دانشگاه تهران

برخی خواص فضاهای متریک محدب

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پروژه کارشناسی

ریاضیات و کابردها

نگارنده: محمد امین افراشته

استاد راهنما: دکتر فاطمه آیت ا... زاده شیرازی

بهمن ۱۳۹۷

چکیده

در این پروژه به بررسی خواص فضاهای متریک محدب که تعمیمی از فضاهای برداری نرمدارند می پردازیم. در این راستا به توابع غیرگسترشی، غیرگسترشی کنان و غیرگسترشی کنان پریسیک سرزده و متن را با مثالهای مرتبط همراه می نماییم.

فهرست

فضاهای متریک محدب

تمامی ما در دروس آنالیز ریاضی و ریاضیات عمومی با مفهوم محدب بودن یک زیرفضای فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ روبرو شده ایم. در این فصل برآنیم تا با ارائه مفهوم ساختار محدب و فضای متریک محدب تعمیمی از مطلب فوق ارائه دهیم مراجع اصلی این فصل [۱] (تعاریف) و [۲،۳،۵] هستند.

تعریف ۱. یک ساختار محدب در یک فضای متریک (X,d) یک نگاشت است مانند (قرار دهید $I=[0,1]$) $\mathcal{W}:X^2\times I\to X$ که شرط زیر را برقرار می‌کند:

$$d(u,\mathcal{W}(x,y,\alpha))\leq \alpha d(u,x)+(1-\alpha)d(u,y)$$

برای هر $u,x,y\in X$ و $\alpha\in I=[0,1]$. فضای متریک (X,d) به همراه ساختار محدب $\mathcal{W}$ که به صورت $(X,d,\mathcal{W})$ نمایش می دهیم را یک فضای متریک محدب می نامیم.
گوییم فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ شرط (C) را برآورده می سازد هرگاه

$$\forall x,y\in X\ \forall\alpha\in I\quad \mathcal{W}(x,y,\alpha)=\mathcal{W}(y,x,1-\alpha)$$

گوییم فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ شرط (D) را برآورده می سازد هرگاه

$$\forall x,y,z,w\in X\quad d(\mathcal{W}(x,y,\frac{1}{2}),\mathcal{W}(z,w,\frac{1}{2}))\leq\frac{1}{2}(d(x,z)+d(y,w))$$

گوییم فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ شرط (H) را برآورده می سازد هرگاه

$$\forall x,y,z\in X\ \forall\alpha\in I\quad d(\mathcal{W}(x,y,\alpha),\mathcal{W}(x,z,\alpha))\leq(1-\alpha)d(y,z)\,.$$

در فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ زیرمجموعه C از X را محدب نامیم هرگاه $\mathcal{W}(C^2\times I)\subseteq C$.

مثال ۲. هرگاه (X,ρ) فضای برداری نرمدار و d متر حاصل از نرمم ρ بر X باشد، نگاشت $\mathcal{W}:X^2\times I\to X$ با ضابطه $\mathcal{W}(x,y,\alpha)=\alpha x+(1-\alpha)y$ یک ساختار محدب روی (X,d) است زیرا به ازای هر $x,y,u\in X$ و $\alpha\in I$ داریم

$$\begin{aligned}
d(u,\mathcal{W}(x,y,\alpha)) &= \rho(u-(\alpha x+(1-\alpha)y))\\
&= \rho(\alpha(u-x)+(1-\alpha)(u-y))\\
&\leq \rho(\alpha(u-x))+\rho((1-\alpha)(u-y))\\
&= \alpha(\rho(u,x))+(1-\alpha)\rho(u,y)\\
&= \alpha d(u,x)+(1-\alpha)d(u,y)
\end{aligned}$$

به علاوه فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ هر سه شرط (C) و (D) و (H) را برآورده می‌کند، زیرا به ازای هر $x,y,z,w \in X$ و $\alpha \in I$ داریم

$$\mathcal{W}(x,y,\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y = (1-\alpha)y + (1-(1-\alpha))x = \mathcal{W}(y,x,1-\alpha)$$

و

$$\begin{aligned} d(\mathcal{W}(x,y,\tfrac{1}{2}),\mathcal{W}(z,w,\tfrac{1}{2})) &= \frac{1}{2}\rho(x-y-(z-w)) = \frac{1}{2}\rho((x-z)-(y-w)) \\ &\leq \frac{1}{2}(\rho(x-z)+\rho(y-w)) = \frac{1}{2}(d(x,z)+d(y,w)) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} d(\mathcal{W}(x,y,\alpha),\mathcal{W}(x,z,\alpha)) &= \rho((\alpha x+(1-\alpha)y)-(\alpha x+(1-\alpha)z)) \\ &= \rho((1-\alpha)(y-z)) = (1-\alpha)\rho(y-z) \\ &= (1-\alpha)d(y,z) \end{aligned}$$

تعریف ۳. در فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ هرگاه $\alpha:(0,2]\to(0,1]$ به گونه ای باشد که $\alpha(2)=1$ و $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\alpha(\varepsilon)=0$ به علاوه به ازای هر $x,y,z\in X$ و هر $r>0$ و $\varepsilon\in(0,2]$ داشته باشیم:

$$d(x,z)\leq r \wedge d(y,z)\leq r \wedge d(x,y)\geq r\varepsilon \Rightarrow d(z,\mathcal{W}(x,y,\tfrac{1}{2}))\leq r(1-\alpha(\varepsilon))$$

در اینصورت $(X,d,\mathcal{W})$ را محدب یکنواخت نامیم و α را هنگ تحدب فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$.

فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ را گوییم شرط (W1) را برآورده می سازد هرگاه

$$\forall x,y,z,w\in X\ \forall t\in(0,1)\quad d(\mathcal{W}(x,y,t),\mathcal{W}(z,w,t))\leq t(d(x,z)+d(y,w))$$

قضیه ۴. در فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ با هنگ تحدب $\alpha:(0,2]\to(0,1]$ که نگاشتی دوسویی با معکوس η باشد اگر به ازای هر $x,y.z\in X$ داشته باشیم $d(x,z)\leq r$ و $d(y,z)\leq r$ همچنین $d(z,\mathcal{W}(x,y,\frac{1}{2}))\geq h>r>0$، آنگاه داریم $d(x,y)\leq r\eta(\frac{r-h}{r})$.

برهان. فرض کنید $d(x,z)\leq r$ و $d(y,z)\leq r$ همچنین $d(z,\mathcal{W}(x,y,\frac{1}{2}))\geq h>r>0$ به ازای هر $x,y,z\in X$ همچنین فرض کنید $x_0,y_0\in X$ به قسمی باشد که

$d(x_\circ, y_\circ) > r\eta(\frac{r-h}{r})$. $\varepsilon > \frac{r-h}{r}$ را انتخاب کنید به قسمی که $d(x_\circ, y_\circ) \geq r\eta(\varepsilon)$. با توجه به یکنواختی $(X, d, \mathcal{W})$ داریم:

$$
\begin{aligned}
d(z, \mathcal{W}(x, y, \frac{۱}{۲})) &\leq (۱ - \alpha(\eta(\varepsilon)))r = (۱ - \varepsilon)r \\
&< (۱ - \frac{r-h}{r})r = h
\end{aligned}
$$

که منجر به تناقض $d(z, \mathcal{W}(x, y, \frac{۱}{۲})) < r$ می شود.

قضیه ۵. در فضای متریک محدب $(X, d, \mathcal{W})$ با هنگ تحدب $\alpha : (\circ, ۲] \to (\circ, ۱]$ که نگاشتی دوسویی با معکوس η باشد و شرط **(W۱)** را برآورده سازد هرگاه $x_۱, x_۲, x_۳ \in \{x \in X : d(x, u) \leq r\}$ و $d(x_۱, x_۲) \geq d(x_۲, x_۳) \geq l > \circ$ همچنین $d(u, x_۲) \geq (۱ - \frac{۱}{۲}\alpha(\frac{۱}{r}))r$ آنگاه $d(x_۱, x_۳) \leq \eta(۱ - \frac{۱}{۲}\alpha(\frac{۱}{r}))d(x_۱, x_۲)$.

برهان. قرار دهید

$$
\begin{aligned}
z_۱ &= \mathcal{W}(x_۱, x_۲, \frac{۱}{۲}), \\
z_۲ &= \mathcal{W}(x_۳, x_۲, \frac{۱}{۲}), \\
z &= \mathcal{W}(z_۱, z_۲, \frac{۱}{۲}).
\end{aligned}
$$

با توجه به یکنواختی $(X, d, \mathcal{W})$ داریم:

$$
\begin{aligned}
d(u, z) &= d(u, \mathcal{W}(z_۱, z_۲, \frac{۱}{۲})) \leq \frac{۱}{۲}(d(u, z_۱) + d(u, z_۲)) \\
&= \frac{۱}{۲}(d(u, \mathcal{W}(x_۱, x_۲, \frac{۱}{۲})) + d(u, \mathcal{W}(x_۳, x_۲, \frac{۱}{۲}))) \\
&\leq (۱ - \alpha(\frac{۱}{r}))r
\end{aligned}
$$

بنابراین و به کمک فرض داریم

$$
\begin{aligned}
d(u, x_۲) &\geq (۱ - \frac{۱}{۲}\alpha(\frac{۱}{r}))r = (۱ - \alpha(\frac{۱}{r}))r + \frac{۱}{۲}\alpha(\frac{۱}{r})r \\
&\geq d(u, z) + \frac{۱}{۲}\alpha(\frac{۱}{r})
\end{aligned}
$$

در نتیجه $\frac{1}{2}\alpha(\frac{1}{r})r \leq d(u, x_2) - d(u, z) \leq d(x_2, z)$. به کمک

$$d(x, z_1) \leq \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$$

$$d(x, z_2) \leq \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$$

و همچنین $d(z_1, z_2) \geq \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$ و به طور یکنواخت محدب بودن X (شرط را برای $r = \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$ و $\varepsilon = 1$ بکار ببرید) و همچنین براورده شدن (W1) توسط X داریم

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\alpha(\frac{1}{r})r &\leq d(x_2, z) = d(x_2, \mathcal{W}(z_1, z_2, \frac{1}{2})) \\
&\leq (1 - \alpha(1))r \leq (1 - \alpha(\frac{d(z_1, z_2)}{\frac{1}{2} d(x_1, x_2)}))r \\
&\leq (1 - \alpha(\frac{\frac{1}{2} d(x_1, x_3)}{\frac{1}{2} d(x_1, x_2)}))r
\end{aligned}$$

که نتیجه می دهد

$$\frac{1}{2}\alpha(\frac{1}{r}) \leq 1 - \alpha(\frac{d(x_1, x_3)}{d(x_1, x_2)})$$

و از آنجا $d(x_1, x_3) \leq \eta(1 - \frac{1}{2}\alpha(\frac{1}{r}))d(x_1, x_2)$.

قضیه ۶. هرگاه C زیرمجموعه کامل، بسته، محدب کراندار و ناتهی فضای متریک محدب یکنواخت $(X, d, \mathcal{W})$ باشد که شرط (W1) را نیز برآورده می سازد و $T : C \to C$ نگاشت پیوسته ای باشد که به ازای $a_1, \ldots, a_5 \geq 0$ باشرط $a_1 + \cdots + a_5 = 1$ و هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq a_1 d(x, y) + a_2 d(Tx, x) + a_3 d(Ty, y) + a_4 d(Tx, y) + a_5 d(Ty, x)$$

آنگاه T در C دارای نقطه ثابت است (مفروضات قضایای ۴و۵ درباره α و η را همچنان داریم).

