پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

یادگیری ماشین در بهینه سازی استوار سبد سهام

نگارنده

هلیا علی پناه

استاد راهنما: دکتر مجید سلیمانی دامنه

پروژه برای دریافت درجه کارشناسی
ریاضی کاربردی

چکیده

درهر جامعه، سرمایه‌گذاری در سهام (بازار بورس) یکی از فعالیت های مورد توجه در بازار مالی است. برای هر سرمایه‌گذار مهم است که قبل از سرمایه‌گذاری از ریسک و بازده سرمایه‌گذاری خود آگاه باشد. فرد سرمایه‌گذار تصمیمات خود را بر مبنای بیشینه کردن بازده و کمینه کردن ریسک و با توجه به اطلاعات و تجربیات گذشته (داده‌های تاریخی) می گیرد. بنابراین برخی از دادها قطعی نیستند و بنابر داده های موجود تقریب زده می شوند.

هنگامی که یک مسئله بهینه‌سازی با پارامتر هایی که دچار عدم قطعیت هستند حل می شود، ممکن است جواب بدست آمده در عمل بهینه نباشد و این به دلیل خطاهای وارد شده در مسئله هنگام تقریب زدن پارامتر ها است.

در این پروژه، ابتدا مسئله بهینه‌سازی سبد سهام را با دو تابع ریسک کلاسیک مارکویتز و ارزش در معرض خطر شرطی مدل می کنیم. سپس از آن جا که پارامتر های مسئله مشخص نیستند، سعی می کنیم با استفاده از تکنیک های یادگیری ماشین به تقریب زدن پارامتر ها بپردازیم و با استفاده از منظم سازی به روش PBR[1]، جواب های همراه با خطای زیاد را حذف کنیم. به این صورت که با کنترل کردن واریانس نمونه مقادیر تخمینی، ریسک و بازده فضای شدنی مسئله را محدود می کنیم. از آن جا که پس از انجام این عملیات مسئله بدست آمده دیگر محدب نیست، برای حل آن، هنگامی که تابع ریسک توسط مدل کلاسیک مارکویتز تعریف شده، دو نوع تقریب محدب مسئله را در نظر می گیریم: تقریب محدب درجه‌ـ۱ و تقریب محدب درجه‌ـ۲. هنگامی که تابع ریسک با ارزش در معرض خطر شرطی تعریف می‌شود، با بکارگیری تکنیک ریلکس‌سازی، مسئله را محدب می کنیم. در انتها فرم بهینه‌سازی استوار مدل PBR را بازنویسی می کنیم تا شرایط مسئله به دنیای واقعی نزدیک‌تر شود و جواب بدست‌آمده در عمل بهینه باشد.

واژه‌های کلیدی: انتخاب سهام، ریسک، بازده، یادگیری ماشین، ارزش در معرض خطر شرطی، مینیمم سازی استوار

[1] Performance-Based Regularization

پیشگفتار

با توجه به گسترش جمعیت و رشد و توسعه کشورها، شرایط اقتصادی و بازارهای مالی آن ها پیچیده تر شده است. هر فردی برای فعالیت در زمینه اقتصادی نیاز به برنامه‌ای مشخص و دقیق دارد. یکی از فعالیت‌های اقتصادی، سرمایه گذاری در سهام شرکت‌ها (بازار بورس) و مجموعه‌های متفاوت است.

هر سرمایه‌گذار پیش از سرمایه‌گذاری در سهام شرکت‌ها باید اطلاعات و داده‌های کاملی از بازار مالی و سوابق مجموعه‌های موجود برای سرمایه‌گذاری در اختیار داشته باشد. پیش‌بینی مقدار بازده و سود یک سرمایه‌گذاری همواره یک مسئله مهم بوده و کار بسیار دشواری است زیرا برای این پیش بینی باید عوامل متعددی مانند سیاست‌گذاری ها، عوامل تاثیرگذار بازار مالی، نحوه سرمایه‌گذاری فرد و غیره را در نظر گرفت. پیش‌بینی سود یک سرمایه‌گذاری تنها با توجه کردن به نحوه تغییر قیمت ها و روند صعود و نزول آن ها در گذشته میسر نیست و با این کار به نتیجه درست و قابل اطمینانی نمی‌رسیم. زیرا برای هر سرمایه‌گذاری، تابعی متناظر با میزان بازده آن تعریف می‌شود و توزیع این تابع بازده، تصادفی و وابسته به عواملی متعدد است. بنابراین ساختن یک سبد سهام یک مسئله چالش برانگیز برای سرمایه گذاران بشمار می آید.

در دهه ۱۹۳۰، پیش از بوجود آمدن نظریه سهام توسط مارکویتز، مردم از سرمایه‌گذاری در سهام استفاده می کردند اما تعریفشان به صورت کاملا متفاوتی بود. در سال ۱۹۳۸، جان بور ویلیامز[2] با نوشتن کتاب "نظریه ارزش سرمایه‌گذاری" سعی کرد مفهوم جدیدی بوجودآورد که در

[2] John Burr Williams

آن از سرمایه‌گذاری در چند قسمت مجزا و افزایش بازده تا حد امکان استفاده می‌شد. در ادامه افراد مختلف سعی در جمع‌آوری داده و تحلیل آن‌ها کردند تا بتوانند بهترین انتخاب در سرمایه‌گذاری را داشته‌باشند. اما کسی توجهی به ریسک سرمایه‌گذاری نداشت. تا زمانی که مارکویتز با ارائه نظریه ای بر پایه بهینه‌سازی تحولی شگرف در این زمینه بوجودآورد و باعث شد تا از آن پس به جای تمرکز در سرمایه‌گذاری در شرکتی که بیشترین بازده را دارد، ریسک سرمایه‌گذاری نیز در نظر گرفته‌شود. ایشان در سال ۱۹۹۰ جایزه نوبل اقتصاد را دریافت کرد. این پروژه به برخی تحقیقات اخیر در زمینه بهینه‌سازی سهام استوار با بهره گیری از یادگیری ماشین می‌پردازیم.

در این پروژه در فصل اول به تعریف و تشریح مفاهیم مورد استفاده در فصل های بعد می پردازیم. این مفاهیم به فهم بهتر مطلب کمک شایانی می کند.

در فصل دوم به مدل‌سازی مسئله سبد سهام می‌پردازیم و دو رویکرد متفاوت در تعریف تابع ریسک را معرفی می کنیم و در ادامه به تحلیل و توضیح این دو رویکرد می‌پردازیم.

