پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

عدد غالب مکانی و در گراف‌های جهت‌دار بدون رأس دوقلو

نگارنده

صدرا دشتی

استاد راهنما: دکترمرتضی محمدنوری

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی
در رشته علوم کامپیوتر

۲۴/۱۱/۱۴۰۰

چکیده

مجموعه غالب D در یک گراف جهت‌أار، مجموعه‌ای از رئوس است به‌طوری که هر رأس آن یا در D باشد یا به حداقل یکی از رأس‌های مجموعه یال ورودی دارد. مجموعه غالب D از یک گراف جهت‌دار یک غالب مکانی است اگر هر رأسی که در D نیست، مجموعه‌ای منحصربه‌فرد از همسایگی درون D داشته باشد. عدد غالب مکانی $\gamma_L(G)$ از یک گراف جهت‌دار G کوچک‌ترین مجموعه با این شرایط است. کران‌های بالایی $\gamma_L(G)$ را برحسب مرتبه G بررسی می‌کنیم. گراف‌های جهت‌دار را با عدد غالب مکانی، برابر با مرتبه یا مرتبه منهای یک مشخص می‌کنیم. چنین گراف‌های جهت‌داری اصولاً دارای دوقلو زیادی هستند (رئوس با همسایگی‌های ورودی و خروجی یکسان). بنابراین، مقدار $\gamma_L(G)$ را در غیاب دوقلوها بررسی می‌کنیم و یک روش کلی برای ساخت مجموعه‌های غالب مکانی کوچک با استفاده از مجموعه‌های غالب خاص ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم که برای هر گراف جهت‌دار G از مرتبه n، $\gamma_L(G) \leq \frac{4n}{5} + 1$ برقرار است و گراف جهت‌دار بدون یال دوقلو G با $\gamma_L(G) = \frac{2(n-2)}{3}$ وجود دارد. کران‌هایی اصلاح شده برای موارد خاص معین اثبات شده است. به‌ویژه، اگر G تورنمنت بدون رأس دوقلو، یا بدون دور و رأس دوقلو، ثابت می کنیم $\gamma_L(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ که در هر دو حالت صدق می‌کند.

پیشگفتار

مجموعه غالب در گراف جهت‌دار G مجموعه D از رئوس G است، به طوری که هر رأسی که در D نیست یک همسایه ورودی در D دارد. عدد غالب $\gamma(G)$ و G کوچکترین سایز مجموعه غالب G است. در حالی که صدها مقاله در مورد غالب در گراف‌های بدون جهت وجود دارد، عدد غالب در گراف‌های جهت‌دار کمتر مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مجموعه S از رأس‌های گراف جهت‌دار G دو رأس x و y از $V(G)\backslash S$ توسط S مکان‌دار می‌شوند اگر رأسی از S وجود داشته باشد که یک همسایه ورودی دقیقاً یکی از رئوس مابین x و y باشد. مجموعه S یک مجموعه مکانی از G است اگر تمام جفت‌های $V(G)\backslash S$ را مکانی کند (اما ضرورتاً غالب بر گراف نیست). به طور معادل، هر رأسی که در S نباشد، مجموعه‌ای از همسایه‌های ورودی مجزا در S دارد. عدد مکان گراف G اندازه کوچکترین مجموعه مکانی و با $\mathrm{loc}(G)$ مشخص می‌شود. مجموعه D از رئوس گراف جهت‌دار G غالب مکانی است اگر هم مکانی و هم غالب باشد. عدد غالب مکانی $\gamma_L(G)$ گراف جهت‌دار G کوچکترین اندازه از مجموعه غالب مکانی G است. توجه کنید $\gamma_L(G)-1 \leq \mathrm{loc}(G) \leq \gamma_L(G)$ زیرا حداکثر یک راس، در مجموعه رئوس غالب مکانی نیست.

فهرست مطالب

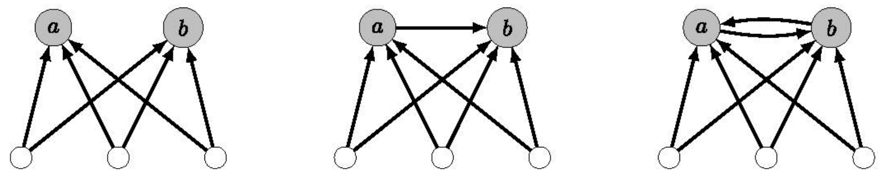
فصل ۱

مقدمات

معرفی

اکنون اصطلاحات خود را معرفی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که تمام گراف‌های جهت‌داردر نظر گرفته شده بدون طوقه هستند و یال‌های چندگانه ندارند. یک گراف جهت‌دار G شامل یک مجموعه $V(G)$ از رئوس و یک مجموعه $A(G)$ از یال‌ها است که جفت مرتب‌هایی از رئوس هستند. اگر از v به w یالی وجود داشته باشد، می‌گوییم v همسایه ورودی w است و w همسایه خروجی v است.
همسایگی ورودی باز و همسایگی خروجی باز یک رأس v، به‌ترتیب با $N^-(v)$ و $N^+(v)$ نشان داده می‌شوند، که به‌ترتیب مجموعه همسابه‌های ورودی و همسایه‌های خروجی v هستند. علاوه بر این، همسایگی ورودی بسته v، برابر $N^-[v] = N^-(v) \cup \{v\}$ و همسایگی خروجی بسته v برابر $N^+[v] = N^+(v) \cup \{v\}$ می‌باشد. مبدأ یک راس بدون همسایه ورودی است، و مقصد (سینك) یک رأس بدون همسایه‌های خروجی است. دو رأس اگر همسایگی ورودی یکسانی داشته باشند دوقلو نامیده می‌شوند. اگر دو رأس x و y در $N^-(x) = N^-(y) \cup \{y\}$ صدق کنند، آنگاه شبه دوقلو نامیده می‌شوند (شکل ۱). مسیر جهت دار، دنباله ای از رئوس است که در آن هر رأس دارای یک یال به راس بعدی در دنباله است. دور جهت‌دار یک مسیر جهت دار است که در آن اولین و آخرین رأس یکسان هستند. گراف جهت‌دار بدون دور گرافی حهت‌دار بدون دور جهت دار است. تورنمنت یک گراف جهت‌دار است که در آن یک یال منحصر به فرد بین هر جفت رئوس وجود دارد. اگر بین هر جفت رئوس یک مسیر جهت دار در هر دو جهت وجود داشته باشد، گراف جهت‌دار، قویاً همبند نامیده می‌شود.

يك قضيه کلاسیک نتیجه در گراف‌های غالب غیرجهت‌دار، قضیه اَور Ore می‌باشد، که بیان می‌کند هر گراف غیرجهت‌دار بدون رأس تنها دارای مجموعه غالب، به اندازه حداکثر نصف مرتبه است. چنین قضیه‌ای در مورد عدد غالب مکانی گراف‌های غیرجهت‌دار صدق نمی‌کند. برای مثال، گراف‌های کامل و ستاره های مرتبه n دارای عدد غالب مکانی $n-1$ هستند، [۱۹] را ببینید. با این وجود، گاریخو، گونزالس و مارکز در [۹] حدس زدند که در غیاب دوقلوها، کران بالای قضیه اُور برای عدد غالب مکانی گراف‌های غیرجهت‌دار نیز صادق است. آنها همچنین ثابت کردند که



(الف) a و b دوقلوی باز هستند. (ب) a و b شبه دوقلو هستند. (پ) a و b دوقلوی بسته هستند.

شکل ۱.۱: مثالی از رئوس جفت.

کران بالایی تقریباً دو سوم در این زمینه صدق می‌کند (برای اطلاعات بیشتر در مورد این موضوع به [۴، ۵، ۶] مراجعه کنید).

بنابراین، طبیعی است که بپرسیم آیا کران‌های مشابهی در مورد عدد غالب مکانی گراف‌های جهت‌دار وجود دارد یا خیر. با این حال، قضیه اُور برای گراف‌های جهت‌دار صادق نیست. در واقع نه فقط هر رأس تنها بلکه هر مبدأ از یک گراف جهت‌دار G در مجموعه غالب G وجود دارند. برای مثال، یک ستاره از مرتبه n با $n-1$ مبدأ، دارای عدد غالب $n-1$ است لی در [۱۴] (به عنوان بخشی از نتایج کلی‌تر) نشان داد که هر گراف بدون مبدأ G از مرتبه n دارای حداکثر عدد غالب $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ است.

