گروه‌ها به اشکال هندسی «گروه بنیادی» است. در این بخش ابتدا تعریف گروه‌های بنیادی را بیان میکنیم و سپس به برخی از ویژگی‌ها و کاربردهای این گروه‌ها اشاره خواهیم کرد.

ابتدا به سراغ تعریف مسیر در یک فضا [۸] میرویم:

تعریف ۱۰. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع پیوسته‌ی $P : [۰,۱] \longrightarrow X$ را یک مسیر از $P(۰)$ به $P(۱)$ میگوییم.

مثلا در شکل ۴ ،یک مسیر از x به y که تصویر پیوسته‌ی بازه $[۰,۱]$ است را میبینید. برای مسیر $P(t)$ میتوان t را به مانند زمان در نظر گرفت و $P(t)$ مکان را در زمان t نشان می‌دهد.

[۷] piecewise linear
[۸] از این به بعد منظورمان از فضا،فضای توپولوژیک است



شکل ۴: یک مسیر از x به y

سوالی اساسی باقی مانده است. چه زمان دو مسیر را هم‌ارز(یکی) بگیریم؟ برای جواب دادن به این سوال از مفهومی به‌نام هموتوپی استفاده خواهیم‌کرد:

تعریف ۱۱. دو نگاشت [۹] $f,g : X \longrightarrow Y$ را هموتوپ گوییم هرگاه نگاشت $F : X\times[۰,۱] \longrightarrow Y$ به نحوی موجود باشد که: $F(x,۰) = f(x)$ و $F(x,۱) = g(x)$ ، اگر به جای $F(x,t)$ بنویسیم $F_t(x)$ میتوانیم تعریفمان را به این صورت بیان کنیم که: خانواده‌ای از نگاشت‌ها مانند $\{F_t(x)\}_{t\in[۰,۱]}$ وجود دارد که به صورت پیوسته از $F_۰ = f$ به $F_۱ = g$ تغییر میکند. در این صورت هم‌ارزی دو تابع را با علامت $f \sim g$ نشان می‌دهیم.

میتوان نشان داد که رابطه‌ی هموتوپی روی نگاشت ها، دارای خواص هم‌ارزی است. در واقع دو مسیر را هم‌ارز میگیریم هرگاه هموتوپ باشند.

حال مایلیم تا به نحوی عمل ضرب روی کلاس‌های هم‌ارزی (برخی از)مسیرهای یک فضا تعریف کنیم تا به تشکیل یک گروه منجر شود.

تعریف ۱۲. فرض کنید دو مسیر مانند f و g موجود باشند که نقطه‌ی پایانی f با نقطه‌ی آغازین g یکی باشد. حاصلضرب این دو مسیر(کلاس هم‌ارزی این دو مسیر) را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$f * g = \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leqslant t \leqslant \frac{۱}{۲} \\ g(۲t-۱) & \frac{۱}{۲} \leqslant t \leqslant ۱ \end{cases}$$

در واقع میتوان این حاصلضرب را اینگونه تعبیر کرد که ابتدا مسیر اولی را میپیماییم و سپس مسیر دوم. حال فرض کنید نقطه‌ای مانند x از فضای X مفروض است.

[۹] از این به بعد منظورمان از نگاشت، نگاشتی پیوسته است

برای آنکه بتوانیم با استفاده از عمل تعریف شده گروه تعریف کنیم مسیر زیر را در پیش میگیریم.
حاصلضرب تعریف شده روی کلاس‌های هم‌ارزی مسیرها خوش‌تعریف است.

اثبات. فرض کنید $f_0 \sim f_1$ و $g_0 \sim g_1$ چهار مسیر باشند که $f_0(1) \sim g_0(0)$ و $f_1(1) \sim g_0(0)$ در این صورت برای اثبات حکم فوق کافی است ثابت کنیم: $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$. برای این منظور فرض کنید تابع پیوسته‌ای که $f_0 \sim f_1$ را نتیجه داده F باشد و تابعی که $g_0 \sim g_1$ را نتیجه داده G باشد، حال تابع $H : I \times I \longrightarrow X$ با ضابطه‌ی زیر $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ را نتیجه می‌دهد:

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t, s) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2t-1, s) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

$\square$

قضیه ۱. حاصلضرب مسیرها شرکت پذیر است.

اثبات. فرض کنید f، gو h سه مسیر در فضای X باشند که $f(1) = g(0)$ و $g(1) = h(0)$ کافی است نشان دهیم: $(f * g) * h \sim f * (g * h)$. تابع $F : I \times I \longrightarrow X$ با ضابطه‌ی زیر هموتوپی مورد نظر را نتیجه می‌دهد:

$$F(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{1+s}) & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t - s - 1) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\square$

اما برای شناسایی عضو خنثی و وارون هر مسیر کار چندان مشکلی نداریم. همان طور که انتظار میرود تابع ثابت x در هر مسیر بسته با سر و ته x (از هر طرف)ضرب شود خود مسیر را تولید میکند.
همچنین برای هر مسیر مانند $p(t)$ که سر و ته یکسانی دارد میتوان دید $\bar{p} = p(1-t)$ وارون آن است.
پس اگر مسیرهای بسته از یک نقطه‌ی خاص را در نظر بگیریم میتوانیم یک گروه داشته باشیم:

قضیه ۲. $\pi(X,x)$ مجموعه‌ی تمام کلاس های هم ارزی مسیرهای بسته از x است. این مجموعه با عمل تعریف شده تشکیل یک گروه میدهد که آن را گروه بنیادی X در نقطه‌ی x مینامیم.