در فصل سوم از کاربرد یادگیری ماشین در حل مسئله سهام می گوییم و به بیان روش تقریب میانگین نمونه برای تقریب زدن پارامتر های مجهول مسئله می پردازیم. در این مرحله به دلیل ناپایداری بوجود آمده در جواب مسئله به منظم سازی آن می‌پردازیم و جواب های ناشی از خطای بوجود آمده از تقریب زدن را حذف می‌کنیم.

در نهایت به دلیل متغیر بودن پارامترهای مسئله، برای رسیدن به جوابی قابل اطمینان، به مدل سازی مجدد مسئله به روش بهینه سازی استوار می پردازیم.

فهرست مطالب

۱ مفاهیم مقدماتی ۱

۱.۱ مقدماتی از نظریه احتمال ۱

۲.۱ مقدماتی از بهینه سازی ۳

۳.۱ چند اصلاح کلیدی در زمینه مالی ۵

۲ مدل سازی مسئله انتخاب سهام ۷

۱.۲ معرفی مسئله ۷

۲.۲ مدل سازی ۱۰

۳.۲ مدل کلاسیک مارکویتز ۱۱

۴.۲ ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی ۱۳

۳ یادگیری ماشین در بهینه سازی سهام ۱۷

۱.۳ روش تقریب میانگین نمونه (SAA) ۱۸

۲.۳ منظم سازی به روش PBR ۲۰

۱.۲.۳ روش PBR در بهینه سازی سهام با تابع ریسک مارکویتز ۲۲

۲.۲.۳ روش PBR در بهینه سازی سهام با تابع ریسک CVaR ۲۴

۴ فرم استوار مسائل PBR ۲۶

۱.۴ معرفی بهینه سازی استوار ۲۶
۲.۴ فرم استوار مسائل PBR ۲۷

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این بخش به برخی تعاریف و مفاهیم استفاده شده در این پروژه می پردازیم. این تعاریف شامل برخی مباحث در مالی، احتمال و ریاضیات می شود.

۱.۱ مقدماتی از نظریه احتمال

در مطالعه آمار، آزمایش‌هایی را که نتیجه آن را نمی‌توان به طور قطعی پیش‌بینی کرد، **آزمایش‌های تصادفی** می‌نامند. برای هر آزمایش می‌توان مجموعه‌ای از نتیجه‌هایی که ممکن است رخ دهد، جمع‌آوری کرد. به این مجموعه از برآمدها **فضای برآمد** یا **فضای نمونه** یا به طور ساده تر فضای S می گویند.

به تابعی از فضای نمونه به اعداد حقیقی، **متغیر تصادفی** می گویند. در واقع متغیر تصادفی تفسیر عددی نتیجه یک آزمایش است [۹]. برای مثال هنگامی که یک سکه سالم را دو بار پرتاب می کنیم، فضای نمونه برابر (HH،HT،TH،TT) می باشد که در آن H نشان دهنده شیر و T نشان دهنده خط است. حال فرض کنید X نمایانگر تعداد شیر های مشاهده شده باشد. پس X می تواند

مقادیر زیر را اختیار کند:

$$X(HH) = 2, \quad X(HT) = 1, \quad X(TH) = 1, \quad X(TT) = 0$$

بنابراین X تابعی از فضای نمونه به اعداد حقیقی است که به هر یک از پیشامد های آزمایش یک عدد حقیقی نظیر می کند. X را متغیر تصادفی این آزمایش می نامند.

فرض کنید یک آزمایش تصادفی را مثلا n بار انجام داده‌ایم. اگر یک برآمد بخصوص به تعداد f بار ظاهر شود، عدد f را **فراوانی** برآمد گوییم. نسبت $\frac{f}{n}$ را **فراوانی نسبی** برآمد می‌نامیم. فراوانی نسبی برای مقادیر کوچک n اغلب ناپایدار است. اما با افزایش n، به عددی مانند p میل می کند. عدد p را **احتمال** برآمد می‌نامیم.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی است. تابع $F_X : R \longrightarrow [0,1]$ تعریف شده به صورت زیر را **تابع توزیع تجمعی احتمال X** می‌نامند :

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P(X \leq x), \qquad \forall x \in R.$$

این تابع دارای خواص زیر است:

۱) برای هر $x \in R$ ، $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$؛

۲) تابع $F_X(x)$ یک تابع نزولی است؛

۳) $lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ و $lim_{x \longrightarrow +\infty F_X(x)=1}$؛

۴) تابع F_X از راست پیوسته است.

در ادامه مثال فوق، داریم:

$$p(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}, \qquad p(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}, \qquad P(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

حال فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد. **امید ریاضی** X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[X] = \int X dP$$

و **واریانس** X را با نماد $Var(X)$ یا σ_X^2 نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

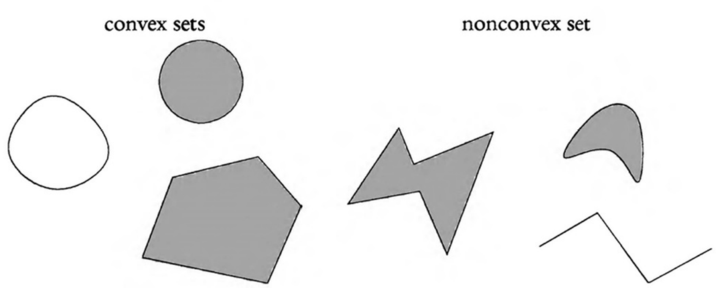
$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y را با نماد $Cov(X, Y)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$Cov(X, Y) = E\left[(X - E\left[X\right])(Y - E\left[Y\right])\right] = E\left[XY\right] - E\left[X\right] E\left[Y\right].$$

۲.۱ مقدماتی از بهینه سازی

مجموعه $C \subseteq R^n$ را محدب می نامند، هرگاه برای هر $x, y \in C$ و $\lambda \in [01]$ ، نقطه $\lambda x + (1 - \lambda)y$ عضو مجموعه C باشد. یا به طور معادل برای هر $x, y \in C$، پاره خط $[x, y]$ عضو مجموعه C باشد. چند مثال از مجموعه های محدب و نامحدب را می توانید در شکل ۱.۱ ببینید.



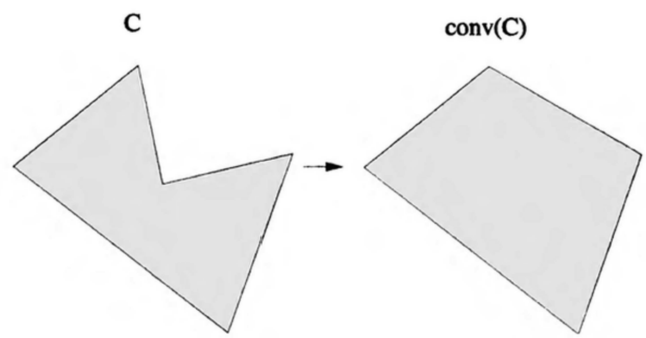
شکل ۱.۱: مجموعه های سمت چپ محدب و مجموعه های سمت راست نامحدب هستند.

