پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

بررسی وجود درختان صحیح با قطر دلخواه

نگارنده

بهار باقری

استاد راهنما
دکتر مرتضی محمدنوری

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی
در رشته علوم کامپیوتر

زمستان ۱۴۰۱

چکیده

رده‌ای از گراف‌ها را که همهٔ مقادیر ویژه‌های ماتریس مجاورت آن‌ها، صحیح است، «گراف‌های صحیح» می‌گویند. موضوع این نوشتار شرح و بسط اثبات وجود درختان صحیحی با قطر دلخواه است. پیتر چیکواری[1] در سال ۲۰۱۰، ثابت کرد که برای هر عدد زوج دلخواه مانند $۲k$ میتوان درخت صحیحی با قطر $۲k$ ساخت؛ به طور خاص برای هر مجموعه S از اعداد صحیح مثبت درخت صحیحی وجود دارد که مقادیر ویژه مثبت آن اعضای S بوده و قطر آن برابر $۲|S|$ است. قربانی و همکاران، در سال ۲۰۱۲، نشان دادند برای هر عدد فرد دلخواه مانند $۲k + ۱$ نیز درخت صحیحی به قطر $۲k + ۱$ موجود است. به این ترتیب همواره می‌توان درخت صحیحی با قطر دلخواه یافت.

[1]Péter Csikvári

سپاسگزاری

از استاد گران‌قدر خود دکتر محمدنوری سپاس‌گزارم که مشفقانه و بردبارانه یاریگر اینجانب بوده‌اند.

پیشگفتار

در مطالعهٔ جبری گراف‌ها مقادیر ویژهٔ ماتریس مجاورت گراف نقش مهمی ایفا می‌کنند؛ رده‌ای از گراف‌ها که تمام مقادیر ویژهٔ آن‌ها صحیح هستند را گراف‌های صحیح می‌نامیم. هراری[۲] و شونک[۳] [۱] تلاش برای پاسخ به این سوال طبیعی که «چه گراف‌هایی صحیح هستند؟» را آغاز کردند. پاسخ به این سوال در حالت کلی بسیار دشوار است، بنابراین تلاش‌ها در این زمینه به حالات خاص‌تری معطوف می‌شود؛ درختان صحیح خانواده مهمی از این گراف‌ها هستند که تلاش‌های متعددی برای شناسایی آنها شده است. تا سال ۲۰۱۰ اگرچه رده‌های نامتناهی از درختان صحیح شناسایی شده بودند اما قطر تمامی آنها کراندار بود. بنابراین این سوال مطرح بود که آیا درختان صحیحی با قطر دلخواه وجود دارند؟

جواب سوال فوق مثبت است و موضوع این پروژه اثبات این پاسخ خواهد بود؛ چیکواری[۴] [۲] ثابت کرد که برای هر عدد زوج دلخواه مانند $۲k$ میتوان درخت صحیحی با قطر $۲k$ ساخت؛ به طور خاص برای هر مجموعه S از اعداد صحیح مثبت درخت صحیحی وجود دارد که مقادیر ویژه مثبت آن اعضای S بوده و قطر آن برابر $۲|S|$ است. قربانی و همکاران [۳] نشان دادند برای هر عدد فرد دلخواه مانند $۲k + ۱$ نیز درخت صحیحی به قطر $۲k + ۱$ موجود است. به این ترتیب همواره می‌توان درخت صحیحی با قطر دلخواه یافت.

رویکرد اثبات ساختنی چیکواری، رویکردی ایده‌محور و خلاقانه است که برای فهم آن پیشنیاز اندکی از جبر خطی و مفاهیم اولیهٔ گراف‌ها و چند قضیه ابتدایی نظریهٔ طیفی گراف‌ها کفایت می‌کند. همینطور اثبات قربانی و دیگران نوعی بسط ایدهٔ اولیهٔ چیکواری است و فهم آن پیشنیازهای مشابهی دارد. در بخش اول به معرفی مفاهیم و تعاریف و قضایای لازم برای ادامهٔ کار می‌پردازیم. به طوری که این نوشتار برای خواننده با دانش مقدماتی جبر خطی قابل دنبال کردن باشد.

[2] Frank Harary
[3] Allen J. Schwenk
[4] Péter Csikvári

در بخش دوم، به بیان نتایج اصلی و اثبات آن‌ها می‌پردازیم؛ با ارائه سه تعریف متفاوت معادل از رده‌ای از گراف‌ها که به عنوان «گراف چیکواری» معرفی می‌شوند، فصل دوم این نوشتار کوششی برای شرح، بسط و تکمیل جزئیات اثبات‌های مطرح‌شده در مقاله‌های چیکواری [۲] و قربانی و دیگران [۳] خواهد بود.

فهرست مطالب

اول مفاهیم اولیه و مقدمات ۳

۱ تعاریف اولیه ۴

۲ قضایا و نتایج اولیه ۸

دوم نتایج اصلی ۱۱

۳ وجود درختان صحیح با قطر دلخواه زوج ۱۲

۴ درختان چیکواری از نگاهی دیگر ۲۱

۵ وجود درختان صحیح با قطر دلخواه فرد ۲۴

فهرست تصاویر

۱.۱ $K_{۱,۷}$ ۶
۱.۳ ساخت بازگشتی گراف دوبخشی $T_{i+۱}$ ۱۳

فهرست نمادگذاری

مجموعهٔ اعداد طبیعی، صحیح، گویا و حقیقی .... $\mathbb{N}$ یا $\omega, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

مجموعهٔ یال‌های گراف G .... $E(G)$

تعداد یال‌های گراف G .... $e(G)$

مجموعه رئوس گراف G .... $V(G)$

تعداد رئوس گراف G .... $v(G)$

مجموعه مقادیر ویژه (طیف) گراف G .... $SP(G)$

تعداد مقادیر ویژهٔ مثبت گراف G .... N_G^+

تعداد مقادیر ویژهٔ منفی گراف G .... N_G^-

مرتبهٔ تکرار مقدار ویژهٔ t از گراف G .... $N_G(t)$

چندجمله‌ای مشخصهٔ گراف G .... $\varphi(G)$

اثر ماتریس A .... $tr(A)$

درجهٔ راس v .... $deg(v)$

بخش اول

مفاهیم اولیه و مقدمات

فصل ۱

تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱. گراف G یک دو تایی مانند (V, E) است، به طوری که V یک مجموعهٔ متناهی و ناتهی است که هر عضوش را یک راس می‌نامیم و E مجموعه‌ای از دوتایی‌های نامرتب از رئوس متمایز است که یال نام دارند.

تذکر ۲.۱. تعریف ارائه‌شده در اینجا برای یک گراف، در برخی متون دیگر به عنوان گراف ساده تعریف می‌شود و در تعریف کلی گراف، یال‌ها را ممکن است دو تایی‌های مرتب از رئوس در نظر بگیرند که لزوما متمایز نیستند. اما در این نوشتار چون بحث بر سر گراف‌های ساده خواهد بود، تعریف گراف را همان تعریف ۱.۱ در نظر می‌گیریم.

تذکر ۳.۱. یال $\{v, w\}$ را معمولا vw می‌نویسیم.

تعریف ۴.۱. در گراف $G = (V, E)$ گوییم رئوس $v, w \in V$ همسایه هستند، اگر $vw \in E$. و w را همسایهٔ w می‌نامیم و برعکس. همچنین، گوییم یال vw با رئوس v و w هم‌وقوع است.

تعریف ۵.۱. تعداد همسایه‌های هر راس یک گراف را، درجهٔ آن راس می‌نامیم.