اولین سوالی که توجه ما را به خود جلب می کند این است که تعیین کنیم کدام گراف‌های جهت‌دار دارای بیشترین عدد غالب مکانی ممکن هستند. به این سوال در آینده می‌پردازیم، جایی که کلاس گراف‌های مرتبه n با عدد غالب مکانی $n-1$ را توصیف می‌کنیم. البته این شامل ستاره‌ها با $n-1$ مبدأ (که دارای عدد غالب $n-1$ هستند) ، گراف‌های جهت‌دار کامل و ستاره‌های دو طرفه (که با گراف‌های غیرجهت‌دار با عدد غالب مکانی $n-1$ مطابقت دارند) می‌شود. اما همان‌طور که خواهیم دید، مثال‌های بسیار دیگری نیز وجود دارد.

در بخش‌های بعدی، یک تکنیک کلی برای به دست آوردن کوچکترین مجموعه رئوس غالب مکانی در گراف‌های جهت‌دار بدون رأس دوقلو طراحی می کنیم. این تکنیک اصلاحی از تکنیک های مورد استفاده در [۶، ۹، ۱۲] است. از این تکنیک در بخش بعدی استفاده می کنیم، تا نشان دهیم هر گراف جهت‌دار بدون مبدأ و رئوس دوقلو از مرتبه n دارای اندازه مجموعه غالب مکانی، حداکثر $\frac{4n}{5}$ است. این کران به $\frac{3n}{4}$ تعدیل می‌شود. اگر گراف جهت‌دار شبه دوقلو نیز نداشته باشد. با اضافه کردن یک به این کران‌ها، حتی در حضور مبدأ ها هم صدق می‌کنند. در بخش ۲، گراف‌های قویاً همبند بدون رأس‌های دوقلو یا شبه دوقلو از مرتبه n با عدد غالب مکانی $\frac{2(n-2)}{3}$ را توضیح می‌دهیم.

در بخش ۵ نشان می‌دهیم که هر تورنمنت از مرتبه n دارای اندازه مجموعه غالب مکانی حداکثر $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ است (برای تونمنت‌های تراگذری و مثال‌های دیگر کوچک‌است).

در بخش ۶، نشان می‌دهیم که کران‌های مشابه برای گراف‌های جهت‌دار بدون دور و رأس

دوقلو (این هم برای گذر جهت‌دار، کوچک است) صدق می‌کند.

ما در بخش ۱ به برخی ملاحظات اولیه می پردازیم و مقاله را در بخش ۶ به پایان می رسانیم.

ابتدا با چند گزاره سودمند شروع می‌کنیم.

گزاره زیر یک واقعیت شناخته شده در مورد مجموعه‌های غالب مکانی گراف‌های غیرجهت‌دار را تعمیم می‌دهد [۱۹].

گزاره ۱.۱. G را یک گراف جهت‌دار با مجموعه S از جفت‌های دوتایی (باز یا بسته) یا شبه جفت قرار دهید. حداقل $|S|-1$ رأس از S در هر مجموعه غالب مکانی از G وجود دارد.

اثبات: با استفاده از تناقض، D را یک مجموعه غالب مکانی که شامل دوقلو دو طرفه یا شبه دوقلو x و y نیست، قرار دهید. رئوس x و y دارای همسایه داخلی مشترک در $V(G)\backslash\{x,y\}$ و همچنین در D هستند. که این تناقض است. □

با این حال، ما توجه می کنیم که بر خلاف دوقلوها، نمی تواند مجموعه ای از سه دوتایی شبه دوقلو وجود داشته باشد.

گزاره ۲.۱. x، y و z را سه رأس در نظر بگیرید. اگر x و y شبه دوقلو و y و z هم شبه دوقلو باشند، آنگاه x و z نمی‌توانند شبه دوقلو باشند.

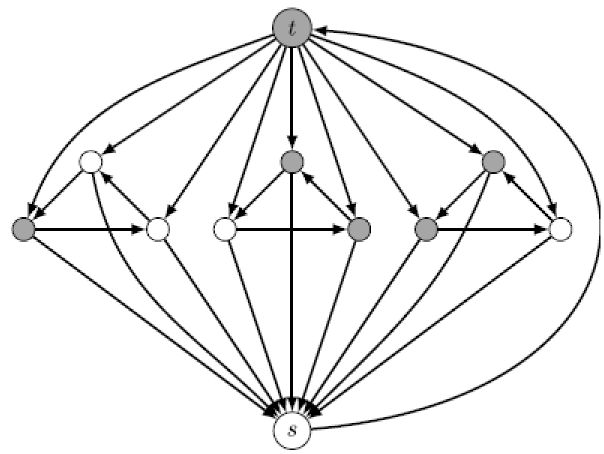
اثبات: بدون از دست دادن کلیات فرض کنیم که یالی از x به y داریم. در این جا دو حالت داریم. اگر یالی از z به y داشته باشیم، آنگاه باید هر دو یال x به z و z به x را داشته باشیم. بنابراین x و z نمی‌توانند شبه دوقلو باشند. اگر یالی از y به z داشته باشیم، آنگاه از x به z داریم. اما در این صورت y یک همسایه داخلی z است نه از x، بنابراین x و z نمی‌توانند شبه دوقلو باشند. □

حال خانواده گراف‌های جهت دار بدون رأس دوقلو G_k از مرتبه n که دارای عدد غالب مکانی تقریباً $\frac{2n}{3}$ هستند را معرفی می‌کنیم. گراف G_3 در شکل ۲ رسم شده است.

گزاره ۳.۱. G_k را قویاً همبند بدون رأس دوقلو یا شبه دوقلو با مرتبه $n=3k+2$ در نظر بگیرید که از k مثلث‌های جهت‌دار با اضافه کردن یک رأس جدید s به‌دست می‌آید، که به همه رأس‌های همه مثلث‌ها یال خروجی دارد و رأس t به همه رأس‌های همه مثلث‌ها یال ورودی دارد و s به t داریم. بنابراین داریم $\gamma_L(G_k)=\frac{2(n-2)}{3}$.

اثبات: برای مشاهده $\gamma_L(G_k)\leq\frac{2(n-2)}{3}$، مجموعه غالب مکانی زیر را در نظر بگیرید: t یک رأس از مثلث جهت‌دار و دو رأس از همه مثلث‌های جهت‌دار دیگر بگیرید (برای مثال شکل ۲ را ببینید).

برای دیدن $\gamma_L(G_k)\geq\frac{2(n-2)}{3}$، مجموعه غالب مکانی D از G_k را در نظر بگیرید. ابتدا هر کدام از مثلث‌های جهت‌دار اصلی شامل یک رأس از D هستند زیرا در غیر این‌صورت سه رأس این مثلث مکان‌دار نمی‌شوند. دوم حداکثر یک مثلث جهت‌دار که شامل تنها یک رأس از D است وجود دارد زیرا در غیر این‌صورت در هر دو مثلث تنها یک رأس وجود دارد که توسط t غالب



شکل ۲.۱: یك گراف قویاً همبند بدون رأس دوقلو یا شبه دوقلو از مرتبه n با عدد غالب مکانی $\frac{2(n-2)}{3}$ با مجموعه غالب مکانی به رنگ طوسی.

می‌شود و آن‌ها مکان‌دار نمی‌شوند. سرانجام، اگر مثلثی شامل تنها یک رأس از D باشد، آن‌گاه $t \in D$ است زیرا در غیر این‌صورت رأسی از مثلث مکان‌دار نمی‌شوند. بنابراین، در مجموع دو رأس از D در هر مثلث جهت‌دار وجود دارد. لذا $\frac{n-2}{3}$ مثلث جهت‌دار اصلی وجود دارد، اثبات کامل شد. $\square$

فصل ۲

مشخص کردن گراف‌های جهت دار با عدد غالب مکانی $n-1$

در این بخش، گراف‌های جهت‌دار با بیشترین غالب مکانی و عدد مکانی را مشخص می‌کنیم.

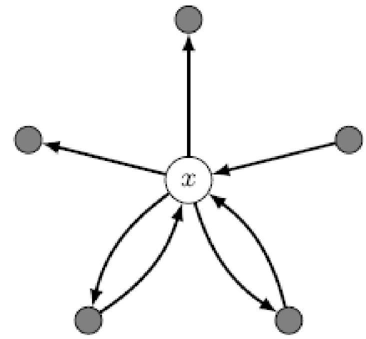
برای هر گراف جهتدار G مرتبه n، هر مجموعه ای با اندازه $n-1$ یک مجموعه مکانی است، بنابراین $\mathrm{loc}(G) \leq n-1$. این برای مجموعه‌های غالب مکانی صحیح نمی‌باشد: گراف جهت‌دار بدون یال را در نظر بگیرید. با این حال، این تنها مثال از این دست است: اگر G دارای یالی بشد، آنگاه یک مجموعه غالب مکانی از اندازه حداکثر $n-1$ دارد (مجموعه به‌دست آمده از $V(G)$ که با حذف نقطه پایانی یک یال دلخواه به‌دست می‌آید را در نظر بگیرید).