اثبات. با توجه به لم‌های قبلی واضح است. $\square$

حال نوبت به جواب دادن به این سوال میرسد که «چه موقع برایمان اهمیتی ندارد که در کدام نقطه گروه بنیادی را محاسبه می‌کنیم؟». برای جواب دادن به این سوال ابتدا تعریف فضاهای همبند مسیری را بیان و سپس ثابت میکنیم در فضاهای همبند مسیری محاسبه‌ی گروه بنیادی ربطی به انتخاب نقطه ندارد.

تعریف ۱۳. اگر برای هر دو نقطه‌ی دلخواه از فضای X مسیری بین آن دو نقطه در X موجود باشد، X را همبند مسیری میگوییم.

قضیه ۳. فرض کنید Xهمبند مسیری باشد و $x,y \in X$ آنگاه:

$$\pi(X,x) \simeq \pi(X,y)$$

اثبات. فرض کنیدfمسیری از xبه yباشد. اگر g مسیر بسته‌ای با دو سر x باشد، آنگاه $(\bar{f} * g) * f$ مسیری بسته با دو سرyخواهد بود. بنابراین نگاشت $\phi_f : \pi(X,x) \longrightarrow \pi(X,y)$ را با ضابطه‌ی $\phi_f([g]) := [f]^{-1}[g][f]$ تعریف میکنیم. ثابت می‌کنیم ϕ_f یکریختی گروه‌ها است. داریم:

$$\phi_f([g][h]) = \phi_f([g*h]) = [\bar{f}][g*h][f] = [\bar{f}][g][h][f] = [\bar{f}][g][f][\bar{f}][h][f] = \phi_f([g])\phi_f([h])$$

در نتیجه ϕ_f همریختی گروه‌ها است. به راحتی میتوان دید که $\phi_f o \phi_{\bar{f}}$ همانی است، در نتیجه ϕ_f دوسویی است و حکم ثابت می‌شود. $\square$

اکنون زمان بررسی تاثیر نگاشت‌های پیوسته بر گروه‌های بنیادی است. قضیه‌ی زیر را بدون اثبات بیان میکنیم.

قضیه ۴. فرض کنید $\phi : X \longrightarrow Y$ نگاشتی پیوسته باشد، آنگاه:

- اگر f مسیری درX باشد آنگاه $\phi o f$ مسیری در y است.
- اگر $f \sim g$ دو مسیر باشند، انگاه $\phi o f \sim \phi o g$

از قضیه‌ی بالا میتوانیم استفاده کنیم و تعریف زیر را ارائه دهیم:

تعریف ۱۴. با توجه به قضیه‌ی بالا، فرض کنید $[f] \in \pi(X,x)$ باشد. آنگاه $[\phi o f]$ خوش‌تعریف و متعلق به $\pi(Y,\phi(x))$ میباشد. بنابر این نگاشت $\phi_* : \pi(X,x) \longrightarrow \pi(Y,\phi(x))$ را با ضابطه‌ی $\phi_*([f]) := [\phi o f]$ تعریف میکنیم و آن را نگاشت القایی توسط ϕ می‌نامیم.

میتوان بررسی کرد که نگاشت‌های الحاقی همریختی گروهی هستند و اگر تابع ϕ یکسان ریختی باشد، آنگاه تابع القایی یکریختی است.

مثال ۳. $\pi(\mathbb{R}) = ۰$

اثبات. نقطه‌ی دلخواه x را در $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.ثابت میکنیم هر مسیر بسته با دو انتهایx باهم هم‌ارز اند. فرض کنید $f,g \in \pi(\mathbb{R},x)$ حال تابع $F(t,s) = tf(s) + (۱-t)g(s)$ هموتوپی مورد نظر را ارائه می‌دهد.(دقت کنید در اینجا از محدب بودن یک خط به نوعی بهره برده‌ایم.) در نتیجه از آنجا که تمام مسیرها باهم هموتوپ اند، تمام آن‌ها با کلاس هم ارزی مسیر ثابت هموتوپ اند و نتیجه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید. □

در مثال قبل به سادگی توانستیم گروه بنیادی خط را پیدا کنیم، اما همیشه پیدا کردن گروه‌های بنیادی آسان نخواهد بود. در ادامه به معرفی فضاهای پوششی میپردازیم و از آن برای پیدا کردن برخی از گروه‌های بنیادی استفاده خواهیم کرد. همچنین بعد از معرفی گره‌ها به محاسبه‌ی گروه بنیادی مکمل چند گره خواهیم پرداخت.