برهان. $a, b, c \in \mathbb{R}$ با شرط $a = a_1, b \geq \max(a_2, a_3)$ همچنین

$$c \geq \max(a_4, a_5), a + 2b + 2c \leq 1$$

را در نظر بگیرید. بنابر شرط روی T داریم:

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + b(d(x, Tx) + d(y, Ty)) + c(d(Tx, y) + d(Ty, x))$$

در نامساوی بالا به جای y قرار دهید Tx، داریم:

$$\begin{aligned} d(Tx,T^2x) &\leq ad(x,Tx)+b(d(x,Tx)+d(Tx,T^2x)) \\ &\quad +c(d(Tx,Tx)+d(T^2x,x)) \\ &= (a+b)d(x,Tx)+bd(Tx,T^2x)+cd(T^2x,x) \\ &\leq (a+b)d(x,Tx)+bd(Tx,T^2x)+cd(T^2x,Tx)+cd(Tx,x) \\ &= (a+b+c)d(x,Tx)+(b+c)d(Tx,T^2x) \end{aligned}$$

بنابراین $d(Tx,T^2x) \leq \frac{a+b+c}{1-b-c}d(x,Tx)$ و به کمک $a+2b+2c \leq 1$ که منجر به $\frac{a+b+c}{1-b-c} \leq 1$ می شود خواهیم داشت

$$d(Tx,T^2x) \leq d(x,Tx)$$

با انجام متوالی عمل فوق، داریم

$$d(x,Tx) \geq d(Tx,T^2x) \geq d(T^2x,T^3x) \geq \cdots \geq d(T^ix,T^{i+1}x) \geq \cdots$$

ادعا می کنیم $\inf\{d(x,Tx) \ : \ c \in C\} = 0$، در غیر اینصورت فرض کنید $\inf\{d(x,Tx) : c \in C\} = l > 0$. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، بنابر تعریف اینفیمم وجود دارد $x_0 \in C$ به قسمی که $d(x_0,Tx_0) < l+\varepsilon$. قرار دهید $r_1 = \limsup\limits_{i\to\infty} d(x_0,T^ix_0)$، بنابراین $r_1 \geq l > 0$ و درنتیجه $r_2 > r_1$ چنان موجود است که $r_1 > (1-\frac{1}{2}\alpha(\frac{1}{r_2}))r_2$. از آنجایی که $r_2 > r_1$ پس می توانیم i را به گونه ای انتخاب کنیم که

$$d(x_0,T^{i-1}x_0) \leq r_2, d(x_0,T^{i+1}x_0) \leq r_2$$

اما $d(x_0,T^ix_0) \geq (1-\frac{1}{2}\alpha(\frac{1}{r_2}))r_2$.
به ازای $\theta = \frac{1}{2}\eta(1-\frac{1}{2}\alpha(\frac{1}{r_2})) < 1$ و بنابر قضیه ۵ داریم

$$\begin{aligned} d(T^{i-1}x_0,T^{i+1}x_0) &\leq \eta(\eta(1-\frac{1}{2}\alpha(\frac{1}{r_2}))d(T^{i-1}x_0,T^ix_0) \\ &= 2\theta d(T^{i-1}x_0,T^ix_0) \end{aligned}$$

در ادامه حالات زیر را داریم:

حالت اول: $c \neq 0$. در این حالت

$$\begin{aligned} d(T^{i+1}x_0,T^ix_0) &= d(TT^ix_0,TT^{i-1}x_0) \\ &\leq ad(T^ix_0,T^{i-1}x_0)+b(d(T^{i+1}x_0,T^ix_0)+d(T^ix_0,T^{i-1}x_0))+ \\ &\quad c(d(T^{i+1}x_0,T^{i-1}x_0)+d(T^ix_0,T^ix_0)) \end{aligned}$$

که نتیجه می دهد

$$\begin{array}{rcl}(1-b)d(T^{i+1}x_0,T^ix_0) & \leq & (a+b)d(T^ix_0,T^{i-1}x_0)+cd(T^{i+1}x_0,T^{i-1}x_0)\\ & \leq & (a+b)d(T^ix_0,T^{i-1}x_0)+2\theta cd(T^{i-1}x_0,T^ix_0)\\ & = & (a+b+2\theta c)d(T^ix_0,T^{i-1}x_0)\end{array}$$

به بیان دیگر

$$(1-b)l\leq(a+b+2\theta c)d(T^ix_0,T^{i-1}x_0)<(a+b+2\theta c)(1+\varepsilon)$$

و با توجه به مثبت بودن ε داریم $(1-b)l\leq(a+b+2\theta c)l$. که به کمک $\theta<1$ به تناقض $a+2b+2c\geq a+2c(1-\theta)>1$ منجر می شود، بنابراین در این حالت $l=0$.

حالت دوم: $c=0$. در این حالت قرار دهید $m=\mathcal{W}(T^ix_0,T^{i+1}x_0,\frac{1}{2})$ داریم:

$$\begin{array}{rcl}d(m,Tm) & = & d(\mathcal{W}(T^ix_0,T^{i+1}x_0,\frac{1}{2}),Tm)\\ & \leq & \frac{1}{2}d(Tm,T^ix_0)+\frac{1}{2}d(Tm,T^{i+1}x_0)\\ & \leq & \frac{a}{2}d(m,T^ix_0)+\frac{b}{2}(d(m,Tm)+d(T^{i-1}x_0,T^ix_0))+\\ & & \frac{a}{2}d(m,T^ix_0)+\frac{b}{2}(d(m,Tm)+d(T^ix_0,T^{i+1}x_0))\end{array}$$