مجموعه جواب های یک دستگاه معادلات خطی را یک چندوجهی می نامند.

بردار های $x_1, x_2, ..., x_k \in R^k$ را داریم. یک ترکیب محدب از این k بردار، برداری به فرم $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_k x_k$ است، بطوریکه $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ نامنفی هستند و $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_3 = 1$.

فرض کنید $S \subseteq R^n$. پوسته محدب S را با $conv(S)$ نمایش می دهیم و برابر است با:

$$conv(S) \equiv \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : x_1, x_2, ..., x_k \in S, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0, k \in N \right).$$



شکل ۲.۱: مجموعه نامحدب C و $conv(C)$ که مجموعه‌ای محدب است.

تابع $f : C \longrightarrow R$ را یک تابع محدب گوییم، هرگاه $C \subseteq R^n$ محدب باشد و برای هر $x, y \in C$ و $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

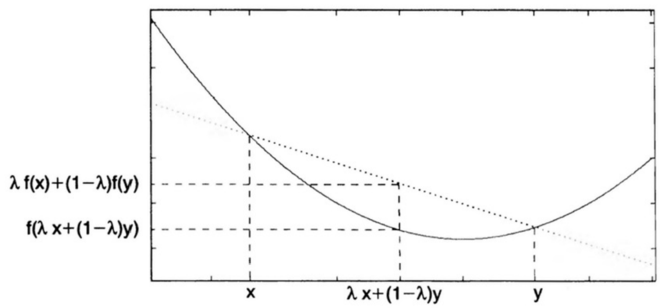
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

تابع $f : C \longrightarrow R$ را یک تابع محدب اکید گوییم، هرگاه $C \subseteq R^n$ محدب باشد و برای هر $x, y \in C$ که $x \neq y$ و $\lambda \in (0,1)$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

یک تابع f را مقعر می نامند، هرگاه $-f$ تابعی محدب باشد و f را اکیدا مقعر گویند هرگاه $-f$ اکیدا محدب باشد.

یک مسئله بهینه سازی محدب، مسئله ای است که از مینیمم سازی یک تابع محدب روی یک



شکل ۳.۱: در این شکل یک تابع محدب رسم شده و شرط تحدب تابع روی آن بررسی شده است.

مجموعه شدنی بسته و محدب تشکیل شده است. به طور دقیق تر،

$$
\begin{aligned}
&min \quad f(x)\\
&s.t. \qquad x \in C,
\end{aligned}
$$

بطوریکه C یک مجموعه بسته و محدب و f یک تابع محدب روی مجموعه C باشد.

۳.۱ چند اصلاح کلیدی در زمینه مالی

به درصدی از سود یا منفعتی که از یک سرمایه گذاری به شخص سرمایه گذار می رسد، **بازده** می گویند. بازده در واقع بهره دریافتی از اوراق بهادار است که به صورت سالیانه با توجه به مبلغ سرمایه گذاری شده، به سرمایه گذار داده می شود. **بازده مورد انتظار** مقدار بازده ای است که سرمایه گذار انتظار دارد پس از سرمایه گذاری دریافت کند و **بازده واقعی** بازدهی است که است که پس از پایان مدت زمان مشخص شده برای سرمایه گذاری به سرمایه گذار داده می شود.

با توجه به این که هر فرد سرمایه گذار از رویداد های بازار مالی با خبر نیست، برای هر سرمایه گذاری می توان تابع **ریسک** متناظر با سبد سهام تعریف کرد. این تابع ریسک به فرمهای گوناگون تعریف می شود.

به طور کلی ریسک را می توان به دو صورت سیستماتیک و غیر سیستماتیک تعریف کرد. ریسک سیستماتیک به ریسکی می گویند که از عوامل بازار تاثیر می پذیرد. این نوع ریسک تنها مربوط به سهام یک نهاد خاص نیست و در همه سهام موجود برای سرمایه گذاری در بازار به طور یکسان تعریف می شود. مدیریت اینگونه ریسک از دست مدیران شرکت خارج است و نمی توان آن را به هیچ گونه پیش بینی کرد. ریسک سیستماتیک به ریسکی گویند که از عوامل بازار تاثیر نگرفته باشد و به ساختار یک شرکت و بنگاه اقتصادی مربوط باشد. این نوع از ریسک را می توان مدیریت و کنترل کرد.

فصل ۲

مدل سازی مسئله انتخاب سهام

۱.۲ معرفی مسئله

مسئله خرید سهام (سرمایه‌گذاری در بازار بورس) یکی از مسائل مهم مالی در هر کشور است. خرید سهام توسط مردم، موجب رونق تولید و جلوگیری از رشد نقدینگی در جامعه می شود. هر سرمایه‌گذاری در بازار سهام به دو عامل بستگی دارد: ریسک سرمایه‌گذاری[1] و بازده[2] آن. یک سرمایه‌گذار در صورتی از خرید سهام خود سود می کند که سهامش بازده مثبتی داشته باشد. بازده مثبت سهام به دو روش صورت می گیرد: دریافت سود سهام و افزایش قیمت سهام. بازده منفی سهام نیز در صورت کاهش قیمت آن در بازار صورت می گیرد. تعیین دقیق بازدهی که یک سرمایه‌گذاری در آینده دارد، ممکن نیست. از این رو برای هر سرمایه‌گذاری ریسکی تعریف می‌شود و سرمایه‌گذار با اطلاع از این ریسک وارد سرمایه‌گذاری می شود. هر سرمایه‌گذار در تلاش است در بازاری سرمایه‌گذاری کند که با ریسک کمتر، بازده بیشتری داشته باشد. برای مثال افراد معمولاً برای کاهش ریسک سرمایه‌گذاری خود، ترجیح می دهند به جای سرمایه‌گذاری در یک بخش (بهترین

[1] Investment Risk
[2] Return

شرکت)، در چند بخش مختلف (سبد سهام) سرمایه‌گذاری کنند. در این صورت می توان سبد سهامی تشکیل داد که ترکیب ریسک و بازده آن بهتر از سرمایه‌گذاری در تنها یک شرکت باشد.