می‌گوییم یک رأس عمومی است اگر یك یال ورودی به همه رأس‌ها داشته باشد. ابتدا این گراف‌های جهت‌دار با مرتبه n با $\mathrm{loc}(G) = n-1$ را معرفی می‌کنیم (البته، اگر یالی نداشته باشد، چنین گراف جهت‌داری در $\gamma_L(G) = n-1$ صدق می‌کند).

گزاره ۱.۲ . G را گراف جهت‌دار از مرتبه n در نظر بگیرید. داریم $\mathrm{loc}(G) = n-1$ اگر و تنها اگر هر رأس عمومی یا یک سینک باشد.

اثبات: به یاد بیاورید که $\mathrm{loc}(G) \leq n-1$ همیشه برقرار است. اگر رأس x دارای همسایه خروجی y باشد و رأس دیگر z موجود باشد که همسایه خروجی x نباشد، آن گاه $V(G)\backslash\{x,y\}$ یک مجموعه مکانی G از اندازه $n-2$ است. لذا، اگر $\mathrm{loc}(G) = n-1$ باشد، آنگاه هر رأس در G یا عمومی است یا سینک است.

برعکس، فرض کنید که هر رأس از G عمومی یا سینک باشد. U را مجموعه از رأس‌های عمومی و S را مجموعه سینک در نظر بگیرید. هر رأس v توسط مجموعه $U \cup \{v\}$ غالب است. بنابراین، اگر دو رأس مجزا در مجموعه مکانی L نباشند، هر دو توسط رئوس در $L \cap U$ غالب می‌شوند، که تناقض است. بنابراین داریم $|L| \geq n-1$. $\square$



شکل ۱.۲: ستاره جهت‌دار، با مینیمم مجموعه غالب مکانی در طوسی

گراف جهت دار G را ستاره جهت دار می‌نامیم اگر دارای رأس خاصی باشد که به تمام یال‌ها متعلق باشد، و رأس ایزوله‌ای نداشته باشد (شکل **۳** را ببینید).
ستاره‌های جهت دار خانواده دیگری از گراف‌های جهت‌دار همبند با بیشترین غالب مکانی را تشکیل می دهند.

گزاره ۲.۲. برای هر ستاره جهت‌دار G از مرتبه $n \geq 2$، داریم $\gamma_L(G) = n - 1$.

اثبات: x را مرکز G در نظر بگیرید (رأسی که به همه یال‌ها تعلق دارد). از آن جا که $n \geq 2$ حداکثر یک یال در G وجود دارد و بنابراین $\gamma_L(G) \leq n - 1$.
D را مجموعه غالب مکانی G در نظر بگیرید. واضحاً، هر مبدأ از G به D متعلق است. اگر دو همسایه از x به D متعلق نباشد، آنگاه آن‌ها مکانی نیستند. بنابراین یک همسایه از x در D وجود ندارد. در حالتی که دقیقا یک رأس در D وجود ندارد، برای این که این رأس پوشیده شده باشد x باید به D متعلق باشد. این نشان می دهد که $\gamma_L(G) \geq n - 1$. $\square$
تنها گراهای غیرجهت دار همبند مرتبه n با عدد غالب مکانی $n - 1$، ستاره ها و گراف‌های کامل هستند [۱۹] (که به عنوان گراف‌های جهت‌دار شناخته می‌شوند، آنها با ستاره های دو طرفه و گراف‌های کامل دو طرفه مطابقت دارند). همانطور که قبلاً اشاره کردیم، نمونه های گراف جهت‌دار بیشتری وجود دارد. اکنون همه آنها را توصیف می کنیم.

قضیه ۳.۲. برای یک گراف جهت‌دار متصل G از مرتبه $n \geq 2$ داریم $\gamma_L(G) = n - 1$ اگر و تنها اگر حداکثر یکی از شرایط زیر صدق کند:
(الف) $n = 3$
(ب) G یک ستاره جهت‌دار باشد.
(پ) $V(G)$ را بتوان به سه مجموعه (می‌توانند تهی باشند) S_1، C و S_2 تقسیم کرد. به‌طوری که S_1 و S_2 مجموعه‌هایی مستقل، C یک گراف جهت‌دار کامل است و یال‌ها در G برابر با تمام یال‌های ممکن از S_1 به $C \cup S_2$، و از C به S_2 هستند.

اثبات: ابتدا فرض کنیم $n = 2$ (G یک ستاره جهت‌دار است) یا $n = 3$. اگر دو رأس از G در مجموعه غالب مکانی G نباشند، آنگاه هر دو یا عمومی نیستند یا یکی از آن‌ها پوشیده نشده است: که تناقض است. پس حتماً $\gamma_L(G) = n - 1$ و می‌توانیم فرض کنیم که $n \geq 4$.

از گزاره ۵ داریم، که (ب) دلالت بر $\gamma_L(G) = n - 1$ دارد. پس، فرض کنیم که (پ) صدق می‌کند. بنابراین G با اضافه کردن مجموعه S_1 به گراف‌جهت‌داری که همه رأس‌های آن یا عمومی هستند (در C) یا سینک (در S_2) به‌دست می‌آید. از آن‌جا که همه رأس های S_1 مبدأ هستند، آن‌ها هیچ مجموعه غالب مکانی G تعلق ندارند. علاوه بر این، هر رأس در $S_2 \cup C$ توسط همه رئوس در S_1 پوشیده می‌شود. یعنی ما نیاز به مجموعه مکانی $G[C \cup S_2]$ در هر مجموعه غالب مکانی G داریم. از گزاره ۴، چنین مجموعه‌ای دارای اندازه $|C| + |S_2| - 1$ است. بنابراین $\gamma_L(G) = n - 1$. حال اثبات برعکس را انجام می‌دهیم. فرض کنید که $\gamma_L(G) = n - 1$ (و $n \geq 4$). باید ثابت کنیم که (ب) یا (پ) صدق می‌کند.

حالت ۱: ابتدا فرض کنیم که G شامل تعدادی مبدأ است و S را مجموعه‌ای از مبدأها بگیریم. اگر رأس s در S و دو رأس x و y از $N^+(S)$ (به‌طوری که $N^+(S)$ نشان دهنده تمام همسایه‌های خروجی از همه رئوس S است) که توسط s مکان‌دار شده‌اند، وجود داشته باشد، آنگاه $V(G)\backslash\{x, y\}$ مجموعه غالب مکانی G از اندازه $n - 2$ است که تناقض است. بنابراین همه رئوس S شامل همسایه‌های مشترک هستند و G شامل تمام یال‌های بین S و $N^+(S)$ است.

اکنون زیرگراف جهت‌دار G' از G که شامل $N^+(S)$ می‌شود را در نظر بگیرید. اگر دارای مجموعه مکانی L' از اندازه $|V(G')|-2$ باشد (فرض کنید که دو رأس x و y هر دو در L' نباشند)، آنگاه مجموعه $V(G)\backslash\{x, y\}$ باید مجموعه غالب مکانی G باشد که تناقض است. بنابراین داریم $\operatorname{loc}(G') = |V(G')| - 1$، و از گزاره ۴ رئوس G' می‌توانند به سینک‌های G' (مجموعه S') و رئوس عمومی از G' (مجموعه U') تقسیم شوند. $R = V(G)\backslash(S \cup S' \cup U')$ قرار می‌دهیم. اگر R تهی باشد، مسئله حل است. زیرا آنگاه G شرط (پ) با $S_1 = S$، $C = U'$ و $S_2 = S'$ را دارد. بنابراین فرض کنیم R غیرتهی باشد. اگر $V(G)\backslash S$ شامل یک یال از رأس a به رأس $b \in R$ باشد به‌طوری که $(S' \cup U')\backslash\{a\}$ تهی نباشد، آنگاه می‌توانیم یک مجموعه غالب مکانی G از اندازه $n - 2$ از $V(G)$ با حذف b و هر رأس از $(U' \cup S')\backslash\{a\}$ بسازیم. بنابراین، R باید مجموعه‌ای مستقل باشد و اگر یالی از $S' \cup U'$ به R وجود داشته باشد آنگاه $|S' \cup U'| = 1$ است. اما از آن جا که R شامل هیچ مبدأ ای نیست، پس حتما یالی از $S' \cup U'$ به R وجود دارد و لذا $|S' \cup U'| = 1$ است. اما آنگاه ، G یک ستاره جهت دار است و در (ب) صدق می‌کند پس کار تمام است.