و

$$\begin{array}{rcl}(1-b)d(m,Tm) & \leq & \frac{b}{2}d(T^{i-1}x_0,T^ix_0)+\frac{b}{2}d(T^ix_0,T^{i+1}x_0)+\\ & & \frac{a}{2}d(T^{i-1}x_0,\mathcal{W}(T^ix_0,T^{i+1}x_0,\frac{1}{2}))+\\ & & \frac{a}{2}d(T^ix_0,\mathcal{W}(T^ix_0,T^{i+1}x_0,\frac{1}{2}))\\ & \leq & \frac{b}{2}d(T^{i-1}x_0,T^ix_0)+\frac{b}{2}d(T^ix_0,T^{i+1}x_0)+\\ & & \frac{a}{2}(\frac{1}{2}d(T^{i-1}x_0,T^ix_0)+\frac{1}{2}d(T^{i-1}x_0,T^{i+1}x_0))+\\ & & \frac{a}{2}(\frac{1}{2}d(T^ix_0,T^ix_0)+\frac{1}{2}d(T^ix_0,T^{i+1}x_0))+\end{array}$$

که نتیجه می دهد

$$\begin{aligned}(۱-b)l &\leq \frac{b}{۲}(l+\varepsilon)+\frac{b}{۲}(l+\varepsilon)+\frac{a}{۴}(l+\varepsilon)+\frac{a}{۴}d(T^{i-۱}x_\circ,T^{i+۱}x_\circ)+\frac{a}{۴}(l+\varepsilon)\\ &= (\frac{b}{۲}+\frac{b}{۲}+\frac{a}{۴}+\frac{a}{۴})(۱+\varepsilon)+\frac{a}{۴}d(T^{i-۱}x_\circ,T^{i+۱}x_\circ)\\ &\leq (b+\frac{a}{۲})(۱+\varepsilon)+\frac{a\theta}{۲}d(T^{i-۱}x_\circ,T^{i+۱}x_\circ)\end{aligned}$$

به بیان دیگر $(۱-b)l < (b+\frac{a}{۲}+\frac{a\theta}{۲})(۱+\varepsilon)$ و با میل دادن $\varepsilon \to ۰$ داریم $۱-b \leq \frac{a}{۲}+\frac{a\theta}{۲}+b < a+b$ که با $a+۲b \leq ۱$ در تناقض است.
بنابر حالات و تناقضات فوق $l=۰$.
به جهت اثبات وجود نقطه ثابت ساختار زیر را در نظر بگیرید:
ساختار: $\beta \in (۰,۱)$ را در نظر گرفته و قرار دهید

$$C_\beta=\{x\in C : d(x,Tx)\leq \beta\}\,,$$
$$\hat{a}=\lim_{\beta\circ +}(\inf\{d(x,x_\circ) : x\in C_\beta\})\,,$$
$$l_\beta=\{x\in C_\beta : d(x_\circ,x)\leq \hat{a}+\beta\}\,.$$

به دلیل پیوستگی T و این که $l=۰$ دو مجموعه C_β, l_β ناتهی و بسته اند و برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم $\bigcap\{C_\beta : \beta>۰\}\neq\emptyset$. اگر $\hat{a}=۰$ آنگاه به ازای هر $\beta\in(۰,۱)$ داریم $d(x_\circ,Tx_\circ)\leq\beta$ و در نتیجه $x_\circ=Tx_\circ$. پس فرض کنید $\hat{a}>۰$. به ازای $u_۱,u_۲\in C_\beta$ قرار دهید $u=\mathcal{W}(u_۱,u_۲,\frac{۱}{۲})$، به ازای $i=۱,۲$ داریم:

$$\begin{aligned}d(u,Tu) &\leq d(u_i,Tu_i)+d(Tu_i,Tu)\\ &\leq \beta+ad(u_i,u)+b(d(u_i,Tu_i)+d(u,Tu))+c(d(u_i,Tu)+d(Tu_i,u))\end{aligned}$$

اما $\frac{۱}{۲}d(u_i,u_۱)+\frac{۱}{۲}d(u_i,u_۲)=\frac{۱}{۲}d(u_۱,u_۲)$ و $d(u_i,u)\leq\frac{۱}{۲}d(u_۱,u_۲)$. بنابراین

$$\begin{aligned}(۱-c)d(u,Tu) &\leq \beta+a(\frac{۱}{۲}d(u_i,u_۱)+\frac{۱}{۲}d(u_i,u_۲))+\\ &\quad b(\beta+d(u,Tu))+c(d(Tu_۱,u_۱)+d(u_۱,u))\\ &\leq \beta+\frac{a}{۲}d(u_۱,u_۲)+b\beta+c\beta+\frac{c}{۲}d(u_۱,u_۲)+bd(Tu,u)\\ &= (۱+b+c)\beta+\frac{a+c}{۲}d(u_۱,u_۲)+bd(Tu,u)\\ &\leq (۱+b+c)\beta+\frac{a+c}{۲}d(u_۱,u_۲)+b(\frac{۱}{۲}d(u_۱,Tu)+\frac{۱}{۲}d(u_۲,Tu))\\ &\leq (۱+b+c)\beta+\frac{a+c}{۲}d(u_۱,u_۲)+b\max(d(u_۱,Tu),d(u_۲,Tu))\end{aligned}$$

پس

$$(۱-b-c)\max(d(u_۱,Tu),d(u_۲,Tu)) \le (۱+b+c)\beta + \frac{a+c}{۲}d(u_۱,u_۲)$$

که نتیجه می دهد

$$d(u_i,Tu) \le \frac{۱+b+c}{۱-b-c}\beta + \frac{۱}{۲}\,\frac{a+c}{۱-b-c}d(u_۱,u_۲)$$

(به ازای $i=۱,۲$). از طرف دیگر رابطه $a+۲b+۲c \le ۱$ نتیجه می دهد

$$\frac{a+c}{۱-b-c} \le \frac{۱-۲b-c}{۱-b-c} \le ۱$$

بنابراین به ازای

$$\gamma = \frac{۱+b+c}{۱-b-c}$$

$$y_۱ = d(u_۱,\mathcal{W}(u,Tu,\frac{۱}{۲})), y_۲ = d(u_۲,\mathcal{W}(u,Tu,\frac{۱}{۲}))$$