هر سرمایه‌گذار قبل از خرید سهام خود باید از میزان بازده و ریسک آن سهام اطلاعات کاملی داشته باشد. میزان بازده سرمایه‌گذاری در یک موقعیت در یک دوره، از مجموع میزان سود تقسیمی هر سهم (مبلغ سودی که شرکت برای هر سهم پرداخت می‌کند) و تغییر ارزش سهم نسبت به ابتدای دوره بدست می‌آید. در هر سرمایه‌گذاری امکان این وجود دارد که مقدار بازده واقعی سبد سهام، کمتر از مقدار بازده مورد انتظار[3] باشد. بنابراین یک نوع ریسک را می توان بر اساس احتمال متفاوت بودن نرخ بازده واقعی با نرخ بازده مورد انتظار تعریف کرد. معمولاً هرگاه خواستار بازده بیشتری باشیم، با ریسک بالاتری روبرو هستیم. بنابراین به حداکثر رساندن سود نمی تواند هدف خوبی برای سرمایه‌گذار باشد، زیرا شرکت ها می توانند با افزایش سرمایه باعث گسترش شرکت و افزایش سود آن شوند اما اگر میزان بازده این سرمایه‌گذاری ها کمتر از میزان سرمایه‌گذاری شده باشد، ارزش سهام آن شرکت کاهش می یابد.

یکی از شاخص های سرمایه‌گذاری در سهام، متوسط بازده مورد انتظار است که برابر میانگین سود آن سهام در سال های اخیر در یک دوره زمانی مشخص است. حال اگر متوسط بازده یک شرکت دارای نوسان زیاد باشد نشان دهنده ناپایداری شرکت است و می تواند یکی از عوامل ریسک تعریف شود. این ناپایداری را می توان با انحراف معیار سود های داده شده در هر سال محاسبه کرد. یکی دیگر از عوامل تعیین ریسک میزان همبستگی اجزای یک سبد سهام است. هر چه این همبستگی کمتر باشد، میزان ریسک سرمایه‌گذاری کاهش می یابد.

به طور کلی فرض بر این است که سرمایه‌گذاران ریسک گریزند و تا جای ممکن از سرمایه‌گذاری با ریسک بالا اجتناب می کنند. اما در صورت سود بسیار زیاد ممکن است متحمل ریسک بیشتری شوند. پس ریسک‌گریز بودن بدان معنی است که سرمایه‌گذاران تنها در قبال مقدار سود قابل توجه حاضر به قبول ریسک بالا هستند.

فرض کنید بازده مورد انتظار برای شرکت های A،B و C در دوره های زمانی $1, \ldots, T$ به

[3] Expected Return

	A	B	C
۱	μ_{1A}	μ_{1B}	μ_{1C}
۲	μ_{2A}	μ_{2B}	μ_{2C}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T	μ_{TA}	μ_{TB}	μ_{TC}

صورت درج شده در جدول است.

داریم:

$$\mu_A = \frac{\sum_{t=1}^{T} \mu_t A}{T},$$

و برای B و C هم به همین ترتیب. همچنین، داریم:

$$\sum\nolimits_{AB} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\mu_{tA} - \mu_A)(\mu_{tB} - \mu_B).$$

در مسئله انتخاب سهام، هر یک از سهام(شرکت‌ها) دارای یک وزن است. فرض کنید ϕ_i وزن مربوط به شرکت $i-$ام باشد. بازده مورد انتظار برای سهام مختلف برابر مجموع بازده‌های مورد انتظار برای تک تک سهام است.بنابراین بازده مورد انتظار این سه شرکت برابر:

$$\mu = \phi_{A\mu A} + \phi_{B\mu B} + \phi_{C\mu C}$$

است. واریانس بازده سبد سهام این سه شرکت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=A}^{C} \phi_i \phi_j \sigma_{ij},$$

که در آن σ_{ij} همبستگی بین سهام iو j را نشان می‌دهد.پس داریم:

$$\sigma^2 = \phi^\top \sum \phi$$

پس به طور کلی هر سرمایه‌گذار به دنبال دو هدف است[۷] :

$$\max \quad \mu^\top \phi,$$
$$\min \phi^\top \sum \phi$$

هدف اصلی این فصل مدل کردن مسئله سبد سهام به صورت یک مسئله بهینه سازی و معرفی معیارهایی برای تعیین مقدار ریسک یک سرمایه‌گذاری است.

۲.۲ مدل سازی

با توجه به توضیحات بخش قبل، مسئله تعیین سبد بهینه سهام را می توان به صورت زیر مدل کرد:

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \underset{\omega \in R^P}{argmin} \ Risk(\omega^\top X) \\ \text{s.t.} \qquad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \mu = R) \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که در آن متغیر تصمیم $\omega \in R^p$ بیانگر مقدار سرمایه‌گذاری فرد سرمایه گذار در p موقعیت سرمایه گذاری، مجهول مسئله، است. متغیر تصادفی $X \in R^p$ با امید ریاضی μ بیانگر بازده این p موقعیت سرمایه گذاری است و تابع $Risk : R^p \longrightarrow R$ مقدار ریسک این سرمایه گذاری را تعیین می کند که البته میتوان این تابع ریسک را به روش های متفاوت تعریف کرد.

قید $\omega^\top 1_p = 1$ برای نرمال سازی تعریف شده است، به طوریکه:

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_i = 1.$$

با توجه به معادله زیر، قید $(\omega^\top \mu = R)$ برای تعیین بازده مورد انتظار (R) از این سرمایه گذاری است (بسته به چگونه پرداختن به مسئله، می‌توان این شرط را در نظر نگرفت. به همین دلیل این

قید را در پرانتز قرار داده ایم):

$$E\left[\sum_{i=1}^{p}\omega_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{p}\omega_i E\left[X_i\right]=\sum_{i=1}^{p}\omega_i\mu_i=\omega^\top\mu$$

توجه داشته باشید که این مدل کلی است و در آن مقدار منفی برای برخی مولفه‌های ω نیز مورد قبول است.

می توان این مسئله را به صورت زیر نیز مدل کرد:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \underset{\omega\in R^P}{argmax}\ \omega^\top\mu\\ \text{s.t.}\qquad & \omega^\top 1_p = 1\\ & (Risk(\omega^\top X\le\varepsilon))\end{aligned}\tag{۲.۲}$$

که در آن $\varepsilon\in R$ عددی نسبتا کوچک است و برای تعیین مقدار ریسک مجاز این سرمایه گذاری مشخص شده است.

تفاوت این مدل با مدل (۱.۲) در اولویت های شخص سرمایه‌گذار است. فردی که خواستار سود بیشتر است و قابلیت ریسک پذیری بیشتری دارد، البته مقدار ریسکی که می پذیرد یک سقفی دارد، مدل دوم را ترجیح می دهد و یک سرمایه‌گذار محتاط که در درجه اول به دنبال به حداقل رساندن ریسک خود است، مدل اول را انتخاب میکند.