تعریف ۶.۱. گراف $G = (V, E)$ و k را یک عدد طبیعی در نظر بگیرید. دنباله w از رئوس $v_1, v_2, \ldots, v_k$ را یک گشت گوییم اگر برای هر $1 \leq i \leq k - 1$، $v_i v_{i+1} \in E$. اگر w هیچ راس تکراری‌ای نداشته باشد یعنی برای هر $1 \leq i, j \leq k$ که $i \neq j$، $v_i \neq v_j$، آنگاه w را یک مسیر می‌نامیم و طول آن را $k - 1$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۷.۱. گراف $G = (V, E)$ و k را یک عدد طبیعی در نظر بگیرید. گشت w از رئوس $v_1, v_2, \dots, v_k$ را یک دور (یا مسیر بسته) گوییم اگر به جز v_1 و v_k همه رئوس آن متمایز باشند و $v_1 = v_k$.

تعریف ۸.۱. گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. برای هر دو راس متمایز $v, w \in V$، فاصله v و w را طول کوتاهترین مسیر بین آن‌ها تعریف می‌کنیم و با $d(v, w)$ نشان می‌دهیم. همچنین فاصله هر راس از از خودش را صفر در نظر می‌گیریم.

تذکر ۹.۱. طبق تعریف، طول هر مسیر یک عدد صحیح نامنفی است، بنابراین در صورتی که بین دو راس مسیری وجود داشته یاشد، طبق اصل خوش‌ترتیبی تعریف بالا بامعنی است و اگر هیچ مسیری بین دو راس موجود نباشد، قرار می‌دهیم $d(v, w) = \infty$.

تعریف ۱۰.۱. گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. طول مسیر بین دورترین رئوس گراف G را، قطر G می‌نامیم و با d نشان می‌دهیم. یعنی قطر ماکسیمم فاصله بین رئوس گراف است.

تعریف ۱۱.۱. گراف G همبند گوییم اگر بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

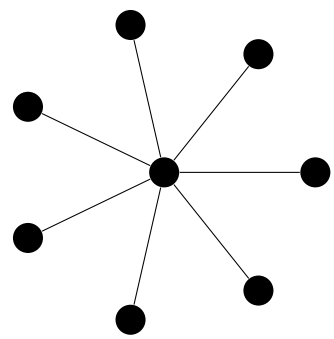
تعریف ۱۲.۱. گراف G را یک جنگل می‌نامیم اگر دور نداشته باشد. هر جنگل همبند را یک درخت می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱. درخت T در نظر بگیرید. اگر راس دلخواه v_0 از درخت را ریشهٔ درخت بنامیم، T را یک درخت ریشه‌دار گوییم و فاصله هر راس از v_0 را عمق آن راس تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۴.۱. گراف $G = (V, E)$ را دوبخشی می‌نامیم اگر بتوان مجموعهٔ راس‌های آن را به دو قسمت A و B افراز کرد به طوری که هیچ یالی با دو راس در یک مجموعه هم‌وقوع نباشد. G را به صورت $G = (A, B, E)$ نمایش می‌دهیم و A و B را رده‌های رنگی G می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱. گراف دو بخشی $G = (A, B, E)$ را کامل می‌نامیم اگر هر راس در A با تمام رئوس B هم‌وقوغ باشد و هر راس در B با تمام رئوس A. همچنین اگر $|A| = r$ و $|B| = s$، G را با $K_{r,s}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱. گراف‌های $G = (V_G, E_G)$ و $H = (V_H, E_H)$ را در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم $G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$.



شکل ۱.۱: $K_{۱,۷}$

تعریف ۱.۱۷. گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. ماتریس $|V| \times |V|$ مانند M را ماتریس مجاورت گراف G می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{ij} = \begin{cases} ۱ & ij \in E \\ ۰ & ij \notin E \end{cases}$$

مجموعه مقادیر ویژهٔ M را طیف G می‌نامیم و با $Sp(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین، هر مقدار ویژهٔ M را مقدار ویژهٔ G و چندجمله‌ای مشخصهٔ M را چندجمله‌ای مشخصهٔ G گوییم.

مثال ۱.۱۸. گرافی را که یک راس آن به همه رئوس دیگر متصل باشد و بین باقی رئوس هیچ یالی نباشد، گراف ستاره‌ای می‌گوییم. برای مثال شکل ۱.۱ یک گراف ستاره‌ای ۸ راسی را نشان می‌دهد.

ماتریس مجاورت یک گراف ستاره‌ای $(n+۱)$-راسی به فرم زیر است:

$$M = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۰ & \dots & ۰ \end{bmatrix}$$

حالا مقادیر ویژهٔ مربوطه را محاسبه می‌کنیم:

$$det(M - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & ۱ & \dots & ۱ \\ ۱ & -\lambda & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۱ & ۰ & \dots & -\lambda \end{bmatrix} = (-۱)^n(\lambda^n - n\lambda^{n-۱})$$

بنابراین مقادیر ویژهٔ ماتریس ستاره‌ای عبارتند از صفر با مرتبه تکرار $n - ۱$ و $\pm\sqrt{n}$.

تعریف ۱.۱۹. گرافی که همه مقادیر ویژهٔ آن صحیح باشند را گراف صحیح می‌نامیم.

فصل ۲

قضایا و نتایج اولیه

قضیه ۱.۲. مجموع درجات رئوس یک گراف برابر با دو برابر تعداد یال‌های آن است.

اثبات. درجهٔ هر راس برابر تعداد یال‌های هم‌وقوع با آن راس است. و چون هر یال دقیقا با دو راس هم‌وقوع است، در مجموع درجات رئوس، هر یال دو بار تکرار می‌شود. بنابراین حکم برقرار است. □

قضیه ۲.۲. گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر دور به طول فرد نداشته باشد.

اثبات. رجوع کنید به [۷]. □

نتیجه ۳.۲. هر درخت یک گراف دوبخشی است.

اثبات. طبق تعریف، درخت دور ندارد، بنابراین، دور فرد هم ندارد و گرافی دوبخشی است. □

لم ۴.۲. اگر A یک ماتریس حقیقی متقارن باشد، A قطری‌پذیر است و همهٔ مقادیر ویژهٔ آن حقیقی‌اند.

اثبات. رجوع کنید به [۶]. □

لم ۵.۲. در هر ماتریس، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر مجموع مقادیر ویژهٔ ماتریس است.

اثبات. رجوع کنید به [۶]. □

قضیه ۶.۲. مقادیر ویژهٔ یک گراف ساده همگی حقیقی و مجموعشان برابر صفر است.

اثبات. فرض کنید M ماتریس مجاورت یک گراف ساده مانند G باشد. چون یال‌ها جهت ندارند، M متقارن است و طبق لم ۴.۲ همهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس حقیقی متقارن، حقیقی هستند. به علاوه، گراف ساده طوقه ندارد، بنابراین تمام درایه‌های روی قطر اصلی M برابر صفرند. بنابراین $tr(M) = ۰$. از طرفی چون طبق لم ۵.۲ مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر مجموع مقادیر ویژه است پس مجموع مقادیر ویژهٔ ماتریس مجاورت برابر سفر است. □

قضیه ۷.۲. اگر M ماتریس مجاورت گراف G باشد، آنگاه درایهٔ ij از ماتریس M^k برابر تعداد گشت‌های به طول k از راس v_i به راس v_j خواهد بود.