داریم

$$d(u,Tu) \le \gamma\beta + \frac{۱}{۲}d(u_۱,u_۲)$$

و

$$d(u_۱,u_۲) \le d(u_۱,\mathcal{W}(u,Tu,\frac{۱}{۲})) + d(u_۱,\mathcal{W}(u,Tu,\frac{۱}{۲})) = y_۱ + y_۲\,.$$

بدون کاستن از کلیت فرض می کنیم $y_۲ \ge y_۱$. بنابراین $d(u_۱,u_۲) \le ۲y_۱$.
به طور مشابه $d(u_۱,u_۲) \le ۲y_۲$ و در نتیجه به ازای $i=۱,۲$ داریم

$$d(u_i,\mathcal{W}(u,Tu,\frac{۱}{۲})) \ge \frac{۱}{۲}d(u_۱,u_۲)\,.$$

حال به کمک قضیه ۴ بدست می آوریم

$$d(u,Tu) \le (\beta\gamma + \frac{۱}{۲}d(u_۱,u_۲))\eta(\frac{\beta\gamma}{\beta\gamma+\frac{۱}{۲}d(u_۱,u_۲)})\,.$$

و هرگاه قرار دهیم $l_{۱} - \frac{۱}{۲}d(u_{۱}, u_{۲})$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leq \sup_{\circ < l_{۱} \leq diam(C_{۱})} (\beta\gamma + l_{۱})\eta(\frac{\beta\gamma}{\beta\gamma + l_{۱}}) \\ &\leq \max(\sup\{(\beta\gamma + l_{۱})\eta(\frac{\beta\gamma}{\beta\gamma + l_{۱}}) : \circ < l_{۱} < \gamma\sqrt{\beta} - \gamma\beta\}, \\ &\quad \sup\{(\beta\gamma + l_{۱})\eta(\frac{\beta\gamma}{\beta\gamma + l_{۱}}) : \gamma\sqrt{\beta} - \gamma\beta < l_{۱} < \frac{diam(C)}{۲}\}) \\ &\leq \max(۲\gamma\sqrt{\beta}, (\gamma\beta + \frac{diam(C)}{۲})\eta(\sqrt{\beta}))\ . \end{aligned}$$

پس اگر قرار دهیم $\psi(\beta) = \max(۲\gamma\sqrt{\beta}, (\gamma\beta + \frac{diam(C)}{۲})\eta(\sqrt{\beta}))$ نشان داده ایم هرگاه $u_{۱}, u_{۲} \in C_\beta$ آنگاه $u \in C_{\psi(\beta)}$. پس $\lim_{\beta \to \circ^+} \psi(\beta) = \circ$. همچنین می توانیم نشان دهیم $\lim_{\beta \to \circ^+} diam(l_\beta) = \circ$ که بدلیل کامل بودن فضا و بسته بودن l_β ها نشان می دهد $\bigcap\{l_\beta : \beta > \circ\} \neq \emptyset$ و در نتیجه $\bigcap\{C_\beta : \beta > \circ\} \neq \emptyset$.

قضیه ۷. با همان مفروضات قضیه ۶ هرگاه $a + ۲b + ۲c \leq ۱$ و $a, b, c \geq \circ$ همچنین $x_\circ \in C$ و $x_{n+۱} = \mathcal{W}(x_n, Tx_n, \frac{۱}{۲})$ آنگاه دنباله $\{x_n\}_{n \geq ۱}$ به یک نقطه ثابت T همگراست.

برهان. بنابر قضیه ۶، T دارای نقطه ثابت مانند p است. به ازای هر $n \geq ۱$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_{n+۱}, p) &= d(\mathcal{W}(x_n, Tx_n, \frac{۱}{۲}), p) \leq \frac{۱}{۲}d(x_n, p) + \frac{۱}{۲}d(Tx_n, p) \\ &= \frac{۱}{۲}d(x_n, p) + \frac{۱}{۲}d(Tx_n, Tp) \end{aligned}$$

حال رابطه

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Tp) &\leq ad(x_n, p) + b(d(x_n, Tx_n) + d(p, Tp)) + c(d(x_n, Tp) + d(p, Tx_n)) \\ &\leq ad(x_n, p) + b(d(x_n, p) + d(p, Tx_n)) + c(d(x_n, p) + d(Tp, Tx_n)) \end{aligned}$$

که نشان می دهد $(۱ - b - c)d(Tx_n, Tp) \leq (a + b + c)d(x_n, p)$. حال با توجه به $\frac{a+b+c}{۱-b-c} \leq ۱$ به دست می آوریم

$$d(Tx_n, Tp) \leq \frac{a + b + c}{۱ - b - c}d(x_n, p) \leq d(x_n, p)$$

حالات زیر را داریم:

حالت اول: $\varepsilon > ۰$ و $N_۰ \geq ۱$ چنان موجودند که $\varepsilon \leq d(x_n, Tx_n)$ به ازای هر $n \geq N_۰$.
در این حالت چون $d(Tx_n, p) \leq d(x_n, p)$ و $\varepsilon \leq d(x_n, Tx_n)$ پس با توجه به تحدب یکنواخت X داریم

$$d(x_{n+۱}, p) = d(p, \mathcal{W}(x_n, Tx_n, \frac{۱}{۲})) \leq (۱ - \alpha(\varepsilon))d(x_n, p)$$

در نتیجه به ازای $\xi = ۱ - \alpha(\varepsilon) < ۱$ داریم

$$d(x_n, p) \leq \xi^n d(x_۰, p)$$

که نشان می دهد $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p) = ۰$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ و حکم در این حالت بدست می آید.