۳.۲ مدل کلاسیک مارکویتز

همان طور که قبلا گفته شد، می توان تابع ریسک را به روش های متفاوت تعریف کرد. یکی از این روش‌ها رویکرد کلاسیک مارکویتز[۴] است. در این مدل، سرمایه‌گذار میانگین و واریانس سود حاصل از سرمایه‌گذاری در موقعیت های متفاوت را معیار ریسک قرار می‌دهد و تابع ریسک به

[4]Markowitz

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Risk(\omega^\top X) = \omega^\top \sum \omega \tag{۳.۲}$$

که در آن $\sum$ ماتریس واریانس-کواریانس (متغیر تصادفی متناظر با بازده) این سرمایه‌گذاری است.

در این روش، انگیزه تعریف کردن تابع ریسک به کمک واریانس، وابستگی (همبستگی) بین سبدهای سرمایه‌گذاری است. هر مقدار که این کمتر باشد، موجب می‌شود که سرمایه‌گذار ریسک کمتری متحمل شود. برای مثال اگر یک سرمایه‌گذار در یک مجموعه شرکت‌های وابسته به دولت سرمایه‌گذاری کند، در صورت کاهش ارزش سهام یکی از شرکت‌های حاضر در سبد، ارزش سهام دیگر شرکت‌های موجود در سبد نیز متعاقبا کاهش می‌یابد زیرا به یکدیگر وابسته هستند. اما اگر سبدهای سرمایه‌گذاری همبستگی کمتری به یکدیگر داشته باشند، احتمال از دست رفتن ارزش همه سبد به طور همزمان کاهش می‌یابد. بنابراین ریسک سرمایه‌گذاری نیز کاهش می‌یابد. در بسیاری از مدل ها از این تابع ریسک استفاده می‌شود.

زمانی که از مدل کلاسیک مارکویتز برای تابع ریسک استفاده می‌کنیم، مسئله بهینه سازی سهام به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \omega_{MV} &= \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ (\omega^\top \sum \omega) \\ \text{s.t.} \qquad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \mu_n = R) \end{aligned} \tag{MV}$$

تحقیقات زیادی روی تابع ریسک مارکویتز انجام شده است و شواهد نظری و تجربی متعددی وجود دارد که نشان می‌دهند این تابع معیار مناسبی برای سنجش ریسک سرمایه‌گذاری نیست.

۴.۲ ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی

تابع ریسک را می توان به صورت‌های دیگری نیز تعریف کرد. در این بخش از ارزش در معرض خطر [5]و ارزش در معرص خطر شرطی [6] استفاده می‌شود.

ارزش در معرض خطر

ارزش در معرض خطر (VaR) معیار مهمی در اندازه‌گیری ریسک در بازارهای مالی است، و به ما یک شاخص عددی از ریسک می‌دهد.

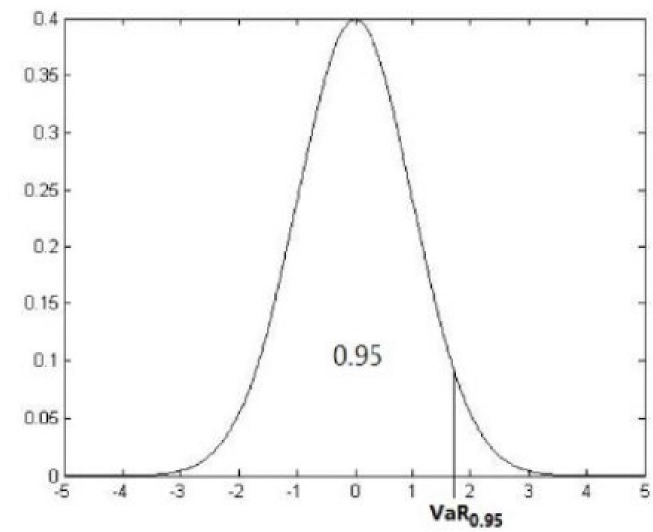
بیشینه کاهش ارزش سبد دارایی‌ها (زیان)، در یک بازه زمانی مشخص، با سطح اطمینان مشخص را ارزش در معرض خطا می‌نامند [۸]. دقت کنید که این بازه زمانی بسته به اهداف مدیریت ریسک و ویژگی‌های سهام می‌تواند متفاوت باشد. برای مشخص شدن این مفهوم به مثال زیر توجه کنید:

فرض کنید ارزش روز یک سهم از یک شرکت ۱۰۰ تومان باشد و با احتمال ۰.۹۵ حداکثر کاهش ارزش این سهام، طی هفته آینده، ۶ تومان باشد. در این صورت با اطمینان ۰.۹۵ می توان گفت که ارزش این سهم در هفته آینده از ۹۴ تومان کمتر نیست. این معیار برای تعیین حداقل سرمایه‌گذاری برای جبران ضرر و زیان ناشی از ریسک بازار بسیار اهمیت دارد.

فرض کنید Y متغیر تصادفی زیان باشد. شکل ۱.۲ مقدار عددی $VaR_{0.95}(\mathrm{Y})$ در یک توزیع نرمال استاندارد را نشان می‌دهد. دقت کنید که مساحت زیر نمودار تابع چگالی احتمال تا نقطه $VaR_{0.95}(\mathrm{Y})$ برابر ۰.۹۵ است. بنابراین $VaR_{0.95}(\mathrm{Y})$ برابر ۱.۶۴۵ است.

ارزش در معرض خطر، معیاری ساده و قابل فهم برای اندازه‌گیری ریسک بازار است و در اکثر نرم‌افزار های مالی وجود دارد. اما بر خلاف شواهد تجربی که نشان دهنده کارایی ارزش در معرض خطر در اندازه‌گیری ریسک است، عدم تحدب آن نسبت به زیان، استفاده از آن در عمل را دشوار

[5] VaR
[6] CVaR



شکل ۱.۲: نمایش $VaR_{0.95}$ در یک توزیع نرمال استاندارد

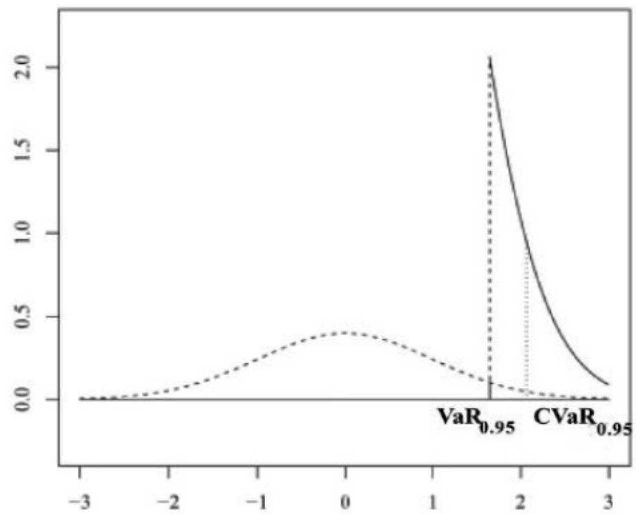
می‌کند. بنابراین می‌توان از معیاری جایگزین، مانند ارزش در معرض خطر شرطی، استفاده کرد.