۳.۰ فضاهای پوششی

همان طور که در بخش قبلی اشاره کردیم، محاسبه‌ی گروه‌های بنیادی همواره آسان نخواهدبود. در این بخش ابزار دیگری را معرفی می‌کنیم تا به وسیله‌ی آن بتوانیم برخی از گروه‌های بنیادی را محاسبه کنیم. ابتدا «فضاهای پوششی» را تعریف کرده و سپس ویژگی‌های آن‌ها را بیان می‌کنیم. در آخر چند مثال از کاربرد فضاهای پوششی برای محاسبه‌ی گروه‌های بنیادی خواهیم آورد.

تعریف ۱۵. فضای X مفروض است. اگر فضای $\tilde{X}$ و تابع پوشای $\mathrm{P} : \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ به نحوی موجود باشند که: برای هر نقطه‌ی $x \in X$ یک همسایگی باز از آن مانند $U \subseteq X$ به نحوی موجود باشد که: $P^{-۱}(U)$

اجتماع بازهای مجزای یکسان‌ریخت با U باشند و تحدید P به این مجموعه‌های باز یکسان‌ریختی آن‌ها با U باشد؛ $\tilde{X}$ و P را فضای پوششی برای X می‌گوییم. (در این تعریف P را یک پوشش می‌نامیم.)

مثال ۴. $\mathbb{R}$ به همراه $P : \mathbb{R} \to \mathrm{S}^1$ با ضابطه‌ی $P(x) = \mathrm{e}^{2\pi i}$ یک فضای پوششی برای S^1 است.

مثال ۵. فرض کنید B یک فضا و F یک فضای گسسته باشد، آنگاه $\mathrm{Pr_B} : \mathrm{B} \times \mathrm{F} \to B$ یک پوشش است.

تعریف ۱۶. فرض کنید نگاشت $\mathrm{P} : \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ پوششی باشد و نگاشت $\mathrm{f} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ مفروض باشد، منظور از ترفیع f یک تابع مانند $\tilde{\mathrm{f}} : \mathrm{Y} \to \tilde{\mathrm{X}}$ است که:

$$\mathrm{po\tilde{f} = f}$$

در قضیه‌ی بعدی ثابت می‌کنیم ترفیع در صورت وجود یکتاست.

قضیه ۵. فرض کنید نگاشت $\mathrm{P} : \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ پوششی باشد. اگر
$\mathrm{f_1}$و$\mathrm{f_2} : \mathrm{Y} \to \tilde{\mathrm{X}}$ ترفیع‌های نگاشت $\mathrm{f} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ باشند، Y همبند باشد و به ازای یک $\mathrm{y_0} \in \mathrm{Y}$ داشته باشیم $\mathrm{f_1(y_0) = f_2(y_0)}$ آنگاه $\mathrm{f_1 = f_2}$

اثبات. مجموعه‌ی $\mathrm{Y' := \{y \in Y : f_1(y) = f_2(y)\}}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $\mathrm{y_0 \in Y'}$، $\mathrm{Y'}$ تهی نیست. کافی است ثابت کنیم $\mathrm{Y'}$ هم باز و هم بسته است تا از همبندی Y نتیجه بگیریم $\mathrm{Y' = Y}$
فرض کنید $\mathrm{y \in Y}$، در این صورت همسایگی باز V از $\mathrm{f(y)}$ به نحوی وجود دارد که $\mathrm{P^{-1}(V)}$ اجتماعی مجزا از مجموعه‌های باز مانند $\mathrm{\{V_j\}_{j \in J}}$ ها است که $\mathrm{P|_{V_j} : V_j \to V}$ یکسان‌ریختی باشد. اگر $\mathrm{y \in Y'}$، آنگاه برای یک $\mathrm{k \in J}$، $\mathrm{V_k \ni f_1(y) = f_2(y)}$ و $\mathrm{W_k = f_2^{-1}(V_k) \cap f_1^{-1}(V_k)}$ همسایگی بازی از y می‌باشد که تماما در $\mathrm{y'}$ قرار دارد. برای مشاهده‌ی این مطلب فرض کنید $\mathrm{x \in W_k}$، در این صورت $\mathrm{P|_{V_k}}$ ،$\mathrm{p(f_1(x)) = f(x) = p(f_2(x))}$ درحالی‌که $\mathrm{f_2(x) \in V_k}$:و $\mathrm{f_1 \in V_k}$ یکسان‌ریختی است. بنابراین الزاما $f_1(x) = f_2(x)$ و در نتیجه $\mathrm{x \in Y'}$. پس $\mathrm{Y'}$ باز است.
اگر $\mathrm{y \notin Y'}$ آنگاه $\mathrm{k, l \in J}$ به نحوی موجوداند که برابر نباشند و $\mathrm{f_1(y) \in V_k}$ و در این صورت با همان استدلال بالا می‌توان نشان داد که $\mathrm{f_2^{-2} V_k \cap f_1^{-1}(V_k)}$ همسایگی بازی از y که کاملا در $\mathrm{Y - Y'}$ قرار دارد، این بسته بودن Y و درستی حکم را نشان می‌دهد. □

قضایای بعدی را بدون اثبات بیان می‌کنیم و سپس از این قضایا برای محاسبه‌ی گروه بنیادی دایره بهره می‌گیریم.