حالت دوم. فرض کنید حالت اول برقرار نباشد. بنابراین زیردنباله $\{x_{n_k}\}_{k\geq ۱}$ چنان موجود است که $\lim_{n\to\infty} d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) = ۰$ چون $T(C)$ فشرده است دنباله فوق زیردنباله ای همگرا تحت T دارد بدون کاستن از کلیت فرض می کنیم $\lim_{n\to\infty} Tx_{n_k} = u \in C$ اما به کمک $\lim_{n\to\infty} d(x_{n_k}, Tx_{n_k}) = ۰$ خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = u$ که با توجه به پیوستگی T نتیجه می دهد $Tu = u$ حال اگر از ابتدا u را به جای p انتخاب می کردیم رابطه $d(x_{n+۱}, u) \leq d(x_n, u)$ را داشتیم که نشان می دهد $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ یک نقطه ثابت T است.

تعریف ۸. در فضای متریک محدب $(X, d, \mathcal{W})$ هرگاه A زیرمجموعه ناتهی X باشد، پوش محدب بسته A را با $\overline{cov}(A)$ نمایش می دهیم و به صورت اشتراک تمام زیرمجموعه های محدب بسته C از X با شرط $A \subseteq C$ تعریف می کنیم. بنابراین $\overline{cov}(A)$ کوچکترین زیرمجموعه محدب بسته X شتمل A است.

مثال ۹. در مثال ۲ به ازای هر $x \in X$ مجموعه $\{a \in X : ||x - a|| < r\}$ محدب است و پوش محدب آن بستارش می باشد.

قضیه ۱۰. در فضای متریک محدب $(X, d, \mathcal{W})$ به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ داریم

الف) $d(x, y) = d(x, \mathcal{W}(x, y, \lambda)) + d(y, \mathcal{W}(x, y, \lambda))$

ب) $d(x, \mathcal{W}(x, y, \lambda)) = (۱ - \lambda)d(x, y)$

ج) $d(y, \mathcal{W}(x, y, \lambda)) = \lambda d(x, y)$

برهان.

الف) توجه کنید که به ازای هر $x,y\in X$ و $\lambda\in[۰,۱]$ داریم

$$\begin{aligned}d(x,y) &\leq d(x,\mathcal{W}(x,y,\lambda))+d(y,\mathcal{W}(x,y,\lambda))\\ &\leq \lambda d(x,x)+(۱-\lambda)d(x,y)+\lambda d(x,y)+(۱-\lambda)d(y,y)\\ &= (۱-\lambda)d(x,y)+\lambda d(x,y)=d(x,y)\end{aligned}$$

ب) توجه کنید که به ازای هر $x,y\in X$ و $\lambda\in[۰,۱]$ داریم $d(x,\mathcal{W}(x,y,\lambda))\leq(۱-\lambda)d(x,y)$ و $d(y,\mathcal{W}(x,y,\lambda))\leq\lambda d(x,y)$ از طرف دیگر

$$\begin{aligned}(۱-\lambda)d(x,y) &= d(x,y)-\lambda d(x,y)\\ &= d(x,\mathcal{W}(x,y,\lambda))+d(y,\mathcal{W}(x,y,\lambda))-\lambda d(x,y)\end{aligned}$$

بنابراین $(۱-\lambda)d(x,y)\leq d(x,\mathcal{W}(x,y,\lambda))$ که ما را به حکم (ب) می رساند.

ج) بندهای (الف) و (ب) را بکار ببرید.

قضیه ۱۱. در فضای متریک محدب $(X,d,\mathcal{W})$ هرگاه M زیرمجموعه فشرده X با حداقل دو عضو باشد آنگاه $u\in\overline{cov}(M)$ موجود است به قسمی که $\sup\{d(x,u):x\in M\}<diam(M)$.

برهان. بدلیل فشردگی M نقاط $x_۱,x_۲\in M$ چنان موجودند که $d(x_۱,x_۲)=diam(M)$. قرار دهید

$$\Gamma=\{A\subseteq M: x_۱,x_۲\in A\wedge\{d(x,y):x,y\in A\}=\{۰,diam(M)\}\}$$

در اینصورت $(\Gamma,\subseteq)$ مجموعه ای جزیا مرتب و ناتهی است و به ازای هر زنجیر ناتهی $\mathcal{K}$ در $(\Gamma,\subseteq)$ مجموعه $\bigcup\mathcal{K}(\in\Gamma)$ کران بالای زنجیر فوق می باشد. بنابر لم زرن $(\Gamma,\subseteq)$ دارای عنصر ماکسیمال مانند $M_۰$ است. به وضوح $M_۰$ متناهی می باشد زیرا اگر نامتناهی باشد دنباله یک به یک مانند $\{z_n\}_{n\geq۱}$ در $M_۰$ است که در M همگرا می باشد پس به ازای n,m به اندازه کافی بزرگ داریم $d(z_n,z_m)<\frac{۱}{۲}diam(M)$ که با $M_۰\in\Gamma$ در تناقض است. پس فرض کنید $M_۰=\{x_۱,\ldots,x_n\}$. حال قرار دهید:

$$\begin{aligned}y_۱ &= \mathcal{W}(x_۱,x_۲,\frac{۱}{۲})\\ y_۲ &= \mathcal{W}(x_۳,y_۱,\frac{۱}{۳})\\ &\vdots\\ y_{n-۲} &= \mathcal{W}(x_{n-۱},y_{n-۳},\frac{۱}{n-۱})\\ y_{n-۱} &= \mathcal{W}(x_n,y_{n-۲},\frac{۱}{n})=u\end{aligned}$$

مجددا بدلیل فشردگی M وجود دازد $y_\circ \in M$ به قسمی که $d(y_\circ, u) = \sup\{d(x,u) : x \in M\}$.
در نتیجه با توجه به محدب بودن X داریم:

$$\begin{aligned}
d(y_\circ, u) &\leq \frac{۱}{n} d(y_\circ, x_n) + \frac{n-۱}{n} d(y_\circ, y_{n-۲}) \\
&\leq \frac{۱}{n} d(y_\circ, x_n) + \frac{n-۱}{n} \left(\frac{۱}{n-۱} d(y_\circ, x_{n-۱}) + \frac{n-۲}{n-۱} d(y_\circ, y_{n-۳})\right) \\
&= \frac{۱}{n} d(y_\circ, x_n) + \frac{۱}{n} d(y_\circ, x_{n-۱}) + \frac{n-۲}{n} d(y_\circ, y_{n-۳}) \\
&\vdots \\
&\leq \frac{۱}{n}(d(y_\circ, x_۱) + \cdots + d(y_\circ, x_n)) \leq diam(M)
\end{aligned}$$