ارزش در معرض خطر شرطی

ارزش در معرض خطر شرطی معیاری محدب و جایگزین مناسبی برای اندازه‌گیری ریسک بازار است. این معیار برابر متوسط زیان بیشتر از VaR_α است. در واقع $CVaR_\alpha$ بیان کننده این است که در صورت زیان، به طور متوسط چقدر زیان می‌کنیم. مثال زیر را در نظر بگیرید:

فرض کنید ارزش روز یک سهم ۱۰۰ تومان باشد و با احتمال ۰.۹۵ حداکثر کاهش ارزش آن، طی هفته آینده، ۶ تومان باشد. در واقع تنها در ۵ مورد از ۱۰۰ معامله هفته آینده زیان بیشتر از ۶ تومان اتفاق می‌افتد و در هر یک از این ۵ مورد، مقدار زیان در بازه $(VaR_{0.5}, +\infty)$ خواهد بود. متوسط (امید ریاضی) این بازه را $CVaR_{0.5}$ می‌نامیم.

فرض کنید Y متغیر تصادفی زیان باشد. ارزش در معرض خطر شرطی Y در سطح اطمینان α که با نماد $CVaR_\alpha(Y)$ نشان داده می‌شود، در شکل ۲.۲ دیده می‌شود.



شکل ۲.۲: نمایش $CVaR_{0.95}$در یک توزیع فرضی پیوسته

همان طور که از تعاریف و شکل ۲.۲ مشخص است، داریم:

$$VaR_\alpha(Y) \leq CVar_\alpha(Y)$$

حال به مسئله بهینه سازی سبد سهام باز می‌گردیم. در این مسئله می‌توان ریسک را به صورت زیر تعریف کرد:

$$Risk(\omega^\top X) = CVaR(-\omega^\top X; \beta) \tag{۴.۲}$$

که در آن $\beta \in (0.5, 1)$ است و

$$CVaR(-\omega^\top X; \beta) = min\{\alpha + \frac{1}{1-\beta} E(-\omega^\top X - \alpha)^+\}.$$

این معادله با انجام عملیات ریاضی بر روی فرمول ارزش در معرض خطر شرطی بدست می‌آید. مرجع [۱] را ببینید.

مسئله بهینه سازی سهام بر پایه ریسک $CVaR$ به صورت

$$\begin{aligned} \omega_{cv} = & \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ CVaR(-\omega^\top X;\beta) \\ \text{s.t.} \quad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \mu = R) \end{aligned} \tag{CV}$$

است که در آن،

$$Risk \equiv CVaR(-\omega^\top X;\beta) = \underset{\alpha}{min} \quad (\alpha + \frac{1}{1-\beta} E(-\omega^\top X - \alpha)^+).$$

فصل ۳

یادگیری ماشین در بهینه سازی سهام

یادگیری ماشین یکی از شاخه های هوش مصنوعی است و هدف آن این است که یک رایانه را قادر سازد تا در شرایطی که به طور دقیق و قطعی برای آن برنامه‌ریزی نشده، با توجه به داده !های قبلی تصمیم بگیرد و عمل کند. بنابراین یادگیری ماشین اساسا درباره تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت است.

در برنامه ریزی کلاسیک ریاضی، معمولا مسائل با فرض قطعی بودن داده ها حل می شوند؛ درحالی که در دنیای واقعی مسائل متعددی وجود دارد که در آن ها اطلاعات دقیقی درباره برخی اجزای مسئله نداریم و تنها مجموعه‌ای از داده‌ها که حاصل تجربیات گذشته است در اختیارمان قرار دارد. در این دسته از مسائل، عدم قطعیت وجود دارد. این عدم قطعیت در مسائل بهینه سازی، می تواند حاصل اختلال و خطا در جمع آوری اطلاعات باشد و یا با از دست رفتن برخی از دادها رخ دهد. عدم قطعیت همچنین در داده‌های بی‌قاعده مانند نمونه‌های متناهی از یک توزیع تجربی و یا یک تابع از آن، رخ می‌دهد. می‌توان با به کارگیری یادگیری ماشین در این دسته از مسائل بهینه سازی، جواب مسئله‌ای که در آن با عدم قطعیت مواجه هستیم را پیدا کرد.

۱.۳ روش تقریب میانگین نمونه (SAA)

تقریب میانگین نمونه[1]، روشی برای حل مسائل بهینه‌سازی احتمالی است. در این روش مقدار تابع مورد نظر، توسط تعدادی نمونه تصادفی تقریب زده می شود و جوابی قابل اطمینان، نزدیک به جواب بهینه واقعی بدست می‌آید.

در مسئله اولیه (۱.۲)، اطلاعاتی دقیق درباره بردار X و μ سرمایه‌گذاری مربوطه نداریم زیرا معمولا توزیع X را نمی دانیم، در نتیجه می توان از داده های در دسترس که از تجربیات گذشته حاصل شده (داده‌های تاریخی)، استفاده کرد. این داده ها مربوط به اطلاعات سرمایه‌گذاری و سود حاصل از آن در گذشته است و به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند.

فرض کنید $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ بیانگر داده های مربوط به سرمایه گذاری هایی است که در گذشته انجام شده است (توجه کنید که این داده ها iid[2] هستند).

در این صورت مسئله (۱.۲)، با به کارگیری روش SAA، به صورت زیر در می‌آید[۱] :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_n = \underset{\omega \in R^P}{argmin} \ \widehat{Risk}(\omega^\top X) \\ \text{s.t.} \qquad \omega^\top 1_p = 1 \\ (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \end{aligned} \tag{SAA}$$

که در آن،

$$\widehat{Risk}(\omega^\top X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Risk(\omega^\top X_i)$$

و

$$\hat{\mu}_n = n^{-1} \sum_{i=-1}^{n} E(X_i).$$

در ادامه دو تابع ریسک ذکر شده در فصل قبل را در نظر می گیریم و مسئله بهینه‌سازی سبد سهام با این دو تابع به روش SAA را بازنویسی می کنیم.

[1] Sample Average Approximation (SAA)

[2] distribution identical and independent

زمانی که از مدل کلاسیک مارکویتز برای تعریف تابع ریسک استفاده می کنیم، مسئله بهینه سازی سهام با روش SAA به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{n,MV} &= \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ (\omega^\top \hat{\sum}_n \omega) \\ \text{s.t.} \quad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \end{aligned} \tag{MV-SAA}$$

که در آن $\hat{\mu}_n$ و $\hat{\sum}_n$ به ترتیب میانگین و ماتریس کواریانس نمونه X هستند.