قضیه ۶. فرض کنید $P : \tilde{X} \to X$ یک فضای پوششی باشد و $f : I \longrightarrow X$ یک مسیر باشد. اگر $q_0 \in P^{-1}(f(0))$ آنگاه یک مسیر یکتای $\tilde{f} : I \longrightarrow \tilde{X}$ موجود است به نحوی که $\tilde{f}(0) = q_0$ و $\tilde{f}$ ترفیعی از f باشد.

قضیه‌ی زیر نیز از اهمیت و کارایی زیادی برخوردار است:

قضیه ۷. فرض کنید $P : \tilde{X} \to X$ یک پوشش باشد. اگر $f_0, f_1 : I \longrightarrow X$ مسیرهایی هموتوپ باشند و $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ ترفیع این دو مسیر باشند به نحوی که نقاط ابتداییشان یکی باشد، آنگاه این دو ترفیع باهم همتوپ اند.

در اولین مثال از فضاهای پوششی دیدیم که $\mathbb{R}$ یک فضای پوششی برای S است. از این نکته و قضایای قبلی برای محاسبه‌ی گروه بنیادی دایره استفاده می‌کنیم.

قضیه ۸. $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$

اثبات. فرض کنید می‌خواهیم $\pi(S^1, x_0)$ را محاسبه کنیم که در آن $x_0 = (1, 0)$ است. فرض کنید $f : I \longrightarrow X$ یک مسیر بسته با سر و ته $(1, 0)$ باشد. طبق قضیه‌ی ۶ ترفیع $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که از صفر شروع می‌شود. f در یکی از اعداد صحیح پایان می‌یابد، زیرا $pf(1) = f(1) = x_0$ و $P_{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$ حال فرض کنید مسیر دیگری در $\mathbb{R}$ از صفر به $n \in \mathbb{Z}$ موجود باشد، آن را $\tilde{w}_n$ بنامید. با هموتوپی $tf + (1 - t)\tilde{w}_n$ نتیجه می‌شود: $[f] = [\tilde{w}_n]$. در نتیجه کافی است ثابت کنیم n به طور یکتا بدست می‌آید. اگر داشته باشیم $[f] = [w_n]$ و $[f] = [w_m]$ انگاه داریم: $w_m \sim w_n$. حال ترفیع های $\tilde{w}_m, \tilde{w}_n$ را طوری در نظر بگیرید که $\tilde{w}_m(0) = \tilde{w}_n(0)$ در این صورت قضیه‌ی ۷ برابری n, m را نتیجه می‌دهد. □

همان طور که مشاهده کردید محاسبه‌ی گروه بنیادی دایره بدون فضاهای پوششی میسر نبود

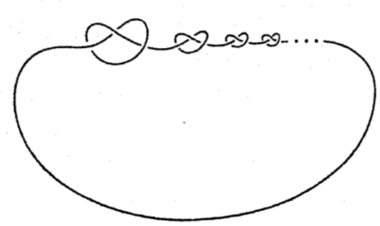
فصل ۱

معرفی گره‌ها

۱.۱ تعاریف اولیه

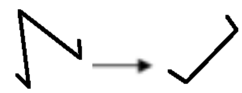
در این فصل معرفی نظریه‌ی گره‌ها را آغاز می‌کنیم. ابتدا تعریف یک گره را بیان کرده و پس از آن منظورمان از معادل بودن دو گره را بسط خواهیم‌داد. همچنین اعمال ابتدایی روی گره‌ها را در این فصل بیان و در فصول بعدی از آن‌ها بهره‌ی بیشتری میبریم.

تعریف ۱۷. زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}^3$ یا S^3 که به صورت خم بسته‌ي ساده و قطعه قطعه خطی باشد را یک گره مینامیم. همچنین m گره متمایز را یک پیوند [۱] با m مولفه می‌گوییم.



شکل ۱.۱: یک گره وحشی که در تعریف ما از گره‌ها نمیگنجد

[۱] link



شکل ۲.۱: حرکت ابتدایی

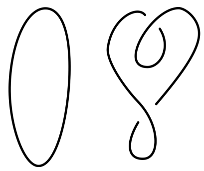
در تعریف بالا کلماتی نیازمند توضیح اندکی هستند: منظور از خم ساده، خمی است که خودش را قطع نکند و منظور از قطعه‌قطعه خطی خمی است که از کنار هم قرار گرفتن متناهی تا خط راست ساخته شده باشد. وجود کلمه‌ی قطعه‌قطعه‌خطی در تعریف گره مانع از آن میشود که خم بسته و ساده‌ای شامل نامتناهی تا پیچ را گره بدانیم، مثلا شکل ۱.۱ در تعریف ما از گره نمی‌گنجد(به این نوع خم‌ها اصطلاحا گره های وحشی [۲] میگوییم)

اکنون که تعریفی از پیوند ها و گره‌ها ارائه دادیم، نوبت به آن می‌رسد که بررسی کنیم چه موقع دو پیوند (و یا در حالتی خاص دو گره) را معادل می‌دانیم.