اثبات. جکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. حکم برای $k = ۱$ طبق تعریف ماتریس مجاورت برقرار است. فرض کنیم حکم برای $k - ۱$ برقرار باشد. می‌دانیم $A^k = A^{k-۱}A$؛ در سطر iم از ماتریس $A^{k-۱}$ تعداد گشت‌ها به طول $k - ۱$ از v_i به هر کدام از دیگر رئوس موجود است. چون هر گشت به طول k از v_i به راسی مانند v_j گشتی به طول $k - ۱$، از v_i به راسی مانند v_t است که v_t به v_j متصل است، حاصل ضرب کردن سطر iم از $A^{k-۱}$ در ستون j از A برابر تعداد گشت‌های به طول k از v_j به v_j خواهد بود. □

قضیه ۸.۲. مجموع مربعات مقادیر ویژهٔ هر گراف مانند G برابر مجموع درجات رئوس و بنابراین دو برابر تعداد یال‌های گراف است.

اثبات. فرض کنید M ماتریس مجاورت گراف G باشد. ماتریس $M^۲$ را تشکیل می‌دهیم. M متقارن است یعنی برای هر i، سطر iم و ستون iم آن برابرند، بنابراین درایه‌های روی قطر اصلی $M^۲$ برابر درجه رئوس خواهند بود. از طرفی λ مقدار ویژهٔ M است اگر و تنها اگر $\lambda^۲$ مقدار ویژهٔ $M^۲$ باشد. پس داریم:

$$tr(M^۲) = \sum_{\lambda \in Sp(G)} \lambda^۲ = \sum_{v \in V(G)} deg(v).$$

□

قضیه ۹.۲. گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر طیف آن حول صفر متقارن باشند. یعنی اگر α مقدار ویژهٔ گراف از مرتبهٔ تکرار k باشد، آنگاه $-\alpha$ نیز مقدار ویژهٔ گراف از مرتبهٔ k باشد.

اثبات. رجوع کنید به [۴]. □

قضیه ۱۰.۲. اگر d قطر گراف G باشد، آنگاه داریم:

$$d \leq |Sp(G)| - ۱.$$

یعنی قطر یک گراف حداکثر به اندازهٔ یک واحد کمتر از تعداد مقادیر ویژهٔ متمایزش است.

اثبات. رجوع کنید به [۵]. □

قضیه ۱۱.۲. اگر $\varphi(G)$ و $\varphi(H)$، به ترتیب چندجمله‌ای‌های مشخصهٔ گراف‌های G و H باشند، آنگاه $\varphi(G)\varphi(H)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ $G \cup H$ می‌باشد.

اثبات. اگر M_G ماتریس مجاورت G و M_H ماتریس مجاورت H باشد، طبق تعریف،

$$M_{G\cup H} = \begin{bmatrix} M_G & ۰_{|V(G)\times|V(H)|} \\ ۰_{|V(H)\times|V(G)|} & M_H \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$det(M_{G\cup H}) - \lambda I = det \begin{bmatrix} M_G - \lambda I & ۰_{|V(G)\times|V(H)|} \\ ۰_{|V(H)\times|V(G)|} & M_H - \lambda I \end{bmatrix} = det(M_G - \lambda I) det(M_H - \lambda I).$$

□

بخش دوم

نتایج اصلی

فصل ۳

وجود درختان صحیح با قطر دلخواه زوج

تعریف ۱.۳. به ازای اعداد صحیح و مثبت r_1، r_2، ...، r_k، گراف‌های
$T_1(r_1)$، $T_2(r_1, r_2)$، ...، $T_k(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ را به صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم؛ T_i را گرافی دو بخشی با مجموعه رئوس A_{i-1} و A_i در نظر می‌گیریم.

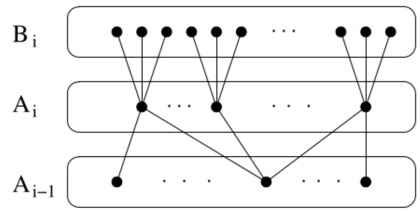
۱. $T_1(r_1) = (A_0, A_1)$ که $|A_0| = 1$ و $|A_1| = r_1$. یعنی T_1 گراف ستاره‌ای با $r_1 + 1$ راس است.

۲. اگر $T_i(r_1, r_2, \ldots, r_i) = (A_{i-1}, A_i)$ تعریف شده باشد،
$T_{i+1}(r_1, r_2, \ldots, r_{i+1}) = (A_i, A_{i+1})$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: هر راس از A_i را به r_{i+1} راس جدید از درجه یک وصل می‌کنیم؛ مجموعه این $r_{i+1}|A_i|$ راس جدید را B_i می‌نامیم و قرار می‌دهیم مجموعه $A_{i+1} = A_{i-1} \cup B_i$ (A_i تغییر نمی‌کند).

T_k را یک درخت چیکواری[1] مرتبهٔ k می‌نامیم.

در ادامه این بخش می‌خواهیم نشان دهیم گراف T_i معرفی شده در تعریف بالا، یک درخت با قطر $2i$ است و می‌توان پارامترهای r_1، r_2، ...، r_k را طوری انتخاب کرد که همه مقادیر ویژه این درخت صحیح باشند و به این ترتیب همان شاهد وجود درخت صحیح با قطر به اندازه دلخواه بزرگ است. ابتدا درخت بودن را اثبات می‌کنیم.

[1] Csikvari



شکل ۱.۳: ساخت بازگشتی گراف دوبخشی T_{i+1}

لم ۲.۳. به ازای اعداد صحیح مثبت r_1، r_2، ...، r_k، گراف $T_K(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ یک درخت است.

اثبات. برای آنکه اثبات کنیم یک گراف درخت است، طبق تعریف باید نشان دهیم همبند و بدون دور است؛ هردو مورد را برای T_k به استقرا نشان می‌دهیم.

$T_1(r_1)$ طبق تعریف همان گراف ستاره‌ای $r_1 + 1$ راسی است و واضحا همبند و بدون دور است. بنابراین پایهٔ استقرا صادق است.

حال فرض کنید، $T_{i-1}(r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}) = (A_{i-2}, A_{i-1})$ همبند و بدون دور باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $T_i(r_1, r_2, \ldots, r_i) = (A_{i-1}, A_i)$ نیز چنین است. فرض کنید T_i همبند نباشد؛ بنابراین دو راس مانند u و v وجود دارند که مسیری بینشان وجود ندارد. چون T_{i-1} طبق فرض استقرا همبند است و T_i از اضافه کردن تعدادی راس درجه یک (B_{i-1}) به T_{i-1} ساخته شده است، حداقل یکی از رئوس u و v در B_{i-1} است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $u \in B_{i-1}$. پس طبق تعریف، u درجه یک است و تنها با راسی مانند $a_u \in A_{i-1}$ همسایه است. بنابراین بین a_u و v مسیری وجود ندارد زیرا در غیر این صورت از طریق یال a_uu به مسیری بین u و v قابل گسترش است. اگر $v \notin B_{i-1}$ بین a_u و v در T_{i-1} مسیری نیست که با همبندی T_{i-1} طبق فرض استقرا در تناقض است و اگر $v \in B_{i-1}$، راسی مانند $a_v \in A_{i-1}$ وجود دارد که تنها همسایه v است و مشابه استدلال قبل، بین a_v و a_u در T_{i-1} وجود نخواهد داشت که مجددا با همبندی T_{i-1} در تناقض است. بنابراین T_i همبند است. به علاوه، اگر T_i دور داشته باشد، چون طبق فرض استقرا T_{i-1} بدون دور است، راسی از B_{i-1} باید در دور باشد. در حالی که همهٔ رئوس B_{i-1} درجهٔ یک هستند و نمی‌توانند در هیچ دوری باشند. بنابراین T_i بدون دور و درخت است. □