حالت ۲: حال فرض کنیم که G هیچ مبدأی ندارد. اگر هر رأس یا عمومی باشد یا سینک آنگاه G در (پ) صدق می‌کند (با $S_1 = \emptyset$) و کار تمام است. بنابراین باید فرض کنیم که رأس x ای با یک یال خروجی به y وجود دارد و رأس سوم z که یک همسایه خروجی از x نیست. با این فرضیات، $V(G)\backslash\{y, z\}$ مجموعه غالب مکانی نیست: اما از آن جا که x توسط y و z

مکان‌دار می‌شود، یک مجموعه مکانی می‌باشد و یقیناً y را می‌پوشاند. بنابراین $V(G)\backslash\{x, y\}$، z را نمی‌پوشاند. پس y تنها همسایه ورودی z است (به یاد داشته باشیم که z یک همسایه ورودی دارد زیرا که G رأس مبدأ ندارد). قرار دهید $R = V(G)\backslash\{x, y, z\}$. اگر x یک همسایه خروجی مانند t در R داشته باشد آن‌گاه $V(G)\backslash\{t, z\}$ می‌تواند غالب مکانی باشد که تناقض است. به‌طور مشابه اگر x یک همسایه ورودی در R داشته باشد آن‌گاه $V(G)\backslash\{x, y\}$ می‌تواند یک غالب مکانی باشد که تناقض است. اگر یالی از رأس u به رأس v در داخل R باشد، آن‌گاه $V(G)\backslash\{v, z\}$ مجموعه غالب مکانی از G است که تناقض است. پس R یک مجموعه مستقل است. حال اگر z همسایه‌ای در R نداشته باشد، G یک ستاره جهت‌دار به مرکز y است و کار تمام است. بنابراین z باید یک همسایه خارجی p در R داشته باشد. اما حالا $V(G)\backslash\{p, y\}$ یک غالب مکانی است که تناقض است. اثبات کامل شد. $\square$

فصل ۳

روش کلی برای به دست آوردن مجموعه غالب مکانی در گراف‌های جهت‌دار بدون رأس دوقلو

توجه کنید همه همه گراف‌های تشریح شده در بخش ۳ از مرتبه $n \geq 4$ دارای رأس دوقلو بودند.

در این بخش یک روش کلی برای به دست آوردن مجموعه غالب مکانی گراف‌های جهت‌دار بدون رأس دوقلو مبنی بر مجموعه‌های غالب خاص ارائه می‌دهیم. این روش در [۶] برای گراف‌های غیرجهت‌دار استفاده شده است (مشابه بحثی که در [۹] استفاده شده است). در [۱۲] برای گراف‌های جهت‌دار بدون رأس شبه دوقلو تطبیق داده شد، و در اینجا آن را به همه گراف‌های جهت دار بدون رأس دوقلو تعمیم می‌دهیم.

ابتدا با چند تعریف شروع میکنیم.

تعریف ۱.۳. S را مجموعه‌ای از رئوس از گراف جهت‌دار G در نظر بگیرید. افراز S، $\mathcal{P}_S$ از $V(G)\backslash S$ افرازی از $V(G)\backslash S$ است به‌طوری که دو رأس در یک بخش قرار دارند اگر و تنها اگر دارای مجموعه همسایه ورودی مشترک در S باشند.

با در نظر گرفتن رأس $v \in S$، یک همسایگی خصوصی خارجی S برای v یک رأس خارج S است که همسایه خروجی v است اما همسایه رأس دیگری از S در G نیست.

قضیه ۲.۳. فرض کنید که G یک گراف جهت‌دار بدون رأس دوقلو باز از مرتبه n باشد. S را مجموعه غالب از G قرار دهید به طوری که افراز S از $V(G)\backslash S$ شامل حداقل $x \cdot |S|$ بخش باشد (با $0 < x \leq 1$). آنگاه $\gamma_L(G) \leq \frac{2x+1}{3x+1}n$. به‌علاوه، اگر G گراف بدون رأس شبه دوقلو هم باشد آن‌گاه $\gamma_L(G) \leq \frac{x+1}{2x+1}n$.

اثبات: $\mathcal{P}_S = P_1 \cup \cdots \cup P_{n_1} \cup Q_1 \cdots \cup Q_{n_2}$ را یک افراز S از $V(G)\backslash S$ قرار دهید

به طوری که $P_1,\ldots,P_{n_1}$ بخش‌هایی با اندازه ۱ و $Q_1,\ldots,Q_{n_2}$ بخش‌هایی با اندازه حداکثر ۲ باشد.

فرض می‌کنیم که S یک ماکسیمال است با این خاصیت که $\mathcal{P}_S$ دارای حداکثر $x\cdot|S|$ بخش است، باشد (این امر با افزودن رئوس به S در زمانی که این ویژگی برقرار است تضمین می شود).

حال قرار می‌دهیم $D_1 = S\cup\bigcup_i P_i$. خواص زیر را برای D_1 داریم.

ادعا ۳.۳. دو رأس در $V(G)\backslash D_1$ توسط D_1 مکان‌دار می‌شوند، مگر اینکه یک جفت، جفت رأس شبه دوقلو تشکیل دهند.

اثبات: واضحاً اگر دو رأس در بخش‌های متفاوت از $\mathcal{P}_S$ باشند، آن‌گاه توسط رئوسی در S مکان‌دار می‌شوند. بنابراین با استفاده از تناقض، q_1 و q_2 را دو رأس از $V(G)\backslash D_1$ در نظر بگیرید که به بخش Q_{i_0} از $\mathcal{P}_S$ تعلق دارد به طوری که شبه دوقلو نیست اما توسط D_1 نیز مکان‌دار نمی‌شود. از آن جا که G رأس دوقلو ندارد، رأس q_3 در $V(G)\backslash S$ وجود دارد که می‌تواند توسط q_1 و q_2 مکان‌دار شود: بدون از دست دادن کلیت q_3 یک یال ورودی به q_1 دارد اما به q_2 ندارد. با فرض ما $q_3\notin D_1$ است. حال $S'=S\cup\{q_3\}$ و افراز S' متناظر با $\mathcal{P}_{S'}$ از $V(G)\backslash S'$ را در نظر بگیرید (n'_1 و n'_2 را مانند قبل تعریف می‌کنیم). از آن جا که $q_3\in\bigcup_i Q_i$، داریم $n'_1+n'_2\geq n_1+n_2+1$ (زیرا در $\mathcal{P}_{S'}$، Q_{i_0} به دو بخش تقسیم می‌شود). لذا $n'_1+n'_2\geq x|S|+1\geq x(|S|+1)=x|S'|$ (زیرا $x\leq 1$). با این فرض که S ماکسیمال باشد در تناقض است. $\square$

توجه کنید که $|D_1| = |S| + n_1$. از آن جا که D_1 یک مجموعه غالب است، ادعای (۸.الف) نشان می‌دهد که در نبود شبه دوقلو، D_1 غالب مکانی است. پس، در ادامه به موضوع شبه دوقلوها می پردازیم. ابتدا گزاره زیر را اثبات می‌کنیم.

ادعا ۴.۳. هر دو جفت از شبه دوقلو در $V(G)\backslash D_1$ از هم جدا هستند.

اثبات: توجه کنید که دو شبه دوقلو x و y در $V(G)\backslash S$ باید به بخش مشترکی از $\mathcal{P}_S$ متعلق باشند، زیرا آن‌ها همسایه ورودی مشترک در S دارند. q_1، q_2، q_3 و q_4 را چهار رأس در $V(G)\backslash D_1$ در نظر بگیرید به‌طوری که $\{q_1,q_2\}$ و $\{q_3,q_4\}$ دو جفت مجزا از شبه دوقلوهاباشند (به ترتیب q_1 و q_3 همسایه ورودی برای q_2 و q_4 باشند). با برهان خلف در نظر بگیرید که دو جفت جدا از هم نباشند. آن‌گاه، همه رئوس در دو جفت متعلق به بخش مشترکی از $\mathcal{P}_S$ خواهند بود. اگر $q_1=q_3$، آن‌گاه q_2 و q_4 باید دوقلو باشند که تناقض است (زیرا آن‌ها بنابه گزاره ۲ نمی‌توانند شبه دوقلو باشند). به‌طور مشابه، اگر $q_2=q_4$ باشد، آن گاه q_1 و q_4، q_3 و q_4 شبه دوقلو می‌شوند، پس باید یالی از q_1 به q_3 و همچنین از q_3 به q_1 وجود داشته باشد. پس q_1 و q_3 دوقلو هستند. بنابراین بدون از دست دادن کلیت باید فرض کنیم $q_2=q_3$. آن‌گاه مانند ادعای قبل ادامه می‌دهیم: مجموعه $S'=S\cup\{q_2\}$ هنوز در شرط $n'_1+n'_2\geq x|S'|$ صدق می‌کند که با ماکسیمال بودن S در تناقض است. اثبات ادعا تمام شد. $\square$

حال برای هر جفت از شبه دوقلوها در $V(G)\backslash D_1$ یکی از آن‌ها را به D_1 اضافه می کنیم. از ادعای (۸.الف) و (۸.ب) نتیجه می‌گیریم که مجموعه D'_1 غالب مکانی است و دارای حداکثر اندازه $\frac{n+|S|+n_1}{2} = |S|+n_1+\frac{n-|S|-n_1}{2}$.