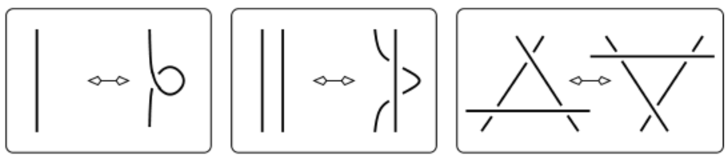
تعریف ۱۸. دو پیوند $L_۱$و$L_۲$ را معادل گوییم هرگاه یکسان ریختی قطعه قطعه خطی و جهت نگهدار مانند $h : S^۳ \to S^۳$ به نحوی موجود باشد که: $h(L_۱) = h(L_۲)$.

در مورد مفهوم قطعه قطعه خطی در فصل قبل صحبت های لازم را داشته ایم. اما از آنجا که h قطعه‌قطعه خطی است یک زیرتفسیمی از $S^۳$ (به عنوان یک سادک) موجود است که تحدید h به همه‌ی وجوه این زیر تقسیم خطی باشد. در نتیجه برای این تحدید ها از h میتوانیم تابع دترمینان تعریف کنیم. هر گاه دترمینان این تحدید ها مثبت باشد، آن را جهت‌نگهدار مینامیم.
اگر دو پیوند $L_۱$و$L_۲$ معادل باشند آنگاه مکمل‌های آن دو (مکمل پیوند L به صورت $S^۳ - L$ تعریف میشود) نیز یکسان‌ریخت اند. به همین خاطر میتوان برای تشخیص گره‌های متفاوت از تفاوت ناوردا های توپولوژیک روی مکمل گره‌ها بهره برد.
برای آنکه تعریفی معادل از هم ارزی گره ها ارائه دهیم که کار کردن با مفهومش ساده تر از تعریف قبلی باشد ازتبدیل ابتدایی شکل ۲.۱ استفاده میکنیم: می‌توان به سادگی نشان‌داد: $K_۰$ و K_n معادل اند هرگاه

[۲] wild knot



شکل ۳.۱: دو نمودار گره بدیهی: در واقع این گره را میتوان به صورت تصویر قطعه‌قطعه خطی S^1 در S^3 تعریف کرد.



شکل ۴.۱: حرکت های رایدماستر حافظ گذرها هستند.

دنباله‌ی $K_0, K_1, ..., K_n$ از گره‌ها به نحوی موجود باشد که هر $K_i(0 \leq i \leq n-1)$ با استفاده از تبدیلی ابتدایی به K_{i+1} تبدیل شود.

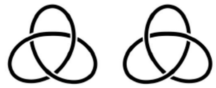
با استفاده از تبدیل ابتدایی، هر گره را به گره معادلش تغییر می‌دهیم تا تصویر آن تحت تابع $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ در وضعیت عمومی باشد. به این تصویر نمودار گره گوییم. ممکن است در نمودار یک گره از یک نقطه دو خط بگذرد که میزان دور و نزدیک بودن را در یک گذرگاه به وسیله‌ی روگذر و زیرگذر نمایش میدهیم.

هر گره میتواند تصاویر متمایزی داشته باشد؛ این مسئله که دو تصویر متفاوت مربوط به گره های معادل هستند یا نه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مثلا دو نمودار در شکل ۱.۱ هر چند به هم شبیه نیستند اما متعلق به گره های معادل اند که آن را گره بدیهی مینامیم.

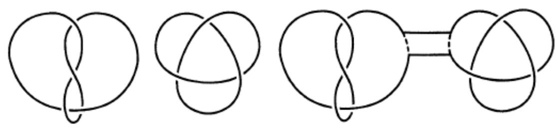
رایدماستر ریاضی دان آلمانی ثابت کرد که دو نمودار مربوط به گره‌های هم‌ارز اند اگر و تنها اگر با دنباله ای از حرکت های رایدماستر قابل تبدیل به یکدیگر باشند. حرکت‌های رایدماستر را در ۴.۱ نشان داده‌ایم.

اگر تابع h ای که در تعریف ۱۳ بیان کردیم را اینگونه تغییر دهیم که به‌جای جهت‌نگهدار، جهت‌برگردان باشد آنگاه تصویر پیوند L تحت h را تصویر آینه‌ای L [3] مینامیم و با علامت $\bar{L}$ نمایش میدهیم. اگر در نمودار یک پیوند همه‌ی روگذرها را به زیرگذر و همه‌ی زیرگذرها را به رو گذر تبدیل کنیم، نمودار

[3] mirror image



شکل ۵.۱: گره سه‌پر و تصویر آینه‌ای آن



شکل ۶.۱: جمع دو گره

تصویر آینه‌ای آن پیوند به دست می‌آید. مثلا در شکل ۵.۱ یک گره و تصویر آینه ای آن مشخص شده است. میتوانیم با جهت دادن به موالفه‌های هر پیوند(گره‌های هر پیوند) به پیوندها یک ساختار اضافی بدهیم. جهت را در نمودار گره ها با پیکان نمایش میدهیم. به وضوح اگر یک پیوند شامل n موالفه باشد اینکار به ۲^n طریق ممکن است. اگر پیوند L جهت‌دار باشد، پیوند rL را همان پیوند L با جهت های عکس تعریف میکنیم.