برای ادامهٔ بحث درباره ویژگی‌های T_k به عنوان یک درخت، ابتدا سعی می‌کنیم تعریف آن را که مبتنی بر ساخت یک گراف دوبخشی بود بیشتر بررسی کنیم؛ شهود ما از مفهوم درخت عمدتا به مفهوم

درخت ریشه‌دار نزدیک‌تر است. چطور می‌توان تعریف اولیه ارائه شده را با این شهود مطابقت داد؟ اگر تک راس مجموعه اولیهٔ A_0 را v_0 بنامیم و v_0 را ریشهٔ T_k در نظر بگیریم، در هر مرحله رئوس جدید اضافه شده و رئوس حاضر در A_i (برای هر $1 \leq i \leq k$) چه وضعیتی نسبت به v_0 دارند؟ به سادگی و با استفاده از استقرا می‌توان دید که برای هر $i \in \mathbb{N}$ مجموعه A_{2i} برابر مجموعه رئوسی هستند که فاصله آن‌ها از v_0 عددی زوج است و A_{2i+1} مجموعه رئوس به فاصلهٔ فرد از v_0 هستند. بنابراین در ساخت درخت $2i+1$اُم که رئوس جدید به مجموعهٔ A_{2i} می‌شوند، در واقع به هریک از رئوس با عمق زوج در درخت مرحلهٔ قبل r_{2i} راس جدید متصل می‌کنیم. و در مرحلهٔ بعد، برای رئوس با عمق فرد این کار تکرار می‌شود. لم بعدی به بیان همین بازتعریف از T_i اختصاص دارد.

لم ۳.۳. اگر درخت ریشه‌دار $C_k(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ با ریشهٔ v_0 به صورت بازگشتی و این گونه تعریف شده باشد: C_0 را گراف تک‌راسی v_0 در نظر می‌گیریم و اگر $C_i(r_1, r_2, \ldots, r_i)$ تعریف شده باشد، برای ساختن $C_{i+1}(r_1, r_2, \ldots, r_{i+1})$ به همهٔ رئوسی که عمق آن‌ها از نظر زوجیت با i یکسان است، r_{i+1} راس جدید وصل می‌کنیم، آنگاه $C_k(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ با $T_k(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ یکریخت است.

با استفاده از این نگاه جدید، حال می‌توانیم طول قطر درختان معرفی‌شده را به سادگی محاسبه کنیم؛

لم ۴.۳. اگر $r_1 \geq 2$، آنگاه طول قطر $T_k(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ برابر است با $2k$.

اثبات. اثبات می‌کنیم که اولا، چون فاصله هر راس از v_0 حداکثر k است، طول قطر حداکثر $2k$ است و ثانیا، دو راس در فاصله $2k$ از یکدیگر وجود دارد.

به استقرا روی k ثابت می‌کنیم در T_k فاصله هر راس از v_0 حداکثر k است. پایهٔ استقرا برای $k=1$ واضح است. فرض کنید حکم برای $k=i$ برقرار باشد. در T_{i+1} کافی است حکم را برای رئوس جدید از درجه یک اثبات کنیم زیرا برای باقی رئوس طبق فرض استقرا حکم برقرار است. فرض کنید راس جدیدی مانند v به فاصلهٔ d از v_0 چنان موجود است که $d \geq i+2$. چون v از درجه یک است، و با راسی مانند a_v همسایه است، مسیر به طول d از v به v_0 حتما از a_v می‌گذرد. بنابراین مسیر به طول $d-1$ از a_v به v_0 موجود است و چون a_v و v_0 هر دو در T_i حاضرند و رئوس جدید همگی درجه یک هستند، مسیر مورد نظر حتما در T_i است. درحالی که $d-1 \geq i+1$؛ این با فرض استقرا در تناقض است. بنابراین هر راس در T_k از v_0 حداکثر در فاصلهٔ k قرار دارد؛ چون از درخت بودن T_k نتیجه می‌شود بین هر دو راس مانند v_1 و v_2 یک و فقط یک مسیر وجود دارد، مسیر بین دو راس از یکی از این دو حالت خارج نیست: یا از v_0 میگذرد که در این صورت با توجه به حداکثر فاصله

اثبات‌شده هر راس از $v_\circ$، فاصله میان دو راس حداکثر $۲k$ است. یا بخشی از مسیر $v_۱$ به $v_\circ$ و سپس $v_\circ$ به $v_۲$ است و در این صورت باز هم از $۲k$ تجاوز نمی‌کند.

حال مجددا به استقرا روی k ثابت می‌کنیم دو راس به فاصله دقیقا k از ریشه وجود دارند که مسیر آن‌ها تا ریشه کاملا مجزا است. پایه استقرا برای $k = ۱$ باتوجه به $r_۱ \geq ۲$ واضح است. فرض می‌کنیم حکم برای $k = i$ برقرار باشد و دو راس v و v' با فاصله دقیقا i از ریشه موجود باشند که مسیرشان تا ریشه کاملا مجزاست. طبق لم ۳.۳ برای ساخت $T_{i+۱}$ به تمامی رئوسی که زوجیت عمقشان با زوجیت i یکسان است، $r_{i+۱}$ راس جدید از درجه یک وصل می‌کنیم. بنابراین به v راس جدیدی مانند $v_۱$ از درجه یک و به v' نیز راس جدیدی مانند $v'_۱$ متصل می‌شود. $v_۱$ و $v'_۱$ به فاصله دقیقا $i + ۱$ از ریشه قرار می‌گیرند و مسیرهای آن‌ها تا ریشه کاملا مجزاست؛ زیرا تنها مسیر آن‌ها به ریشه حتما از v (یا v') می‌گذرد.

به این ترتیب، از وجود دو راس به فاصله دقیقا k از ریشه در T_k که مسیرهایشان تا ریشه کاملا مجزاست، نتیجه می‌گیریم قطر T_k برابر $۲k$ است. $\square$

تذکر ۵.۳. توجه داشته باشید که شرط $r_۱ \geq ۲$ در لم بالا، محدودکننده نیست زیرا داریم:

$$T_j(۱, r_۲, r_۳, \dots, r_j) = T_{i-۱}(r_۲ + ۱, r_۳, \dots, r_j).$$

و برای هر درخت چیکواری جز $T_۱(۱)$ نمایشی به فرم $T_k(r_۱, r_۲, \dots, r_k)$ وجود دارد که $r_۱ \geq ۲$.

برای ادامهٔ بررسی درختان چیکواری و پرداختن به مقادیر ویژه آن‌ها، لازم است ابتدا به چند تعریف بپردازیم.

تعریف ۶.۳. عبارت Q_j را به صورت بازگشتی این گونه تعریف می‌کنیم:

$$Q_\circ(.) = ۱,$$

$$Q_۱(x_۱) = x_۱$$

و

$$Q_j(x_۱, x_۲, \dots, x_j) = x_j Q_{j-۱}(x_۱, x_۲, \dots, x_{j-۱}) + Q_{j-۲}(x_۱, x_۲, \dots, x_{j-۲})$$

برای هر $۲ \leq j \leq k$. همچنین قرارداد می‌کنیم $Q_{-۱} = \circ$.
این عبارات را عبارات مسلسل می‌نامیم.

تذکر ۷.۳. همان‌طور که از نام این عبارات پیداست، ارتباط کسرهای مسلسل و عبارات مسلسل از طریق تساوی زیر مشهود است:

$$x_k + \cfrac{1}{x_{k-1} + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{x_1}}} = \frac{Q_k(x_1, \dots, x_k)}{Q_{k-1}(x_!, \dots, x_{k-1})}$$

لم ۸.۳. فرض کنید $T_k(r_1, \dots, r_k)$ یک درخت چیکواری با رده‌های رنگی (A_{k-1}, A_k) باشد.آنگاه $|A_{k-1}| = Q_{k-1}(r_1, \dots, r_{k-1})$ و $|A_k| = Q_k(r_1, \dots, r_k)$.