حال اگر $d(y_\circ, u) = diam(M)$ آنگاه باید داشته باشیم

$$d(y_\circ, x_۱) = \cdots = d(y_\circ, x_n) = diam(M)$$

و با توجه به نحوه انتخاب $M_\circ$ باید $y_\circ \in M_\circ$ پس $k \in \{۱, \ldots, n\}$ موجود است که $y_\circ = x_k$ که منجر به تناقض $\circ = d(y_\circ, x_k) = diam(M)$ می شود، پس $d(y_\circ, u) < diam(M)$.

توابع غیرگسترشی

انواع توابع غیرگسترشی یکی از مفاهیمی است که به طور گسترده در مقالات مربوط به فضاهای متریک محدب مورد بحث قرار می گیرند، مرجع اصلی این بخش [۵] می باشد.

تعریف ۱۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $F : X \to X$ یک نگاشت باشد. گوییم F غیر گسترشی است هرگاه :

$$d(Fx,Fy) \leq d(x,y)$$

برای هر $x,y \in X$.

F را غیر گسترشی کنان می‌نامند هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$d(Fx,Fy) \leq \frac{۱}{۲}[d(Fx,y)+d(x,Fy)]$$

برای هر $x,y \in X$.

مثال ۱۳. به ازای $t \in \mathbb{R}$ تابع $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f_t(x) = tx$ را در نظر بگیرید.

الف) $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ غیر گسترشی است اگر و تنها اگر $t \in [-۱,۱]$. زیرا f_t غیر گسترشی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$|t|\,|x-y| = |f_t(x) - f_t(y)| \leq K|x-y|\,.$$

ب) $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ غیرگسترشی کنان است اگر و تنها اگر به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$|t|\,|x-y| \leq \frac{۱}{۲}(|x-tx|+|y-ty|) = \frac{|۱-t|}{۲}\,(|x|+|y|)$$

با قرار دادن $x = -y > ۰$ به رابطه $|۲t| \leq |۱-t| \leq ۱+|t|$ میرسیم که نشان می دهد $t \in [-۱,۱]$ و بنابراین رابطه بالا به صورت

$$\forall x,y \in \mathbb{R} \ \ |۲t|\,|x-y| \leq (۱-t)(|x|+|y|)$$

در می آید. حالات زیر را داریم:

حالت اول: $t \in [۰,۱]$. در این حالت به دنبال t هایی در بازه $[۰,۱]$ هستیم که به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $۲t\,|x-y| \leq (۱-t)(|x|+|y|)$. پس به ازای هر $x,y > ۰$ باید داشته باشیم

$$(۳t-۱)x \leq (۱+t)y$$

و تنها پاسخ $t = \frac{۱}{۲}$ است. حال باید بررسی نماییم که ایا رابطه $\frac{۲}{۲}\,|x-y| \le (۱ - \frac{۱}{۲})(|x|+|y|)$ به ازای هر x, y حقیقی برقرار است که پاسخ مثبت می باشد.
حالت دوم $t \in [-۱, ۰]$. در این حالت به دنبال t هایی در $[-۱, ۰]$ می گردیم که به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $-۲t\,|x-y| \le (۱-t)(|x|+|y|)$. پس به ازای هر $x, y \ge ۰$ باید داشته باشیم $(-t-۱)x \le (۱+t)y$ که تنها به ازای $t = -۱$ برقرار است. حال باید بررسی نماییم که ایا رابطه $۲\,|x-y| \le (۱-(-۱))(|x|+|y|)$ به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار است که به وضوح برقرار می باشد.
بنابراین f_t غیرگسترشی کنان است اگر و تنها اگر $t = -۱, \frac{۱}{۲}$.

ج) به عنوان نمونه $f_{\frac{۱}{۴}}$ غیرگسترشی است اما غیرگسترشی کنان نمی باشد.

مثال ۱۴. به ازای هر $n \ge ۱$ نگاشت $f_n : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ با ضابطه $f_n(t) = t^n$ عیرگسترشی است اما غیرگسترشی کنان نمی باشد زیرا

$$۱ = |f_n(۱) - f_n(۰)| > ۰ = \frac{۱}{۲}(|۱ - f_n(۱)| + |۰ - f_n(۰)|)\,.$$

مثال ۱۵. فرض کنید X خانواده تمام بازه های بسته $\mathbb{R}$ به شکل $[a, b]$ باشد که $۰ \le a \le b \le ۱$. X را مجهز به متر هاوسدورف نمایید یعنی

$$d([a,b],[c,d]) = \sup_{t\in[۰,۱]} \left| \inf_{x\in[a,b]} |t-x| - \inf_{x\in[c,d]} |t-x| \right|$$

حال $\mathcal{W} : X^۲ \times I \to X$ با ضابطه

$$\mathcal{W}([a,b],[c,d],\lambda) = [\lambda a + (۱-\lambda)c, \lambda b + (۱-\lambda)d]$$

معرف یک ساختار محدب روی X است.

نکات بیشتر

از دیدگاه تاریخی قضیه زیر یکی از مقالاتی است که در ارتباط با نقاط ثابت نگاشتهایی مشابه نگاشتهای غیرگسترشی کنان ثابت شده است مرجع اصلی این بخش [۴] است:

یادآوری ۱۶. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل باشد، k یک عدد صحیح مثبت، $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}_+$ ، $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \alpha < 1$ و $f : X^k \to X$ یک نگاشت باشد با خاصیت

$$d(f(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}), f(x_1, x_2, \ldots, x_k)) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d(x_{i-1}, x_i)$$

برای هر $x_0, x_1, \ldots, x_k \in X$. آنگاه f دارای یک نقطه ثابت و یکتای x^* است، به این معنی که، وجود دارد یک نقطه یکتا مانند x^* به طوری که $f(x^*, x^*, \ldots, x^*) = x^*$ و دنباله‌ی تعریف شده به روش

$$x_{n+1} = f(x_{n-k+1}, \ldots, x_n), \quad n = k-1, k, k+1, \ldots$$

همگرا است به x^* برای هر $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in X$.