۲.۱ جمع گره‌ها

اکنون آماده‌ایم تا جمع گره‌ها را تعریف کنیم. به طور شهودی منظور از جمع دو گره آن است که ابتدا گره اول را بزنیم و پس از آن گره دومی. می‌توانیم این تعریف را دقیق کنیم:

تعریف ۱۹. دو گره $K_۱$ و $K_۲$ در دو نسخه‌ی مجزا از $S^۳$ مفروض‌اند. از هر دوی این کره‌های ۳بعدی یک گوی که اشتراکشان با گره یک قسمت بدون پیچ و خم است در نظر بگیرید و آن‌ها را از کره‌ها حذف کنید.(از آنجا که گره‌ها را قطعه‌قطعه خطی در نظر گرفته‌ایم، پیدا کردن همچین گوی‌هایی ممکن است). حال این دو کره‌ی سه بعدی مرز دار را از مرز به نحوی یکی کنید که خم‌هایشان به هم برسد و دو $S^۳$ مجزا به یکدیگر متصل شوند و جهت گره‌ها با یکدیگر بخواند. گره حاصل را حاصل‌جمع دو گره اولیه است.

جمع هر گره مانند K با گره بدیهی برابر با خود گره K میشود. اگر گره ها جهت‌دار در نظر بگیریم جمع آن‌ها خوشتعریف خواهد بود.(این نتیجه ای از هندسه‌ی قطعه قطعه خطی است). منظور از جمع دو گره جهت‌دار همان تعریف قبلی با این ملاحضه است که در جمع بدست آمده جهت گره‌های اولیه حفظ میشود. میتوان به آسانی دید این جمع جابه‌جایی است. به نظر میرسد جمع گره‌ها مانند ضرب اعداد طبیعی عمل میکند. به طور مشابه با اعداد طبیعی میتوانیم گره اول و مرکب را تعریف کنیم:

تعریف ۲۰.
- گره K را گره اول نامیم هر گاه گره بدیهی نباشد و تساوی $K = K_۱ + K_۲$ ایجاب کند که $K_۱$ یا $K_۲$ گره بدیهی اند.
- گرهی که بتوان آن را به صورت جمع دو گره غیر بدیهی نوشت را گره مرکب مینامیم.

در فصل‌های آینده نشان خواهیم داد هر گره تجزیه یکتایی به گره‌های اول دارد.

حال به معرفی یکی از ناورداهای مهم در گره‌ها میپردازیم:

تعریف ۲۱. منظور از عدد گذر [۴] یک گره ،کمینه تعداد گذر های مورد نیاز برای رسم نمودار آن گره در صفحه است. عدد گذر هر گره را با علامت $cr(K)$ نمایش می‌دهیم.

حال یک حدس که همچنان باز است را مطرح می‌کنیم:

مسئله‌ی باز ۱. فرض کنید $K_۱, K_۲$ دو گره باشند، آیا تساوی زیر برقرار است؟

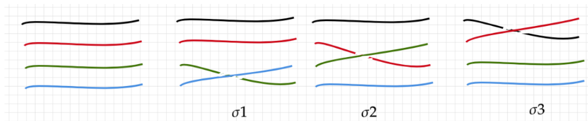
$$\mathrm{cr}(\mathrm{K}_۱ + \mathrm{K}_۲) = \mathrm{cr}(\mathrm{K}_۱) + \mathrm{cr}(\mathrm{K}_۲)$$

این مسئله هنوز باز است و تلاش‌های زیادی برای اثبات آن ناکام مانده است. بهترین نتیجه‌ای که در دست است مارک لکنبی به اثبات رسیده و به صورت زیر است:

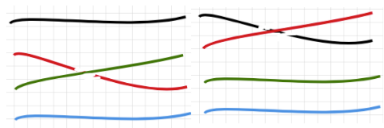
قضیه ۹. برای دو گره دلخواه $K_۱, K_۲$ داریم:

$$\frac{\mathrm{cr}(\mathrm{K}_۱) + \mathrm{cr}(\mathrm{K}_۲)}{۱۵۲} \leq \mathrm{cr}(\mathrm{K}_۱ + \mathrm{K}_۲) \leq \mathrm{cr}(\mathrm{K}_۱) + \mathrm{cr}(\mathrm{K}_۲)$$

[۴] crossing number



شکل ۷.۱: عضو همانی و مولدهای گروه بافت ۴ تایی



شکل ۸.۱: حاصل ضرب دو عضو از گروه بافت‌ها

۳.۱ گروه بافت‌ها

اکنون به کمک معرفی دسته‌ی خاصی از گروه‌ها سعی می‌کنیم تا ابزاری جبری برای بیان گره‌ها بیابیم. برای این منظور از بافت‌ها [5] بهره می‌گیریم.