اثبات. حکم را به استقرا روی k ثابت می‌کنیم. پایهٔ استقرا برای $k = 1$ واضح است. حال فرض می‌کنیم حکم برای $k = i$ برقرار باشد یعنی برای رده‌های رنگی $T_i(r_1, \dots, r_i)$ داشته باشیم: $|A_{i-1}| = Q_{i-1}(r_1, \dots, r_{i-1})$ و $|A_i| = Q_i(r_1, \dots, r_i)$. طبق تعریف برای ساخت $T_{i+1}(r_1, \dots, r_{i+1})$ هر راس A_i به r_{i+1} راس جدید متصل می‌شود و اجتماع رئوس جدید و A_{i-1} مجموعهٔ A_{i+1} را می‌سازد. بنابراین داریم:

$$|A_{i+1}| = |A_{i-1}| + r_{i+1}|A_i = Q_{i-1}(r_1, \dots, r_{i-1}) + r_{i+1}Q_i(r_1, \dots, r_i)$$

بنابراین طبق تعریف عبارات مسلسل، $|A_{i+1}| = Q_{i+1}(r_1, \dots, r_{i+1})$. همچنین $|A_i| = Q_i(r_1, \dots, r_i)$ بدون تغییر باقی می‌ماند و حکم ثابت شده است. □

تعریف ۹.۳. $Sp(G)$ را طیف گراف G، N_G^+ را تعداد مقادیر ویژهٔ مثبت گراف G، N_G^- را تعداد مقادیر ویژهٔ منفی گراف G و $N_G(t)$ را مرتبهٔ تکرار مقدار ویژهٔ t از گراف G تعریف کنید.

لمی که در ادامه می‌آید ابزار اصلی ما در تعیین طیف درخت $T_k(r_1, \dots, r_k)$ خواهد بود.

لم ۱۰.۳. گراف $G = (A, B, E)$ را گرافی دو بخشی در نظر بگیریپ که A و B رده‌های رنگی و E مجموعهٔ یال‌های آن است.فرض کنید $\lambda \neq 0$ مقدارویژهٔ G از مرتبهٔ تکرار m باشد. گراف G' را از روی G به این صورت می‌سازیم که هر یک از رئوس B را به r راس جدید از درجهٔ یک متصل می‌کنیم به طوری که گراف حاصل دارای $|A| + (r+1)|B|$ راس باشد. آنگاه $\pm\sqrt{\lambda^2 + r}$ مقادیر ویژهٔ G' از مرتبهٔ تکرار m هستند.همچنین باقی مقادیر ویژهٔ G' برابرند با $\pm\sqrt{r}$ با مرتبه تکرار $|B| - N_G^+$ و 0 از مرتبه تکرار $|A| + (r-1)|B|$، و G' هیچ مقدارویژهٔ دیگری ندارد.

اثبات. طبق قضیهٔ ۹.۲ مقادیر ویژهٔ گراف‌های دو بخشی G و G' متقارنند و کافی است به بررسی مقادیر ویژهٔ مثبت بپردازیم. فرض کنید $\sqrt{r} \neq \mu \geq 0$ مقدار ویژهٔ گراف G' باشد. می‌خواهیم نشان دهیم اگر x بردار ویژهٔ G' متناظر با μ باشد، می‌توان بردار ویژهٔ $x^\star$ را برای G ساخت به طوری که متناظر با مقدارویژهٔ $\sqrt{\mu^2 - r}$ باشد و به این ترتیب نشان می‌دهیم که مقادیر ویژهٔ نامنفی G' یا صفرند، یا $\sqrt{r}$ و یا مقداری مانند μ به طوری که $\sqrt{\mu^2 - r}$ مقدار ویژهٔ G باشد.

فرض کنید M' ماتریس مجاورت G' و x بردار ویژهٔ متناظر با μ باشد. راس $v_i \in B$ را در نظر بگیرید و r راس جدیدی که به آن متصل کردیم را w_{i1}، w_{i2}، ...، w_{ir} بنامید. در سطور متناظر با w_{i1}، w_{i2}، ...، w_{ir} در M' تنها درایهٔ مربوط به v_i برابر یک است و باقی درایه‌ها صفرند. بنابراین از تساوی $M'x = \mu x$ داریم:

$$x(v_i) = \mu x(w_{i1}) = \mu x(w_{i2}) = \cdots = \mu x(w_{ir})$$

که منظور از $x(a)$ مؤلفهٔ متناظر با راس a در بردار x است.

چون $\mu \neq 0$، داریم $x(w_{i1}) = x(w_{i2}) = \cdots = x(w_{ir})$. حال اگر سطر متناظر با v_i را در M' در نظر بگیریم. علاوه بر درایه‌های متناظر با w_{i1}، w_{i2}، ... و w_{ir}، درایه‌ای متناظر با رئوسی مانند $u_j \in A$ نیز در صورتی که با v_i همسایه باشند برابر یک خواهند بود. بنابراین داریم:

$$\mu x(v_i) = \sum_{v_i \sim u_k} x(u_k) + r x(w_{i1})$$

و مشابها با نگاه کردن به سطر متناظر با u_j می‌بینیم:

$$\mu x(u_j) = \sum_{u_j \sim v_l} x(v_l).$$

و از آنجا که $x(v_i) = \mu x(w_{i1})$ با جایگذاری $\mu x(w_{i1})$ در دو معادله بالا خواهیم داشت:

$$(\mu^2 - r) x(w_{i1}) = \sum_{v_i \sim u_k} x(u_k)$$

و

$$\mu x(u_j) = \sum_{u_j \sim v_l} \mu x(w_{i1}).$$

حال می‌توانیم دو معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sqrt{\mu^۲ - r}(\sqrt{\mu^۲ - r}x(w_{i۱})) = \sum_{v_i \sim u_k} x(u_k)$$

و

$$\sqrt{\mu^۲ - r}x(u_j) = \sum_{u_j \sim v_l} \sqrt{\mu^۲ - r}x(w_{l۱}).$$

بردار $x^\star$ را به عنوان برداری $(|A| + |B|)$-بعدی تعریف می‌کنیم:

$$\forall v_i \in B;\ \ x^\star(v_i) = \sqrt{\mu^۲ - r}x(w_۱),$$

$$\forall u_j \in A;\ \ x^\star(u_j) = x(u_j).$$

حال با جایگذاری این تعریف در دو معادله آخر خواهیم داشت:

$$\sqrt{\mu^۲ - r}x^\star(v_i) = \sum_{v_i \sim u_k} x^\star(u_k)$$

و

$$\sqrt{\mu^۲ - r}x^\star(u_j) = \sum_{u_j \sim v_l} x^\star(v_l).$$

بنابراین $x^\star$ بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ $\sqrt{\mu^۲ - r}$ برای گراف G است. با فرض ناصفر بودن بردار x، $x^\star$ به وضوح برداری ناصفر است و اگر $x_۱$

$x_۲$ دو بردار ویژهٔ مستقل خطی متناظر با مقدار ویژهٔ μ برای گراف G' باشند، آنگاه $x_۱^\star$ و $x_۲^\star$ نیز بردار ویژه‌های مستقل خطی متناظر با $\sqrt{\mu^۲ - r}$ برای گراف G خواهند بود. به علاوه، عکس این مطلب نیز با سختن برعکس x از روی $x^\star$ صادق است و می‌توان نتیجه گرفت مرتبهٔ تکرار μ برای G' با مرتبهٔ تکرار $\sqrt{\mu^۲ - r}$ برای G برابر است.