زمانی که از تابع ارزش در معرض خطر شرطی برای ریسک استفاده می کنیم، مسئله بهینه‌سازی سهام با روش SAA به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{n,CV} &= \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ \widehat{CVaR}_n(-\omega^\top X; \beta) \\ \text{s.t.} \quad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \end{aligned} \tag{CV-SAA}$$

به طوریکه $\beta \in (0.5, 1)$ و

$$\widehat{CVaR}_n(-\omega^\top X; \beta) = \underset{\alpha \in R}{min} \quad \alpha + \frac{1}{n(1-\beta)} \sum_{i=1}^{n} (-\omega^\top X_i - \alpha)^+$$

میانگین داده ها برای تقریب $CVaR(-\omega^\top X; \beta)$ است.

توجه کنید که اگر تعداد نمونه ها به بی نهایت میل کند، جواب بهینه مسئله (MV) و (CV) به ترتیب به (MV-SAA) و (CV-SAA) میل می کند. اما در عمل یک سرمایه گذار تعداد محدودی از داده در دسترس دارد. بنابراین ممکن است جوابی که برای مسئله می یابد، ناپایدار باشد.

یک جواب برای مسئله فوق را ناپایدار گوییم هرگاه با تغییری کوچک در داده‌ها جواب بهینه مسئله تغییر چشمگیری کند. در این صورت جواب مسئله به شدت وابسته به انتخاب داده ها می

شود. از آنجا که داده ها به صورت تصادفی انتخاب می شوند و دارای الگوی خاصی نیستند، جواب حاصل از حل مسئله بهینه‌سازی سهام به روش SAA می‌تواند غیر قابل اعتماد باشد.

۲.۳ منظم سازی به روش PBR

منظم سازی روشی است که برای پایدار ساختن جواب مسائل بکار می رود. در ادامه روش PBR [۳] را برای منظم سازی بکار می‌گیریم تا جوابی که در مسئله SAA با تعداد محدودی داده بدست آوردیم، را ارتقا دهیم و جوابی که برای مسئله بدست می آید، قابل اطمینان باشد.

برای این کار واریانس نمونه مقادیر تخمینی را محدود می‌کنیم. در رویکرد (SAA) ، مقادیر $\widehat{Risk_n}(\omega^\top X)$ و $\omega^\top \hat{\mu}_n$ تخمین زده شده‌اند. در روش PBR هدف این است که مسئله را به سمتی سوق دهیم که خطای کمتری در جواب رخ دهد و احتمال این که جواب بهینه، حاصل از نمونه‌های نامناسب و همراه با خطا باشد، کم شود. با پیاده سازی این روش روی مسئله (SAA) داریم[۱] :

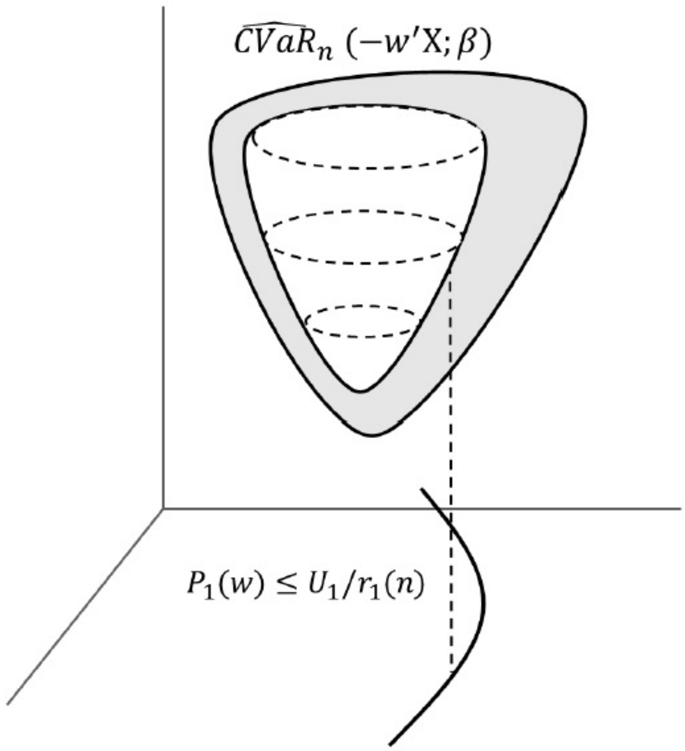
$$
\begin{aligned}
\hat{\omega}_{n,PBR} = & \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ \widehat{Risk}(\omega^\top X) \\
\text{s.t.} \qquad & \omega^\top 1_p = 1 \\
& (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\
& SVar(\widehat{Risk}_n(\omega^\top X)) \leqslant U_1 \\
& (SVar(\omega^\top \hat{\mu}_n) \leqslant U_2)
\end{aligned}
\tag{PBR}
$$

که در آن $SVar(.)$ تابع واریانس نمونه است و U_1 و U_2 برای کنترل درجه منظم سازی به کار می روند.

قید $SVar(\widehat{Risk}_n(\omega^\top X)) \leqslant U_1$ برای حذف جواب های ω با خطای زیاد در تخمین تابع ریسک و قید $SVar(\omega^\top \hat{\mu}_n) \leqslant U_2$ نیز برای حذف خطا های حاصل از تخمین $\hat{\mu_n}$ به مسئله

[3] Performance-Based Regularization

اضافه شده‌اند. برای درک بهتر این موضوع به شکل ۱.۳ توجه کنید.



شکل ۱.۳ : نمایشی از روش PBR که تنها روی تابع هدف پیاده شده است. قسمت تیره تر مربوط به جواب هایی است که از تقریب زدن توسط داده ها بوجود آمده و همراه با خطا است. با روش PBR این قسمت از فضای شدنی مسئله حذف شده و تنها قسمت سفید باقی می ماند.

۱.۲.۳ روش PBR در بهینه سازی سهام با تابع ریسک مارکویتز

اگر تابع ریسک مطابق مدل کلاسیک مارکویتز تعریف شده باشد، مقدار واریانس تابع ریسک برابر است با:

$$Var(\omega^\top \hat{\mu}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(\omega^\top X_i) = \frac{1}{n}\omega^\top \sum \omega$$

پس با بکار گیری روش PBR در مسئله بهینه سازی سبد سهام مارکویتز داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{n,MV} &= \underset{\omega\in R^P}{argmin}\ \omega^\top \hat{\sum}_n \omega \\ \text{s.t.} \quad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\ & SVar(\omega^\top \hat{\sum}_n \omega) \leqslant U \end{aligned} \qquad \text{(MV-PBR)}$$

توجه کنید که شرط مربوط به میانگین نمونه $(\omega^\top \hat{\mu}_n = R)$ را منظم نمی‌کنیم زیرا واریانس نمونه $\omega^\top \mu_n$ برابر $\omega^\top \hat{\sum}_n \omega$ است که یک بار در تابع هدف آن را منظم کردیم.