حال مجموعه D_2 از اندازه $n-n_1-n_2$ را در نظر بگیرید که شامل $V(G)$ بدون یک رأس (اختیاری) از هر بخش از $\mathcal{P}_S$ است. واضح است که D_2 نیز غالب مکانی است: همه رئوس $V(G)\backslash D_2$ توسط S مکان‌دار و پوشیده می‌شوند.

حال فرض می‌کنیم G دارای شبه دوقلو نباشد: آن‌گاه D_1 و D_2 دو مجموعه غالب مکانی G هستند. اگر $|D_2| \leq \frac{x+1}{2x+1}n$، کار تمام است. لذا فرض می‌کنیم که $|D_2| > \frac{x+1}{2x+1}n$. داریم $|D_2| = n-n_1-n_2$، بنابراین $n_1+n_2 < \left(1-\frac{x+1}{2x+1}\right)n = \frac{x}{2x+1}n$. به‌یاد داریم $|S| \leq \frac{n_1+n_2}{x}$. لذا مطلوب است:

$$\begin{aligned}|D_1| &= |S|+n_1 \leq |S|+n_1+n_2 \leq \frac{n_1+n_2}{x}+(n_1+n_2)\\ &= \left(\frac{1}{x}+1\right)(n_1+n_2) < \left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{x}{2x+1}n\right)\\ &= \frac{x+1}{2x+1}n\end{aligned}$$

اگر G دارای شبه جفتی باشد، از مجموعه‌های غالب مکانی D_1' و D_2 استفاده می کنیم. دوباره اگر $|D_2| \leq \frac{2x+1}{3x+1}n$، کار تمام است. پس فرض می کنیم که $|D_2| > \frac{2x+1}{3x+1}n$. آنگاه $n_1+n_2 < \left(1-\frac{2x+1}{3x+1}\right)n = \frac{x}{3x+1}$. پس به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}|D_1'| &\leq \frac{|S|+n+n_1}{2} \leq \frac{|S|+n+n_1+n_2}{2}\\ &\leq \frac{n_1+n_2}{2x}+\frac{n}{2}+\frac{n_1+n_2}{2}\\ &< \frac{n}{6x+2}+\frac{n}{2}+\frac{x}{6x+2}n = \frac{2x+1}{4x+1}n\end{aligned}$$

پس اثبات تمام است. □

استفاده از قضیه ۳.۲ برای عموم گراف‌های جهت‌دار بدون دوقلو

ابتدا روش بخش قبل را برای گراف‌های جهت دار بدون مبدأ استفاده می‌کنیم.

گزاره ۵.۳. هر گراف جهت‌دار بدون مبدأ G دارای مینیمم اندازه مجموعه غالب S با حداکثر $|S|/2$ بخش متمایز در افراز S از $V(G)\backslash S$ است.

اثبات: S را مجموعه غالب با مینیمم اندازه در نظر بگیرید. S را با بیشترین تعداد از بخش‌هایی که در افراز $\mathcal{P}(S)$ از $V(G)\backslash S$ وجود دارد، انتخاب می کنیم.

S_1 را مجموعه‌ای از رئوس S در نظر می‌گیریم که دارای حداکثر یک همسایه خصوصی خارجی از S است. در ادامه، S_2 را مینیمم اندازه‌ای از اعضای مجموعه رئوس از $S\backslash S_1$ که همه رئوس $(V(G)\backslash S)\backslash N^+(S_1)$ را می‌پوشاند انتخاب می‌کنیم (به‌طوری که S_2 رئوسی که در S نیستند و همسایه خصوصی خارجی S برای هر رأس در S نیستند را می‌پوشاند). توجه کنید که $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ و $S_1 \cup S_2$، $V(G)\backslash S$ را می‌پوشاند. سرانجام قرار می‌دهیم $S_3 = S\backslash(S_1 \cup S_2)$.

توجه کنید که $|S_2|$ حداکثر تعداد بخش‌های $\mathcal{P}(S)$ است که شامل رئوس با حداکثر دو همسایه ورودی در S می‌باشد. زیرا رأس S برای غالب شدن رئوس از هر بخشی کافی است. بنابراین تعداد بخش ها در $\mathcal{P}(S)$ حداکثر $|S_1| + |S_2|$ است.

حال نشان می‌دهیم که داریم $|S_1| + |S_2| \geq |S|/2$، با برهان خلف می‌کنیم $|S_1| + |S_2| < |S|/2$ که یعنی $|S_3| > |S|/2$.

پس، رأس x از S_3 نیست که دارای یک همسایه ورودی در S باشد، از طرف دیگر $S\backslash\{x\}$ می‌تواند یک مجموعه غالب باشد که با مینیمم بودن S در تناقض است. از آن جا که G بدون مبدأ است، x دارای یک همسایه ورودی در $V(G)\backslash S$ است. $f(x)$ را یک همسایه ورودی دلخواه از x و $S_4 = \{f(x) | x \in S_3\}$ در نظر بگیرید. تابع f حتماً جدا از هم است: اگر داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2) = y$ به‌ازای هر دو رأس متمایز x_1 و x_2 از S_3، آن‌گاه مجموعه $S\backslash\{x_1, x_2\} \cup \{y\}$ باید مجموعه غالب کوچکتری از S باشد. لذا $|S_4| = |S_3|$.

حال $S' = S_1 \cup S_2 \cup S_4$ در نظر می‌گیریم. واضحاً S' یک مجموعه غالب G از اندازه $|S|$ است. به‌علاوه، هر رأس x از S_3 یک همسایه خصوصی خارجی S' از $f(x)$ است. بنابراین افراز $\mathcal{P}(S')$ از $V(G)\backslash S'$ دارای حداکثر $|S_3|$ بخش است. که بیشتر از $|S'|/2 = |S|/2$ می باشد. که با انتخاب S در تناقض است.

بنابراین از ادعا، داریم $|S_1| + |S_2| \geq |S|/2$، که اثبات را کامل می کند. $\square$

خاطر نشان می‌کنیم که کران در گزاره ۹ با در نظر گرفتن هر گراف جهت‌دار شامل تنها مثلث‌های جهت دار رأس جدا از هم، دقیق خواهد بود.

ما نتیجه فوری گزاره ۹ و قضیه ۸ را به دست می آوریم.

نتیجه ۶.۳. برای هر گراف جهت‌دار بدون مبدأ و بدون رأس دوقلو G از مرتبه n، داریم $\gamma_L(G) \leq \frac{4n}{5}$. علاوه بر این اگر
یک شبه دوقلو باز باشد آن‌گاه G $\gamma_L(G) \leq \frac{3n}{4}$.

می‌توان این نتیجه را به گراف‌های جهت‌دار بدون رأس دوقلو با وجود رأس‌های مبدأ تعمیم داد (توجه کنید که تنها یک مبدأ می‌تواند باشد زیرا داشتن چند مبدأ منجر به داشتن رأس دوقلو می‌شود).

نتیجه ۷.۳. G را یک گراف جهت دار بدون رأس دوقلو از مرتبه $n \geq 3$ در نظر بگیرید. آن گاه $\gamma_L(G) \leq \frac{4n}{5} + 1$. علاوه بر این اگر G بدون شبه دوقلو باشد آن گاه $\gamma_L(G) \leq \frac{3n}{4} + 1$.

اثبات: فرض کنید s تنها مبدأ G باشد. $\mathcal{I}$ را مجموعه‌ای از همه زیرمجموعه‌های $N^-(x)$ برای $x \in V(G)$ در نظر بگیرید. مجموعه $\mathcal{I}$ دارای مرتبه n و بنابراین یک زیرمجموعه غیرتهی X از $V(G)\backslash\{s\}$ است که در $\mathcal{I}$ نیست. و بنابراین X یک همسایه ورودی باز از هیچ رأسی در G نیست. G' را گرافی در نظر بگیرید که از G با اضافه کردن تمام یال های بین X و s به دست می‌آید. حال گراف G' بدون مبدأ و بدون دوقلو است. از نتیجه ۱۰ داریم که، مجموعه غالب مکانی D' از G' با اندازه حداکثر $\frac{4n}{5}$ وجود دارد. لذا $D = D' \cup \{s\}$ یک مجموعه غالب مکانی G است. در واقع همه رئوس پوشیده شده‌اند و دو رأس در D هنوز توسط D' مکان‌دار می‌شوند. بنابراین $\gamma_L(G) \leq \frac{4n}{5} + 1$.