حال به بررسی مرتبه تکرار صفر و $\sqrt{r}$ به عنوان مقدار ویژه‌های G' می‌پردازیم؛ طبق قضیهٔ ۸.۲ میدانیم مجموع مربعات مقدار ویژه‌ها برابر است با دو برابر تعداد یال‌ها. برای گراف‌های دو بخشی به علت وجود تقارن در مقدار ویژه‌ها، مجموع مربعات مقادیر ویژهٔ مثبت و منفی برابرند، بنابراین داریم:

$$e(G) + r|B| = e(G') = \sum_{\mu > o, \mu \in Sp(G')} \mu^۲$$

از طرفی مقدار ویژهٔ مثبت $\mu \in Sp(G')$ یا $\sqrt{r}$ است یا $\lambda = \sqrt{\mu^۲ - r}$ مقدار ویژهٔ مثبت G خواهد بود و $\mu^۲ = \lambda^۲ + r$. پس داریم:

$$\sum_{\mu > o, \mu \in Sp(G')} \mu^۲ = \sum_{\lambda > o, \lambda \in Sp(G)} (\lambda^۲ + r) + rN_{G'}(\sqrt{r}) = e(G) + rN_G^+ + rN_{G'}(\sqrt{r}).$$

بنابراین:

$$e(G) + r|B| = e(G) + rN_G^+ + rN_{G'}(\sqrt{r})$$

و خواهیم داشت $N_{G'}(\sqrt{r}) = |B| - N_G^+$. و در نهایت، چون می‌دانیم مجموع مرتبه‌های مقادیر ویژهٔ گراف برابر با تعداد رئوس است، می‌توانیم مرتبه تکرار صفر بعه عنوان مقدار ویژهٔ G' را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$v(G') = |A| + (r+۱)|B| = N_{G'}^+ + N_{G'}^- + N_{G'}\circ$$

چون G' دوبخشی است، $N_{G'}^+ = N_{G'}^-$ و داریم:

$$N_{G'}(\circ) = |A| + (r+۱)|B| - ۲N_{G'}^+$$

اما چون تعداد مقادیر ویژهٔ مثبت G' بجز $\sqrt{r}$ باتعداد مقادیر ویژهٔ مثبت G برابر است، خواهیم داشت:

$$N_{G'}(\circ) = |A| + (r+۱)|B| - ۲N_G^+ - ۲N_{G'}(\sqrt{r} = |A| + (r+۱)|B| - ۲|B|.$$

□

قضیه ۱۱.۳. مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ درخت $T_k(r_۱, \ldots, r_k)$ برابر است با

$$\{\pm\sqrt{r_k}, \pm\sqrt{r_k + r_{k-۱}}, \pm\sqrt{r_k + r_{k-۱} + r_{k-۲}}, \ldots, \pm\sqrt{r_k + \cdots + r_۱}, \circ\}.$$

به طوری‌که مرتبهٔ تکرار صفر برابر $Q_k(r_۱, \ldots, r_k) - Q_{k-۱}(r_۱, \ldots, r_{k-۱})$ و مرتبه تکرار $\pm\sqrt{r_k + \cdots + r_j}$ برابر $Q_{j-۱}(r_۱, \ldots, r_{j-۱}) - Q_{j-۲}(r_۱, \ldots, r_{j-۲})$ است.

اثبات. به استقرا روی k حکم را اثبات می‌کنیم.

□

تذکر ۱۲.۳. اگر $r_۱ \geq ۲$ آنگاه $T_k(r_۱, \ldots, r_k)$ دارای $۲k + ۱$ مقدار ویژهٔ متفاوت و قطر $۲k$ است. طبق قضیهٔ ۱۰.۲، $۲k + ۱$ کران بالایی برای قطر گرافی با $۲k + ۱$ مقدار ویژهٔ متفاوت است. بنابراین درختان چیکواری بلندترین قطر را در میان درخت با تعداد مقادیر ویژه متمایز محدود دارند.

قضیه ۱۳.۳. به ازای هر مجموعه مانند S از اعداد صحیح مثبت، درختی وجود دارد که مقادیر ویژهٔ مثبت آن دقیقا اعضای S هستند. اگر $S \neq \{۱\}$ آنگاه قطر درخت مذکور برابر $۲|S|$ است.

اثبات. فرض کنید $S = \{n_۱, n_۲, \ldots, n_{|S|}\}$ به طوری که $n_۱ < n_۲ < \cdots < n_{|S|}$. آنگاه قرار می‌دهیم:

$$r_{|S|} = n_۱^۲, r_{|S|-۱} = n_۲^۲ - n_۱^۲, \ldots, r_۱ = n_{|S|}^۲ - n_{|S|-۱}^۲.$$

طبق قضیهٔ ۱۱.۳ مقادیر ویژهٔ مثبت $T_{|S|}(r_۱, \ldots, r_{|S|})$ برابر مقادیر زیر خواهند بود:

$$\sqrt{r_{|S|}} = n_۱,$$

$$\sqrt{r_{|S|} + r_{|S|-۱}} = n_۲,$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{r_{|S|} + \cdots + r_۱} = n_{|S|}.$$

همچنین اگر $S \neq \{۱\}$ آنگاه $r_۱ \geq ۲$ زیرا اگر S تک عضوی باشد، $r_۱ = n_۱^۲ \geq ۲$ و اگر تک عضوی نباشد چون $n_{|S|} > n_{|S|-۱} > ۰$، $r_۱ = n_{|S|}^۲ - n_{|S|-۱}^۲ \geq ۲$. بنابراین طبق لم ۴.۳ قطر درخت برابر $۲|S|$ است. □

فصل ۴

درختان چیکواری از نگاهی دیگر

درختانی که در فصل قبل به عنوان درختان چیکواری معرفی شدند، از جهات مختلف خوش‌رفتار و دارای خواص جالبی هستند؛ به دو تعریف تا حدودی متفاوت اما معادل در فصل قبل پرداختیم و در این فصل قصد داریم، روش ساخت دیگری برای این رده از درختان ارائه کنیم. اهمیت پرداختن به تعاریف و روش‌های ساخت گوناگون برای یک شیء واحد در آن است که هر رویکرد می‌تواند ما را به ابزاری منحصر به فرد برای مطالعه آن شیء مجهز کند. کما اینکه هدف ما در این فصل نیز همین است؛ در ادامه خواهیم دید این تغییر رویکرد چطور به روشی برای ساخت درختان صحیحی با قطر فرد دلخواه در فصل بعد تعمیم می‌یابد. اما ابتدا به یک تعریف می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴. اگر $T_۱$ و $T_۲$ دو درخت ریشه‌دار و n عددی طبیعی باشد، درخت ریشه‌دار $T_۱ \sim nT_۲$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: ریشهٔ $T_۱$ را به ریشه‌های n کپی از $T_۲$ متصل می‌کنیم. ریشهٔ $T_۱$ را ریشهٔ درخت جدید در نظر می‌گیریم.

عملگر $\sim$ خواص جالبی خصوصا در ارتباط با مقادیر ویژه درخت‌ها دارد که بعدا به آن می‌پردازیم. بنابراین نوشتن یک درخت به فرم اثر عملگر $\sim$ روی درختان دیگر، در مطالعهٔ خواص آن گراف کمک‌کننده است. در قضیهٔ بعد ثابت می‌کنیم، یک درخت چیکواری را می‌توان به چنین فرمی درآورد.