تعریف ۲۲. منظور از گروه n تایی بافت ها، گروه تولید شده توسط مولدهای $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}$ و روابط:

- اگر $|i-j| > 1$ رابطه‌ی $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$
- $\forall i \in \{1, 2, ..., n-2\}, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$

اما مفهومی هندسی پشت معرفی این گروه نهفته است که به بیان آن میپردازیم: فرض کنید $n = 4$ باشد. ۴خط موازی مانند شکل ۷.۱ در نظر بگیرید که از دو طرف به میخ‌هایی وصل شده اند. منظورمان از مولد i ام، آن است که در شکل‌ها مشخص است. دقت کنید همواره هر خط عمودی‌ای باید دقیقا n تا از این خطها را قطع کند. اما منظور از ترکیب دو عضو این گروه عضوی است که از کنار هم قرار دادن دو عضو دیگر به دست می‌آید، شکل ۸.۱ را ببینید
اگر طرف دیگر هر پاره خط را به هم وصل کنیم یک بافته‌ی بسته حاصل می‌شود. در واقع هر گره یا پیوند را می‌توان به وسیله‌ی یک بافته‌ی بسته نمایش داد، این حقیقت به قضیه‌ی الکساندر مشهور است:

---

[5] braid

قضیه ۱۰. هر گره و یا پیوند را می‌توان با یک بافته‌ی بسته نمایش داد.

۴.۱ همولوژی گره‌ها

یک همسایگی از گره K که با دونات توپر یکسان‌ریخت است را در نظر بگیرید و آن را N بنامید. بیرون [۶] گره K را با تعریف $\mathrm{cl}(\mathrm{S}^3 - \mathrm{N})$ در نظر بگیرید. X هم‌ارز هموتوپی با $\mathrm{S}^3 - \mathrm{K}, \mathrm{X} \cap \mathrm{N}, \partial\mathrm{X}$و$\partial\mathrm{N}$ می‌باشد. هدف آن است که گروه‌های همولوژی X را محاسبه کنیم. از قضیه‌ی میرـویتوریس استفاده می‌کنیم:

قضیه ۱۱. فرض کنید $\mathrm{X} = \mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$ که U_1وU_2 زیر مجوعه‌های باز در X اند. در این صورت همریختی های گروهی وجود دارد که دنباله‌ی زیر دقیق باشد:

$$...\mathrm{H}_{\mathrm{k}+1}(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{k}}(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2) \hookrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{k}}(\mathrm{U}_1) \oplus \mathrm{H}_{\mathrm{k}}(\mathrm{U}_2) \to \mathrm{H}_{\mathrm{k}}(\mathrm{X}) \to \mathrm{H}_{\mathrm{k}-1}(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2) \to ...$$

از آنجا که X همبندمسیری است، داریم:

$$\mathrm{H}_0(\mathrm{X}) = \mathbb{Z}$$

حال برای محاسبه‌ی بقیه‌ی همولوژی های X از قضیه‌ی ۱۱ استفاده می‌کنیم. طبق قضیه‌ی مطرح شده داریم:

$$H_3(X) \oplus H_3(N) \to H_3(S^3)...$$
$$... \to H_2(X \cap N) \hookrightarrow H_2(X) \oplus H_2(N) \to H_2(S^3)...$$
$$... \to H_1(X \cap N) \hookrightarrow H_1(X) \oplus H_1(N) \to H_1(S^3)$$

[۶] exterior

در دنباله‌ی بالا N یکسان‌ریخت با دونات توپر است و همولوژی های آن به صورت زیر است:

$$H_k(N) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = ۰,۱ \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

همچنین همولوژی های کره‌ی سه بعدی به صورت زیر است:

$$H_k(S^۳) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = ۰,۳ \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

با توجه به اینکه $\mathrm{H}_۲(\mathrm{S}^۳) = ۰$ و دنباله دقیق است،در سطر دوم تابع نشاندن
$H_۲(X \cap N) \hookrightarrow H_۲(X) \oplus H_۲(N)$ پوشا نیز می‌شود و در نتیجه یکریختی گروهی است از آنجا که
$\mathrm{X} \cap \mathrm{N}$ یکسان‌ریخت با دونات است، همولوژی دوم آن $\mathbb{Z}$ است و در نتیجه

$$H_۲(X) = \mathbb{Z} \tag{۱.۱}$$

با همین استدلال می‌توان مشاهده کرد که

$$H_۱(X) = \mathbb{Z} \tag{۲.۱}$$

حال ثابت میکنیم همولوژی های بالاتر صفر اند،
از آنجا که هر ۳ـخمینه‌ی مثلث بندی شده و مرزدار هم‌ارز هموتوپ با زیر مجموعه‌ای دو بعدی از خودش است:

$$H_۳(X) \oplus H_۳(N) = ۰ \tag{۳.۱}$$

در نتیجه همه‌ی گروه‌های همولوژی از ۳ به بالا صفر اند.