برای بخش دوم، استدلال مشابهی داریم اما با فرض این که $\mathcal{I}$ شامل همه زیرمجموعه‌های $N^-[x]\backslash\{s\}$ و $N^-(x)\backslash\{s\}$، برای $x \in V(G)$ است. حداکثر $2n$ مجموعه به این شکل داریم و لذا دوباره X یک مجموعه غیرتهی است به‌طوری که با اضافه کردن یال های بین x و s، رأسی دوقلو یا شبه دوقلو در G ایجاد نمی‌کند. انتهای اثبات همانند بخش اول است. $\square$

فصل ۴

تورنمنت‌ها

واضح است که هیچ دوقلوای در تورنمنت وجود ندارد. یک نمونه ضعیفتر از روش بخش ۴ در مقاله [۱۲] استفاده شده است، که کران $\gamma_L(T) \leq \frac{5n}{6}$ برای هر تورنمنت T می‌دهند. این با نشان دادن این که هر تورنمنت T دارای یک مجموعه غالب S با حداکثر $|S|$ بخش در افراز S از $V(T)\backslash S$ است، اثبات می‌شود.

توجه کنید که نسخه تقویت شده ما از این روش، با استفاده از نتیجه ۱۱ در بخش قبل کران بهتر $\gamma_L(T) \leq \frac{4n}{5} + 1$ را می‌سازد.

با این وجود، با استفاده از یک تکنیک متفاوت، ما در مرحله بعد کران بسیار قوی‌تری را ثابت می‌کنیم که (محدودتر) و دقیق‌تر است. ابتدا این کران را در تورنمنت‌های تراگذری ثابت می کنیم (که در واقع مقدار دقیق آن است).

گزاره ۱.۴. برای تورنمنت تراگذری T از مرتبه n، داریم $\gamma_L(T) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ و $\mathrm{loc}(T) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

اثبات: $V(T) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ در نظر بگیرید به‌طوری که v_i دارای یک همسایگی خروجی v_j با $i > j$ است. برای $\gamma(T) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ فرض کنید که مجموعه غالب شامل همه v_i ها با i فرد باشد. دو رأس v_i و v_j $(i < j)$ که در D نیستند با v_{j-1} مکان‌دار می‌شوند. حال قرار دهید D یک مجموعه غالب مکانی T باشد. لازم است که v_1 در D باشد، در غیراین صورت غالب نیست.

پس، هر دو رأس v_i، v_{i+1} شبه دوقلو هستند. با استفاده از گزاره ۱، لازم است که یکی از آن‌ها در D باشد. مجموعه‌های $\{v_i, v_{i+1}\}$ با i زوج و $i < n$ را در نظر بگیرید: آن‌ها جدا از هم هستند و هر کدام شامل یک رأس از D هستند. $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ از چنین مجموعه‌هایی وجود دارد، بنابراین داریم

$$|D| \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

برای مجموعه‌های مکانی، اگر n فرد باشد، مجموعه L را که شامل همه v_i با i زوج می‌شود را در نظر بگیرید. آن‌گاه L مجموعه مکانی از اندازه $\frac{n-1}{2}$ است. از آن جایی که $\mathrm{loc}(T) \geq \gamma_L(T) - 1$،

این مجموعه بهینه است. اگر n زوج باشد، حداکثر یک رأس در هر مجموعه $\{v_i, v_{i+1}\}$ با i فرد باید در مجموعه مکانی باشد. لذا حداقل $\frac{n}{2}$ رأس می‌دهد و بدین ترتیب $\mathrm{loc}(T) = \gamma_L(T)$. $\square$

اکنون کران بالایی را به هر تورنمنتی گسترش می‌دهیم.

قضیه ۲.۴. به‌ازای هر تورنمنت T از مرتبه n داریم $\gamma_L(T) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ و $\mathrm{loc}(T) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

اثبات: نتیجه را با استقراء اثبات می‌کنیم. از گزاره ۱۲ داریم که به‌ازای هر تورنمنت تراگذر و به‌ویژه اگر $n \leq 2$ باشد صحیح است. قرار دهید $n \geq 3$ و فرض کنید که این برای هر تورنمنت از مرتبه $k < n$ صحیح است.

T را تورنمنتی از مرتبه n که تراگذر نیست در نظر بگیرید. ابتدا مجموعه مکانی از اندازه $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ را به‌دست می‌آوریم.

x را هر رأسی در نظر بگیرید. قرار دهید $V_0 = N^-(x)$ و $V_x = N^+(x)$، افراز $\{x\}$ از $V(T) \backslash \{x\}$ باشند. n_0 و n_x را به‌ترتیب اندازه‌هایی از V_0 و V_x در نظر بگیرید. S_0 و S_x را به‌ترتیب دو مجموعه مکانی بهینه از تورنمنت شامل V_0 و V_x را در نظر بگیرید. با استقراء داریم، S_0 و S_x دارای حداکثر اندازه $\lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor$ و $\lfloor \frac{n_x}{2} \rfloor$ هستند. مجموعه $S = S_0 \cup S_x \cup \{x\}$ را در نظر بگیرید. این یک مجموعه مکانی از T است زیرا هر جفت u و v با $u \in V_0$ و $v \in V_x$ که توسط x مکان‌دار می‌شود. اندازه آن‌ها حداکثر $1 + \lfloor \frac{n_x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor$ است که برابر با $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ است اگر n_0 یا n_x فرد باشد. در این حالت کار تمام است، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که هر دو n_0 و n_x زوج هستند و بدین ترتیب n فرد است. از آن جایی که یک رأس دلخواه x انتخاب کردیم، می توان فرض کرد که همه رئوس دارای درجه خروجی و درجه ورودی زوج هستند (اگر نه، کار تمام است).

حال دو رأس دلخواه x و y با یالی از x به y را در نظر بگیرید. قرار دهید V_x، V_y، V_{xy} و V_0 افراز $\{x, y\}$ از $V \backslash \{x, y\}$ باشند (V_x شامل رئوسی است که x و نه y را در همسایه ورودی خود دارند). همانند قبل، اگر مجموعه مکانی کمینه در هر بخش از افراز را در نظر بگیریم و x و y را اضافه کنیم، مجموعه مکانی از T به‌دست می‌آوریم. اگر سه مجموعه از اندازه فرد ما بین چهار مجموعه باشد، با استفاده از استقراء، مجموعه مکانی از اندازه حداکثر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ به‌دست می‌آید. توجه کنید اگر V_{xy} دارای اندازه فرد باشد، آنگاه V_y نیز دارد زیرا y دارای درجه خروجی زوج است و همه همسایه‌های خروجی آن یا در V_y یا در V_{xy} است. از آن جا که مجموع اعداد رئوس فرد است، مجموعه اندازه فرد دیگری بین V_0 و V_x وجود دارد (که باید V_0 باشد). در مجموع، سه مجموعه اندازه فرد بین مجموعه‌های از افراز وجود دارد و بدین ترتیب مجموعه مکانی دارای حداکثر اندازه $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ است. بنابراین فرض می‌کنیم که برای هر جفت رأس از T عدد همسایه خروجی زوج باشد.

حال در نظر می‌گیریم که سه رأس x، y و z یک مثلث جهت دار $x \to y \to z \to x$ را ایجاد کنند (از آن جا که T تراگذر نیست پس وجود دارد). دوباره افراز $\{x, y, z\}$ از $V(T) \backslash \{x, y, z\}$ را در نظر می‌گیریم، مجموعه مکانی کمینه از هر بخش را در نظر می‌گیریم و x، y و z را به مجموعه مکانی به‌دست آمده اضافه می کنیم. اگر چهار مجموعه اندازه فرد در افراز وجود داشته باشد،

مجموعه مکانی به‌دست آمده، با استقراء، دارای اندازه حداکثر $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ است. در حقیقت، همیشه این‌طور است: اگر V_{xyz} (رئوسی که x، y و z را به عنوان همسایه ورودی دارند) از اندازه فرد باشد، آن‌گاه V_{xy} هم از اندازه فرد است زیرا $V_{xy} \cup V_{xyz}$ دقیقا مجموعه ای از همسایه‌های خروجی مشترک x و y با اندازه زوج است. به‌طور مشابه، V_{yz} و V_{xz} اندازه فرد هستند و کار تمام است. اگر V_{xyz} اندازه زوج باشد، آن گاه با استفاده از بحث مشابه، V_{xy}، V_{yz} و V_{xz} هم از اندازه زوج هستند. اما، آن گاه $V_x \cup V_{xy} \cup V_{xz} \cup V_{xyz} \cup \{y\}$ همسایه خارجی از x و دارای اندازه زوج است. بنابراین V_x اندازه فرد است. و مشابهاً V_y و V_z نیز اندازه فرد هستند. از آن جا که مرتبه T فرد است، V_0 باید اندازه فرد باشد و مسئله حل است.