یادآوری فوق ما را به تعاریف زیر رهنمون می سازد:

تعریف ۱۷. یک نگاشت مانند $f : X^k \to X$ غیر گسترشی پریسیک نامیده می‌شود اگر

$$d(f(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}), f(x_1, x_2, \ldots, x_k)) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d(x_{i-1}, x_i)$$

برای هر $x_0, x_1, \ldots, x_k \in X$ ، که در آن k یک عدد صحیح مثبت است و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}_+$ ، $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.

تعریف ۱۸. یک نگاشت مانند $f : X^k \to X$ غیر گسترشی پریسیک کنان نامیده می‌شود اگر

$$d(f(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}), f(x_1, x_2, \ldots, x_k)) \leq \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=0}^{k} d(x_i, f(x_i, x_i, \ldots, x_i))$$

برای هر $x_0, x_1, \ldots, x_k \in X$. برای $k = 1$ ، این تعریف کاهش پیدا می‌کند به نگاشت کنان غیرگسترشی.

مثال۱۹. نگاشت $f: I^۲ \to I$ با ضابطه

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{۱}{۶} & x<\frac{۳}{۴}, y\in I\ , \\ \\ \frac{۱}{۱۵} & x\geq \frac{۳}{۴}, y\in I\ . \end{cases}$$

غیرگسترشی پریسیک کنان است اما غیرگسترشی پریسیک نیست.

برهان. ابتدا نشان می دهیم f غیرگسترشی پریسیک کنان است، باید تشان دهیم به ازای هر $x,y,z\in I$ داریم:

$$|f(x,y)-f(y,z)|\leq \frac{۱}{۶}(|x-f(x,x)|+|y-f(y,y)|+|z-f(z,z)|)$$

مجموعه های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} I_۱ &= \{(a,b)\in I^۲ : a,b<\frac{۳}{۴}\} \\ I_۲ &= \{(a,b)\in I^۲ : a\geq \frac{۳}{۴}, b<\frac{۳}{۴}\} \\ I_۳ &= \{(a,b)\in I^۲ : a<\frac{۳}{۴}, b\geq \frac{۳}{۴}\} \\ I_۴ &= \{(a,b)\in I^۲ : a,b\geq \frac{۳}{۴}\} \end{aligned}$$

حالات زیر را داریم:

حالت اول: $(x,y)\in I_۱\cup I_۴$. در این حالت $f(x,y)-f(y,z)=۰$ و نامساوی به وضوح برقرار است.

حالت دوم: $(x,y)\in I_۲$. در این حالت

$$f(x,y)=f(x,x)=\frac{۱}{۱۵}, f(y,y)=f(y,z)=\frac{۱}{۶}$$

پس باید نشان دهیم

$$\frac{۱}{۱۰}=|f(x,y)-f(y,z)|\leq \frac{۱}{۶}(|x-\frac{۱}{۱۵}|+|y-\frac{۱}{۶}|+|z-f(z,z)|)$$

اما:

$$\frac{3}{4} < x \leq 1 \Rightarrow \frac{41}{60} < x - \frac{1}{15} = |x - \frac{1}{15}| \leq \frac{14}{15}$$

بنابراین

$$\frac{1}{10} < \frac{41}{60 \times 6} \leq \frac{1}{6}(|x - \frac{1}{15}| + |y - \frac{1}{6}| + |z - f(z,z)|)$$

که ما را به نامساوی مورد نظرمان در این حالت می رساند.

حالت سوم: $(x,y) \in I_3$. در این حالت نیز مشابه حالت دوم نامساوی مورد نظر به دست می آید.

حال نشان می دهیم f غیرگسترشی پریسیک نمی باشد، اگر چنین باشد باید داشته باشیم

$$|f(\frac{3}{4}, \frac{7}{10}) - f(\frac{7}{10}, \frac{7}{10})| \leq \alpha_1 |\frac{3}{4} - \frac{7}{10}| + \alpha_2 |\frac{7}{10} - \frac{7}{10}|$$

که $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ و $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$. پس

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{6} - \frac{1}{15} \leq \alpha_1 |\frac{3}{4} - \frac{7}{10}| = \frac{\alpha_1}{20}$$

که تناقض $\alpha_1 \geq 2$ را نشان می دهد.

مراجع

1. M. Asadi, Some results of fixed point theorems in convex metric spaces, Nonlinear Functional Analysis and Applications, 19 (2014), no. 2, 171–175,

2. H. Fukhar-ud-din, V. Berinde, Fixed point iterations for Presic-Kannan nonexpansive mappings in product convex metric spaces, Acta Univ. Sapientiae Math., 10 (2018), no. 1, 56–69.

3. H. Fukhar-ud-din, A. R. Khan, Z. Akhtar, Fixed point results for a generalized nonexpansive map in uniformly convex metric spaces, Nonlinear Anal., 75 (2012), no. 13, 4747–4760.

4. M. Gabeleh, Semi-normal structure and best proximity pair results in convex metric spaces, Banach J. Math. Anal., 8 (2014), no. 2, 214–228.

5. W. Takahashi, A convexity in metric space and nonexpansive mappings I, Kodai Math. Sem. Rep., 22 (1970), 142–149.

Abstract
In the following text we have a short study in convex metric spaces as a generalization of vector normed spaces, also we have notes on nonexpansive, Kannan nonexpansive and Presic-Kannan nonexpansive mappings. The text is motivated with examples.