فصل ۲

رویه‌ها و گره‌ها

۱.۲ رویه‌ی زایفرت

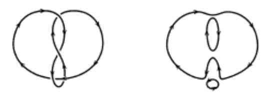
به وسیله‌ی رویه‌های مرزدار و مرزشان میتوانیم پیوندها و گره‌ها را تولید کنیم، در بین تمام رویه‌هایی که پیوند ها را تولید می‌کنند برخی از آن‌ها اهمیت ویژه‌ای دارند که به معرفی آن ها می‌پردازیم:

تعریف ۲۳. فرض کنید یک پیوند جهت دار L مفروض است. منظور از رویه‌ی زایفرت برای L یک رویه‌ی فشرده، همبند و جهت پذیر است که مرزش L است.

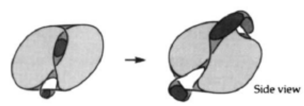
در تعریف بالا وجود جهت پذیری بسیار مهم است. رویه‌های جهت ناپذیری نیست وجود دارند که با مرزشان پیوند مورد نظر را تولید کنند اما کاری با آن‌ها نداریم. حال الگوریتمی برای پیدا کردن رویه‌ی زایفرت هر پیوند ارائه می‌دهیم، قبل از آن عملگر های هموار ساز برای پیوندها را نشان می‌دهیم، در شکل ۱.۲ دو عملگر نشان داده شده را هموار ساز گره‌ها می‌نامیم. این عملگرها روگذر و زیرگذر ها را از بین می برند.

الگوریتم ۱. فرض کنید D یک نمودار جهت‌دار برای پیوند L باشد. عملگرهای هموارساز را روی D

شکل ۱.۲: هموار ساز گره‌ها



شکل ۲.۲: هموار سازی و تولید دیسک‌های مجزا



شکل ۳.۲: اضافه کردن نوارهای تابانیده‌شده در مرحله‌ی آخر الگوریتم

انجام می‌دهیم تا اجتماع مجزای دیسک ها شود. شکل ۲.۲ را ببینید. حال هر دیسک جهتی دارد که از نمودار القا شده است. حال هر جا که گذر داشته‌ایم و آن را هموار کرده‌ایم، دو دیسک را با نواری تابانیده شده به هم وصل می‌کنیم.مانند شکل ۳.۲ با این کار به رویه‌ای میرسیم که همبند، فشرده و جهت پذیر است، دقت کنید نوار های تابانیده شده استفاده کرده‌ایم، تا جهت پذیری حفظ شود.

حال باتوجه به الگوریتم بالا میدانیم مجموعه‌ی رویه‌های زایفرت برای هر پیوند ناتهی است. حال با توجه به همین نکته در بخش بعدی گونای یک گره را تعریف می‌کنیم و کاربرد های آن را بررسی خواهیم کرد.

۲.۲ گونای گره و کاربرد

منظور از گونای یک گره، کوچکترین گونای ممکن در بین همه‌ی رویه‌های زایفرت آن گره است:

تعریف ۲۴. برای گره K گونای آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{g}(\mathrm{K}) := \min\{\mathrm{g}(\mathrm{F}) | F \text{یک رویه‌ی زایفرت برای گره باشد}\}$$

گونای تعریف شده برای گره‌ها در اثبات خواص جمع گره‌ها نقش اساسی‌ای ایفا می‌کند، دلیل آن است که قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۱۲. برای هر دو گره دلخواه $\mathrm{K}_۱, \mathrm{K}_۲$ داریم:

$$\mathrm{g}(\mathrm{K}_۱ + \mathrm{K}_۲) = \mathrm{g}(\mathrm{K}_۱) + \mathrm{g}(\mathrm{K}_۲)$$

قضیه‌ی بالا فورا نتیجه می‌دهد تنها گره با گونای صفر گره بدیهی است. همچنین به راحتی نتیجه می‌شود که هیچ گرهی غیر از گره بدیهی وارون جمعی ندارد. حال که سوال‌هایمان حول جمع گره‌ها در فصل قبل جواب داده شد،با قضیه‌ی زیر فصل را به اتمام می‌رسانیم:

قضیه ۱۳. هر گره تجزیه‌ی یکتایی به گره‌های اول دارد.

در واقع انتظار رفتار گره‌ها مانند اعداد طبیعی در این قضیه نیز خود را نشان می‌دهد.

کتاب‌نامه

[1] Lickorish, WB Raymond., *An introduction to knot theory. Vol. 175.*, Springer Science Business Media, 2012

[2] Hatcher, Allen., (2014), *Algebraic topology* [pdf]. Retrieved from https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf

[3] Munkres J. R., *Topology*, Prentice Hall, 2000, second edition

[4] Massey, William S., *A basic course in algebraic topology*, Springer Science Business Media, 1991

[5] Adams, Colin Conrad., *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*, American Mathematical Soc., 2004