به‌طور مشابه اثبات می‌کنیم که $\gamma_L(T) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. اگر n فرد باشد، کاملاً واضح است زیرا از نتایج اخیر داریم $\gamma_L(T) \leq \operatorname{loc}(T) + 1 \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. بنابراین فرض می‌کنیم که n زوج باشد. ابتدا رأس دلخواه x را می گیریم و افراز $\{x\}$ از V_0 و V_x را در نظر می گیریم. اگر مجموعه غالب مکانی برای V_0 را اختیار کنیم، مجموعه مکانی برای V_x و با اضافه کردن x، مجموعه غالب مکانی به‌دست می‌آید. از آن جایی که n زوج است، دقیقا یک مجموعه بین V_0 و V_x دارای اندازه فرد است. اگر $|V_0|$ زوج باشد، با استقراء، مجموعه غالب مکانی از اندازه حداکثر $|V_0|/2 + (|V_x| - 1)/2 + 1 = \frac{n}{2}$ را می‌دهد و کار تمام است. بدین ترتیب می توان فرض کرد که همه رئوس دارای درجه داخلی فرد درجه خارجی زوج هستند.

حال دو رأس دلخواه x و y با یک یال از x به y در T و مرتبط با افراز $\{x, y\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه غالب مکانی را برای V_0 در نظر بگیرید، مجموعه مکانی برای سه بخش دیگر و x و y مجموعه غالب مکانی می‌دهد. اگر دو مجموعه از افراز که V_0 نیستند و اندازه فرد هستند، مجموعه غالب مکانی از اندازه $\frac{n}{2}$ را می‌دهد و کار تمام است. پس ما می‌توانیم فرض کنیم که بین V_x و V_{xy} دقیقا یک مجموعه اندازه فرد وجود دارد. در واقع x دارای درجه خارجی زوج است و همسایه خارجی آن $V_x \cup V_{xy} \cup \{y\}$ است. بنابراین اگر V_y اندازه فرد باشد کار تمام است. پس، می‌توانیم فرض کنیم که V_y اندازه زوج است که این دلالت بر اندازه زوج بودن V_{xy} دارد. می‌توانیم فرض کنیم که همه جفت‌های رئوس دارای همسایه خارجی از اندازه زوج است، هستند.

سرانجام، مثلث دلخواه $x \to y \to z \to x$ و افراز $\{x, y, z\}$ را در نظر بگیرید. همانند قبل، با فرض x، y و z به‌صورت مجموعه غالب مکانی از V_0 و مجموعه‌های مکانی در هفت بخش دیگر، مجموعه غالب مکانی را به‌دست می‌آوریم. از آن جا که n زوج است، تعداد فرد از مجموعه‌های اندازه فرد در افراز وجود دارد. اگر سه مجموعه اندازه فرد وجود داشته باشد که V_0 نباشد، آن گاه مجموعه غالب مکانی مجموع دارای حداکثر اندازه $\frac{n}{2}$ است (در واقع اگر V_0 هم اندازه فرد باشد، آن گاه چهارمین مجموعه اندازه فرد خواهد بود که V_0 نیست). همانند قبل، اگر V_{xyz} اندازه فرد باشد، آن گاه V_{xy}، V_{xz} و V_{yz} هم اندازه فرد هستند و کار تمام است. اگر اندازه زوج باشد پس x، y و z دارای درجه خارجی زوج هستند، داریم V_x، V_y و V_z اندازه فرد هستند و کار تمام است.

بدین ترتیب، همیشه یک مجموعه غالب مکانی T از اندازه $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ وجود دارد. $\square$

گزاره ۳.۴. تورنمنت T_k از مرتبه $n = 3k$ در $\gamma_L(T_k) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ صدق می‌کند.

اثبات: D را یک مجموعه غالب مکانی بهینه از T_k قرار دهید. باید حداقل یک رأس از D در هر t_i وجود داشته باشد، در غیراین صورت رئوس t_i مکان‌دار نمی‌شوند. علاوه بر این، باید دو رأس از D در t_1 برای غالب شدن سه رأس از t_1 وجود داشته باشد.

فرض کنید که دو مثلث متوالی t_i و t_{i+1} وجود دارد که هر کدام تنها یک رأس در D دارد. قرار دهید d_i و d_{i+1} رئوسی از D باشند که در t_i و t_{i+1} هستند. پس، همسایه خروجی d_i در t_i و همسایه ورودی d_{i+1} در t_{i+1} مکان‌دار نمی‌شود که تناقض است.

بدین ترتیب، حداقل سه رأس از D در هر دو مثلث متوالی وجود دارد و حداقل دو رأس از D در اولین مثلث است که مجموع حداقل $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \lceil \frac{k}{2} \rceil + k$ رأس در D را می‌دهد. $\square$

فصل ۵

گراف‌های جهت‌دار بدون دور و رأس دوقلو

قضیه ۱.۵. (باندی [۲]). A و B را دو مجموعه از هم جدا از رئوس در گراف جهت‌دار قرار دهید به طوری که رئوس B دارای همسایه داخلی متمایز در A باشند. پس، زیرمجموعه $L \subseteq A$ از اندازه حداکثر $|B| - 1$ وجود دارد به طوری که رئوس B دارای همسایه ورودی متمایز در L هستند.

حال می‌توانیم قضیه زیر را اثبات کنیم. روش اثبات مشابه است، اما کمی پیچیده‌تر، مانند چیزی که در اثبات کران مشابه برای عدد غالب از گراف جهت دار بدون رأس دوقلو در [۱۲] استفاده شده است.

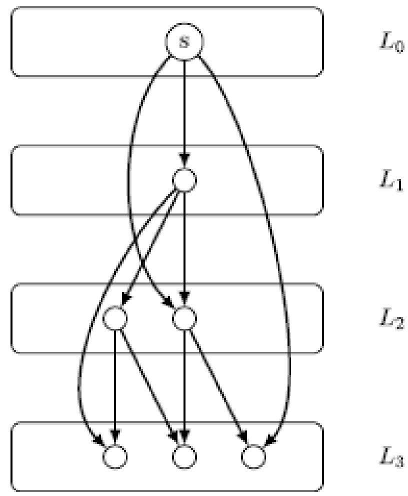
قضیه ۲.۵. اگر G یک گراف جهت دار بدون دور و رأس دوقلو با مرتبه n باشد، آنگاه $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

اثبات: s را مبدأ منحصربه فرد قرار دهید. مجموعه رأس را قدم به قدم افراز می‌کنیم. برای $i \geq 0$، مجموعه L_i شامل تمام مبدأها در $G_i = V(G) \setminus \bigcup_{j<i} L_j$ می‌شود. از آن جا که G بدون دور است و دارای تنها یک مبدأ ، تمام رئوس در L_i مشترک هستند. m را آخرین L_i غیرتهی بگیرید. شکل ۴ را ببینید.
ادعاهای زیر نتایج مستقیم این قضیه‌ها است.

ادعا ۳.۵. قرار دهید $v \in L_i$، $(i > 0)$. آن گاه v دارای یک همسایه داخلی در L_{i-1} است.

ادعا ۴.۵. هیچ یالی در داخل هیچ مجموعه L_i نیست.

ادعا ۵.۵. هیچ یالی از L_j به L_i برای $j > i$ وجود ندارد.



شکل ۱.۵: مراحل در اثبات قضیه ۱۶.

حال مجموعه غالب مکانی D از G را می‌سازیم. برای $i = m, \dots, 1$ قدم به قدم زیرمجموعه‌های D_i از D را می‌سازیم. همچنین $L'_i = L_i \setminus \bigcup_{j>i} D_j$ را تعریف می‌کنیم به‌طوری که در ابتدای کار $(i = m)$ قرار می دهیم $L'_m = L_m$.

ما ضمانت می‌کنیم که $D_i \cap L_{i-1}$ بر L'_i غالب است، و D_i رئوس L'_i را مکان‌دار می‌کند.

$P_1, \dots, P_k$ را افراز L_{i-1} از L'_i قرار دهید. به‌ویژه، رئوس در این افراز به ترتیب با L_{i-1} دوقلو هستند. برای هر j، v_j را رأسی از P_j قرار دهید. با کران‌های قضیه (قضیه ۱۵)، مجموعه S دارای حداکثر k رأس در L_{i-1} است که با $v_1, \dots, v_k$ مکان‌دار و غالب می‌شود.