قضیه ۲.۴. $r_۱$، $r_۲$، ... و r_n را اعداد صحیح مثبت در نظر می‌گیریم. آنگاه برای $n \geq ۳$ داریم:

$$T_n(r_۱, r_۲, \ldots, r_n) = T_{n-۲}(r_۳, \ldots, r_n) \sim r_۱ T_{n-۱}(r_۲, \ldots, r_n).$$

اثبات. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. پایهٔ استقرا برای $n = ۳$ واضح است. حال فرض کنید حکم برای $n = i$ برقرار باشد، یعنی

$$T_i(r_۱, r_۲, \ldots, r_i) = T_{i-۲}(r_۳, \ldots, r_i) \sim r_۱ T_{i-۱}(r_۲, \ldots, r_i).$$

بدون کاستن از کلیت فرض کنید i زوج باشد؛ طبق لم ۳.۳ برای ساخت $T_{i+۱}(r_۱, r_۲, \ldots, r_{i+۱})$ از روی $T_i(r_۱, r_۲, \ldots, r_i)$ باید $r_{i+۱}$ راس جدید به هر راس در عمق زوج در $T_i(r_۱, r_۲, \ldots, r_i)$ متصل کنیم. چون طبق فرض استقرا $T_i(r_۱, r_۲, \ldots, r_i) = T_{i-۲}(r_۳, \ldots, r_i) \sim r_۱ T_{i-۱}(r_۲, \ldots, r_i)$، این کار معادل متصل کردن $r_{i+۱}$ راس جدید به رئوس در عمق زوج در $T_{i-۲}(r_۳, \ldots, r_i)$ و متصل کردن $r_{i+۱}$ راس جدید به رئوس در عمق فرد در $T_{i-۱}(r_۲, \ldots, r_i)$ است. به این ترتیب، مجددا طبق لم ۳.۳ $T_{i-۲}(r_۳, \ldots, r_i)$ به $T_{i-۱}(r_۳, \ldots, r_i, r_{i+۱})$ و $T_{i-۱}(r_۲, \ldots, r_i)$ به $T_i(r_۲, \ldots, r_i, r_{i+۱})$ تبدیل می‌شود و داریم

$$T_{i+۱}(r_۱, r_۲, \ldots, r_{i+۱}) = T_{i-۱}(r_۳, \ldots, r_i, r_{i+۱}) \sim r_۱ T_i(r_۲, \ldots, r_i, r_{i+۱}).$$

□

حال به یکی از خواص $\sim$ در ارتباط با مقادیر ویژه می‌پردازیم، اما ابتدا به یک تعریف نیازمندیم.

تعریف ۳.۴. اگر T یک درخت ریشه‌دار باشد، T' جنگل حاصل از حذف کردن ریشهٔ درخت T است.

لم ۴.۴. اگر $\varphi(G)$ چندجمله‌ای مشخصهٔ گراف G باشد و $T_۱$ و $T_۲$ دو درخت ریشه‌دار باشند و n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$\varphi(T_۱ \sim nT_۲) = \varphi^{n-۱}(T_۲)(\varphi(T_۱)\varphi(T_۲) - n\varphi(T_۱')\varphi(T_۲')).$$

اثبات. حکم را به استقرا رو n اثبات می‌کنیم. پایهٔ استقرا برای $n = ۱$ با بسط دادن دترمینان به سادگی اثبات می‌شود. فرض کنید حکم برای $n = i - ۱$ برقرار باشد. طبق تعریف ۱.۴، داریم:

$$T_۱ \sim nT_۲ = (T_۱ \sim (n-۱)T_۲) \sim T_۲.$$

بنابراین طبق پایه استقرا، داریم:

$$\varphi(T_۱ \sim nT_۲) = \varphi(T_۱ \sim (n-۱)T_۲)\varphi(T_۲) - \varphi((T_۱ \sim (n-۱)T_۲)')\varphi(T_۲')$$

طبق فرض استقرا $\varphi(T_1 \sim (n-1)T_2)$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\varphi(T_1 \sim nT_2) = (\varphi^{n-2}(T_2)(\varphi(T_1)\varphi(T_2) - (n-1)\varphi(T_1')\varphi(T_2')))\varphi(T_2) - \varphi((T_1 \sim (n-1)T_2)')\varphi(T_2')$$

از طرفی حذف ریشهٔ $T_1 \sim (n-1)T_2$ معادل حذف ریشهٔ T_1 و اجتماع آن با $n-1$ نسخهٔ مجزا از T_2 است. بنابراین:

$$\varphi(T_1 \sim nT_2) = (\varphi^{n-1}(T_2)(\varphi(T_1)\varphi(T_2) - (n-1)\varphi(T_1')\varphi(T_2'))) - \varphi(T_1')\varphi^{n-1}(T_2)\varphi(T_2')$$

پس:

$$\varphi(T_1 \sim nT_2) = \varphi^{n-1}(T_2)(\varphi(T_1)\varphi(T_2) - n\varphi(T_1')\varphi(T_2')).$$

□

قضیه ۵.۴. فرض کنید $n \geq 2$ عددی طبیعی و r_1، r_2، ... و r_n اعداد صحیح مثبت باشند. آنگاه

$$\varphi(T_n(r_1, \ldots, r_n)) = \varphi^{r_n}(T_{n-1}(r_1, \ldots, r_{n-1}))\varphi(T_{n-2}(r_1, \ldots, r_{n-2}))\frac{x^2 - s_n}{x^2 - s_{n-1}}.$$

که $s_i = \sum_{j=1}^{i} r_j$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$.

اثبات. برای کوتاه‌تر شدن نوشته به جای $\varphi(T_k(r_1, \ldots, r_k))$ می‌نویسیم φ_k. با استفاده از لم ۴.۴ و بسط دادن تساوی تا جای ممکن، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\varphi_k = \varphi_{k-1}^{r_k - 1}\varphi_{k-2}^{r_{k-1}} \ldots \varphi_1^{r_2} x^{r_1}(x^2 - s_k) \qquad (*)$$

برای هر $k \geq 1$. برای $k = n$ و $k = n-1$، $\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} = \frac{\varphi_{n-1}^{r_n - 1}\varphi_{n-2}^{r_{n-1}}\varphi_{n-3}^{r_{n-2}} \ldots \varphi_1^{r_2} x^{r_1}(x^2 - s_n)}{\varphi_{n-2}^{r_{n-1} - 1}\varphi_{n-3}^{r_{n-2}} \ldots \varphi_1^{r_2} x^{r_1}(x^2 - s_{n-1})}$$

بنابراین:

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}^{r_n}\varphi_{n-2}\frac{(x^2 - s_n)}{(x^2 - s_{n-1})}$$

□

تذکر ۶.۴. توجه به این نکته جالب است که با استفاده از تساوی * و به استقرا روی k می‌توان اثباتی متفاوت از آنچه در فصل قبل دیدیم برای قضیهٔ ۱۱.۳ ارائه کرد.

فصل ۵

وجود درختان صحیح با قطر دلخواه فرد

تا به اینجا دیدیم که هر عدد طبیعی دلخواه زوج، می‌تواند قطر یک درخت صحیح باشد. آیا برای هر عدد فرد نیز این موضوع برقرار است؟

آنچه باعث زوج بودن قطر در درختان چیکواری می‌شود، وجود نوعی تقارن نسبت به ریشه در این درختان است (دورترین رئوس از هم در فاصله برابری از ریشه قرار دارند). در این فصل به تعریف رده‌ای از درختان با استفاده از عملگر $\sim$ که در فصل قبل معرفی کردیم، می‌پردازیم که چنین تقارنی در آن‌ها وجود ندارد و نشان می‌دهیم با انتخاب درست پارامترها می‌توان درخت صحیحی با قطر دلخواه فرد ساخت.