دوباره با استفاده از کران‌های قضیه، به ازای هر $1 \leq j \leq k$، مجموعه S_j از رئوس $|P_j| - 1$ در G وجود دارد که P_j را مکانیابی می کند. توجه کنید که رئوس S_j به $\bigcup_{j<i-1} L_j$ تعلق دارند. قرار دهید $D_i = S \cup \bigcup_{j=1}^{k} S_j$. آنگاه $D_i \cap L_{i-1} = S$ بر L'_i غالب است و D_i، L'_i را مکان‌دار می‌کند.

$$|D_i| \leq k + \sum_{j=1}^{k} (|P_j| - 1) = |L'_i|$$

حال ثابت می کنیم که $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i \cup \{s\}$ یک مجموعه غالب مکانی است. مجموعه D مجموعه غالب است زیرا به‌ازای هر x خارج از $D(x \in L_i)$، x توسط $D_i \cap L_{i-1}$ غالب است. همچنین مکانی است زیرا اگر دو رأس u و v در L_i وجود داشته باشند، آن‌ها توسط D_i مکان‌دار می‌شوند و اگر آن‌ها به ازای $i < j$ از L_i و L_j متفاوت باشند، $u \in L_i$ توسط همسایه داخلی اش در $L_{i-1} \cap D_i$ مکان‌دار می‌شود.

حال اندازه D را محدود می‌کنیم. در هر قدم $i = m, \dots, 1$ در ساختار خودمان داریم

$|L'_i| \leq |D_i|$. بنابراین، حداکثر به تعداد رئوس در $D' = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$، در $V(G)\backslash D'$ وجود دارد (D_i تنها شامل رئوسی است که در L_j هستند، $j < i$. بنابراین $V(G)\backslash D$ دقیقا مجموعه از همه رئوس در مجموعه‌های L'_i است). پس اگر $D' = D$ (صحیح است چون D' شامل s است)، داریم $|D| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. اما اگر D' شامل s نباشد، در حقیقت داریم، حداکثر به تعداد رئوس در D'، در $V(G)\backslash(D' \cup \{s\})$ وجود دارد. بدین ترتیب $|D| \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ و

$$|D| = |D'| + 1 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

□

کران قضیه ۱۶ با در نظر گرفتن مسیرهای جهت دار به بهترین وجه ممکن است (اثبات موارد زیر آسان است، بنابراین ما آن را حذف می کنیم).

گزاره ۶.۵. برای مسیر جهت دار P_n از مرتبه n، داریم $\gamma(P_n) = \gamma_L(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

فصل ۶

نتیجه‌گیری

ما مقاله را با جدول ۱ به پایان می‌رسانیم که کران بالاهای شناخته شده در عداد غالبی و غالب مکانی برای کلاس‌های خاصی از گراف‌های جهت دار را خلاصه می‌کند.

سوال اصلی ناشی از نتایج مقاله‌ای که روی آن کار کردم این است که آیا هر گراف جهت دار جفتی باز از مرتبه n، مجموعه غالب مکانی به اندازه $\frac{2n}{3}$ را می پذیرد؟ همچنین، تعیین این که تورنمنت‌ها و گراف‌های جهت دار بدون دور و رأس دوقلو از مرتبه n با عدد غالب مکانی دقیقاً $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ کدامند، جالب خواهد بود.

ما همچنین می‌پرسیم که آیا گزاره ۹ را می‌توان به صورت زیر تقویت کرد: آیا درست است که هر گراف جهت‌دار بدون مبدأ دارای مجموعه غالب با اندازه مینیمم S با $|S|/2$ رأس در S دارای یک همسایه خصوصی خروجی S است؟

Class of digraphs	γ	γ_L
Source-free	$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ [14]	$n-1$ [Proposition 5]
Twin-free and source-free	$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ [14]	$\leq \frac{4n}{5}$ [Corollary 10] ($\geq \frac{2(n-2)}{3}$ [Proposition 3])
Twin-free, source-free and quasi-twin-free	$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ [14]	$\leq \frac{3n}{4}$ [Corollary 10] ($\geq \frac{2(n-2)}{3}$ [Proposition 3])
Tournaments	$\lceil \log_2 n \rceil$ [15]	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$ [Theorem 13, Propositions 12, 14]
Acyclic twin-free	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$ [Theorem 16, Proposition 17]	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$ [Theorem 16, Propositions 12, 17]
Strongly connected	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$ [13]	$n-1$ [Proposition 5]

جدول ۱: خلاصه کران‌های بالای شناخته شده برای اعداد غالب و غالب مکانی گراف‌های جهت‌دار، همراه با مراجع. خانه‌های جدول که تنها یک عدد دارند با کران‌های کوچک مطابقت دارند. در خانه‌های دیگر، ما کران بالایی شناخته شده و اندازه بزرگترین ساختار شناخته شده را نشان می دهیم.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

بدون دور	Acyclic
تراگذر	Transitive
دوقلو	Twin
رأس	Vertex
کران	Bound
گراف جهت‌دار	Digraphs
قویاً همبند	conected Strongly
مبدأ	Source
مجموعه غالب	set Dominating
مجموعه مکانی	Locating-set
مجموعه غالب مکانی	set Locating-dominating
مقصد	Sink
همسایه	Neighbour
همسایه ورودی	In-neighbour
همسایه خروجی	Out-neighbour
یال	arc Edge،
یال چندگانه	

کتاب‌نامه

[1] B. Bollobás, E.J. Cockayne, Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance, J. Graph Theory 3 (1979) 241–249.

[2] J.A. Bondy, Induced subsets, J. Combin. Theory Ser. B 12 (1972) 201–202.

[3] I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein, Identifying and locating-dominating codes: NP-completeness results for directed graphs, IEEE Trans. Inform. Theory 48 (8) (2002) 2192–2200.

[4] F. Foucaud, M.A. Henning, Location-domination and matching in cubic graphs, Discrete Math. 339 (2016) 1221–1231.

[5] F. Foucaud, M.A. Henning, Location-domination in line graphs, Discrete Math. 340 (2017) 3140–3153.

[6] F. Foucaud, M.A. Henning, C. Löwenstein, T. Sasse, Locating-dominating sets in twin-free graphs, Discrete Appl. Math. 200 (2016) 52–58.

[7] F. Foucaud, R. Naserasr, A. Parreau, Characterizing extremal digraphs for identifying codes and extremal cases of Bondy's theorem on induced subsets, Graphs Combin. 29 (3) (2013) 463–473.

[8] Y. Fu, Dominating set and converse dominating set of a directed graph, Amer. Math. Monthly 75 (1968) 861–863.

[9] D. Garijo, A. González, A. Márquez, The difference between the metric dimension and the determining number of a graph, Appl. Math. Comput. 249 (2014) 487–501.

[10] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[11] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), Domination in Graphs: Advanced Topics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[12] S. Heydarshahi, Location-Domination in Twin-Free Graphs and Digraphs (Master thesis), Université Paris Sorbonne, 2018.

[13] C. Lee, On the Domination Number of a Digraphs (Ph.D. thesis), Michigan State University, 1994.

[14] C. Lee, Domination in digraphs, J. Korean Math. Soc. 4 (1998) 843–853.

[15] N. Meggido, U. Vishkin, On finding a minimum dominating set in a tournament, Theoret. Comput. Sci. 61 (1988) 307–316.

[16] O. Ore, Theory of graphs, Amer. Math. Soc. Colloq. 38 (1962) 206–212.

[17] D.F. Rall, P.J. Slater, On location-domination numbers for certain classes of graphs, Congr. Numer. 45 (1984) 97–106.

[18] P.J. Slater, Domination and location in acyclic graphs, Networks 17 (1) (1987) 55–64.

[19] P.J. Slater, Dominating and reference sets in graphs, J. Math. Phys. Sci. 22 (4) (1988) 445–455.

Abstract

A dominating set D in a digraph is a set of vertices such that every vertex is either in D or has an in-neighbour in D. A dominating set D of a digraph is locating-dominating if every vertex not in D has a unique set of in-neighbours within D. The location-domination number $\gamma_L(G)$ of a digraph G is the smallest size of a locating-dominating set of G. We investigate upper bounds on $\gamma_L(G)$ in terms of the order of G. We characterize those digraphs with location-domination number equal to the order or the order minus one. Such digraphs always have many twins: vertices with the same (open or closed) inneighbourhoods. Thus, we investigate the value of $\gamma_L(G)$ in the absence of twins and give a general method for constructing small locating-dominating sets by the means of special dominating sets. In this way, we show that for every twin-free digraph G of order n, $\gamma_L(G) \leq \frac{4n}{5} + 1$ holds, and there exist twin-free digraphs G with $\gamma_L(G) = \frac{2(n2)}{3}$. Improved bounds are proved for certain special cases. In particular, if G is twin-free tournament, or twin-free and acyclic, we prove $\gamma_L(G) \leq \lfloor \frac{2}{n} \rfloor$. which is tight in both cases.

College of Science
School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Domination and location in twin-free digraphs

Sadra Dashti

Supervisor: Morteza Mohammad-noori

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of B.Sc. in Computer Science

2022/2/13