تعریف ۱.۵. برای اعداد صحیح مثبت n، $r_۱$، $\dots$ و r_n که $r_۱ < r_۲ < \cdots < r_n$، تعریف می‌کنیم

$$C(r_۱, r_۲, \dots, r_n) = T_n(r_n - r_{n-۱}, r_{n-۱} - r_{n-۲}, \dots, r_۲ - r_۱, r_۱).$$

توجه داشته باشید که این تعریف هیچ تفاوتی با درخت چیکواری ندارد و صرفا تغییر نمادگذاری برای سهولت پارامتریزه کردن معادلاتی است که در ادامه در این فصل به آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۲.۵. برای اعداد صحیح مثبت n، r، $r_۰$، $r_۱$، $\dots$ و r_n که $n \geq ۲$ و $max\{r_۰, r_۱\} < r_۲ < \cdots < r_n$، قرار می‌دهیم:

$$U = C(r_۱, \dots, r_n), \;\; V = C(r_۰, r_۲, \dots, r_{n-۱}), \;\; W = C(r_۲, \dots, r_n).$$

و تعریف می‌کنیم:

$$T^{\star}(r, r_۰, r_۱, \dots, r_n) = U \sim (V \sim rW).$$

تعریف ۳.۵. چندجمله‌ای‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\psi_o(T^\star) = x^۲(x^۲ - r_۱)(x^۲ - r_n) - r(x^۲ - r_۰)(x^۲ - r_۱) - x^۲(x^۲ - r_۰),$$

$$\psi_e(T^\star) = (x^۲ - r_۰)(x^۲ - r_n) - rx^۲ - (x^۲ - r_۱),$$

اگر n زوج باشد، قرار دهید $\psi(T^\star) = \psi_e(T^\star)$ و در غیر این صورت $\psi(T^\star) = \psi(T^\star)$.

تعریف ۴.۵. اگر $C = C(r_۱, \dots, r_n)$، آنگاه تابع f را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f(C) = \frac{\varphi(C)}{x\prod_{i=۱}^{\lceil \frac{n}{۲} \rceil}(x^۲ - r_{n-۲i+۱})}.$$

قضیه ۵.۵. $T^\star$ یک درخت صحیح با قطر $۲n + ۱$ است اگر و تنها اگر $r_۰$، $r_۱$، $\dots$ و r_n همگی مربع کامل باشند و همهٔ ریشه‌های چند جمله‌ای $\psi(T^\star)$ صحیح باشند.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم قطر $T^\star$ برابر $۲n + ۱$ است. طبق اثبات لم ۴.۳ راسی مانند u در درخت U موجود است که به فاصله n از ریشه قرار دارد و مسیر u تا ریشه تماما در U قرار دارد. همچنین راس w در W وجود دارد که در فاصله $n - ۱$ از ریشهٔ W است. پس در فاصلهٔ n از ریشهٔ $V \sim rW$ و در فاصلهٔ $n + ۱$ از ریشهٔ اصلی قرار دارد و مسیر w تا ریشه در هیچ قسمتی از U نمی‌گذرد. بنابراین فاصلهٔ u و w برابر $۲n + ۱$ است. به علاوه، فاصله هیچ دو راسی نمی‌تواند از این بیشتر باشد، زیرا در آن صورت یا هر دو راس به فاصلهٔ $n + ۱$ از ریشه هستند، یعنی هر دو در $V \sim rW$ هستند پس فاصله‌اشان حتما از $۲n + ۲$ کمتر است. یا فاصله حداقل یک راس از ریشه بیش از $n + ۱$ است که منجر به تناقض با لم ۴.۳ می‌شود. بنابراین، قطر درخت برابر $۲n + ۱$ است.

حال می‌خواهیم ثابت کنیم $T^\star$ صحیح است اگر و تنها اگر شروط صورت قضیه برقرار باشند. با استفاده از قضیهٔ ۵.۴، $\varphi(T^\star)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر $n = ۲m + ۱$ فرد باشد، خواهیم داشت:

$$\varphi(T^\star) = x(x^۲ - r_n)\varphi^{r-۱}(W)f(U)f(V)f(W)\prod_{i=۲}^{m}(x^۲ - r_{۲i})\prod_{i=۲}^{m}(x^۲ - r_{۲i-۱})^۲\psi_o(T^\star)$$

و اگر $n = ۲m$ زوج باشد، داریم:

$$\varphi(T^\star) = x^۳(x^۲ - r_n)\varphi^{r-۱}(W)f(U)f(V)f(W)\prod_{i=۲}^{m}(x^۲ - r_{۲i-۱})\prod_{i=۱}^{m}(x^۲ - r_{۲i})^۲\psi_e(T^\star).$$

که مشخصا ریشه‌های $\varphi(T^\star)$ دقیقا برابر اجتماع $\{\sqrt{r_۰}, \sqrt{r_۱}, \dots, \sqrt{r_n}\}$ و ریشه‌های $\psi(T^\star)$ است.
□

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

درجه	degree
درخت صحیح	integral tree
درخت ریشه‌دار	rooted tree
دور	cycle
ردهٔ رنگی	color class
طیف	spectrum
عبارت مسلسل	continuant
گذر	trail
گشت	walk
مسیر	path
یکریخت	isomorphic

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

عبارت مسلسل .... continuant

دور .... cycle

درجه .... degree

درخت صحیح .... integral tree

یکریخت .... isomorphic

مسیر .... path

درخت ریشه‌دار .... rooted tree

طیف .... spectrum

گذر .... trail

گشت .... walk

کتاب‌نامه

[۱] Harary, Frank, and Allen J. Schwenk. “Which graphs have integral spectra?” In Graphs and combinatorics, pp. 45-51. Springer, Berlin, Heidelberg, 1974.

[۲] Csikvári, Péter. “Integral trees of arbitrarily large diameters.” Journal of Algebraic Combinatorics 32, no. 3 (2010): 371-377.

[۳] Ghorbani, Ebrahim, Ali Mohammadian, and Behruz Tayfeh-Rezaie. “Integral trees of odd diameters.” Journal of Graph Theory 70, no. 3 (2012): 332-338.

[۴] Beineke, Lowell W., Robin J. Wilson, and Peter J. Cameron, eds. Topics in algebraic graph theory. Vol. 102. Cambridge University Press, 2004.

[۵] Godsil, Chris D. and Gordon F. Royle. “Algebraic Graph Theory.” Graduate texts in mathematics (2001).

[۶] Strang, Gilbert. Introduction to linear algebra. Vol. 3. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1993.

[۷] Zhang, P., and G. Chartrand. Introduction to graph theory. Tata McGraw-Hill, 2006.

Abstract

A class of graphs whose adjacency matrix has only integer eigenvalues, are called ”integral graphs”. In this project, we investigate results from Peter Csicvari and Ebrahim Ghorbani et.al. to answer the question that ”can any arbitrary positive integer, be the diameter of an integral tree?”. In 2010, Csikvari proved that for any given even integer like $2k$ there is an integral tree with diameter $2k$. Specially, for any given set S of positive integers, there exists an integral tree whose positive eigenvalues are exactly the members of S and its diameter equals to $2|S|$. Later in 2012, Ghorbani et.al. proved that given any odd number like $2k+1$ there is also an integral tree of diameter $2k+1$. Putting these two results together, any arbitrary positive integer can be the diameter od an integral tree.

College of Science

School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Can any positive integer be the diameter of an integral tree?

Bahar Bagheri

Supervisor:

Dr. Morteza Mohammad-Noori

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of B.Sc. in Mathematics and Applications

Winter 2023