گزاره ۱.۱.۵: داریم

$$SVar(\omega^\top \hat{\sum}_n \omega) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} \omega_i\omega_j\omega_k\omega_l \hat{Q}_{ijkl}$$

اثبات: برای برهان به [۱] مراجعه کنید.

حل یک مسئله بهینه سازی در حالت کلی ممکن است دشوار یا حتی ناممکن باشد. هنگامی که یک مسئله بهینه‌سازی محدب باشد، حل آن آسان تر می شود. دقت کنید که محدودیت جدیدی که در مسئله $(MV-PBR)$ اضافه شده، یک چند جمله ای از درجه ۴ است. تعیین تحدب یک چندجمله ای درجه ۴، یک مسئله NP-hard است. بنابراین میخواهیم تقریب محدبی از چندجمله ای فوق را معرفی کنیم تا بدون مواجهه با دشواری از تحدب آن اطمینان حاصل کنیم. دو تقریب زیر برای این چندجمله ای در ادبیات موضوع مطرح شده است:

• *تقریب درجه یک*

• *بهترین تقریب محدب درجه دو*

در تقریب درجه یک، قید چند جمله ای درجه ۴ را به صورت زیر تقریب می زنیم:

$$(\omega^\top \hat{\alpha})^4 \approx \sum_{ijkl} \omega_i \omega_j \omega_k \omega_l \hat{Q}_{ijkl},$$

که در آن $\hat{\alpha}$ به صورت زیر است:

$$\hat{\alpha}_i = \sqrt[4]{\hat{Q}_{iiii}} = \sqrt[4]{\frac{1}{n}\hat{\mu}_{4,iiii} - \frac{n-3}{n(n-1)}(\hat{\sigma}^2_{ii})^2} \qquad (۱.۳)$$

بنابراین تقریب محدب درجه‌ـ۱ مسئله $MV-PBR$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{n,PBR1} &= \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ \omega^\top \hat{\sum}_n \omega \\ \text{s.t.} \quad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\ & \omega^\top \hat{\alpha} \leq \sqrt[4]{U} \end{aligned} \qquad (\text{MV-PBR-۱})$$

که در آن $\hat{\alpha}$ در رابطه (۱.۳) داده شده است.

اگر بهترین تقریب محدب درجه دو از مسئله (MV-PBR) را در نظر بگیریم ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{n,PBR2} &= \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ \omega^\top \hat{\sum}_n \omega \\ \text{s.t.} \quad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\ & \omega^\top A^* \omega \leq \sqrt{U}. \end{aligned} \qquad (\text{MV-PBR-۲})$$

برای جزئیات بیشتر به [۱] مراجعه کنید.

۲.۲.۳ روش PBR در بهینه سازی سهام با تابع ریسک CVaR

اگر تابع ریسک را توسط ارزش در معرض خطر شرطی تعریف کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\hat{\omega}_{n,PBR} = \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ \widehat{CVaR}_n(-\omega^\top X;\beta) \\
&\text{s.t.} \qquad \omega^\top 1_p = 1 \\
&\qquad\qquad (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\
&\qquad\qquad SVar(\widehat{CVaR}_n(-\omega^\top X;\beta)) \leqslant U_1 \\
&\qquad\qquad (SVar(\omega^\top \hat{\mu}_n) \leqslant U_2)
\end{aligned} \tag{CV-PBR}$$

که با محاسبه واریانس نمونه ها که در قید آمده[۴]، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\underset{\alpha,\omega,z}{min}\ \alpha + \frac{1}{n(1-\beta)}\sum_{i=1}^{n} z_i \\
&\text{s.t.} \qquad \omega^\top 1_p = 1 \\
&\qquad\qquad (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\
&\qquad\qquad \frac{1}{n(1-\beta)^2} z^\top \Omega_n z \leq U_1 \\
&\qquad\qquad z_i = max(0, -\omega^\top X_i - \alpha) \quad ; i = 1, ..., n \\
&\qquad\qquad \frac{1}{n}\omega^\top \hat{\sum}_n \omega \leq U_2
\end{aligned} \tag{CV-PBR'}$$

از آن جا که (CV-PBR) به دلیل وجود محدودیت $z_i = max(0, -\omega^\top X_i - \alpha)$ نا محدب است، با استفاده از تکنیک ریلکس‌کردن این محدودیت را به صورت $z_i \geq -\omega^\top X_i - \alpha$ و $z_i \geq 0$ می‌نویسیم. بنابراین داریم:

[۴] برای جزئیات محاسبه به [۱] مراجعه کنید.

$$
\begin{aligned}
&\underset{\alpha,\omega,z}{min}\ \alpha + \frac{1}{n(1-\beta)}\sum_{i=1}^{n} z_i \\
&\text{s.t.} \qquad \omega^\top 1_p = 1 \\
&\qquad\quad (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\
&\qquad\quad \frac{1}{n(1-\beta)^2} z^\top \Omega_n z \leq U_1 \\
&\qquad\quad z_i \geq 0 \quad ; i = 1, ..., n \\
&\qquad\quad z_i \geq -\omega^\top X_i - \alpha \quad ; i = 1, ..., n \\
&\qquad\quad \frac{1}{n}\omega^\top \hat{\sum}_n \omega \leq U_2
\end{aligned}
\tag{CV-relax}
$$

فصل ۴

فرم استوار مسائل PBR

در برنامه ریزی ریاضی معمولا مسائل با پیش فرض قطعی بودن داده‌ها حل می‌شوند؛ اما در دنیای واقعی معمولا داده ها دچار عدم قطعیت هستند. در مسائل ریاضی عدم قطعیت داده ها در نظر گرفته نمی‌شود، در نتیجه ممکن است با تغییر یکی از داده‌ها تعدادی از محدودیت ها نقض شود و جواب بدست آمده دیگر بهینه یا حتی شدنی نباشد. برای حل این مشکل، از بهینه سازی استوار [1] استفاده می‌شود.

۱.۴ معرفی بهینه سازی استوار

بهینه سازی استوار روشی معروف و پرکاربرد در ادبیات بهینه‌سازی برای به کار گیری عدم قطعیت است. ایده کلی این روش، در نظر گرفتن بدترین حالت ممکن و حل مسئله بر اساس آن است.

یک مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر را در نظر بگیرید:[۸]

$$\min_{x\in R^n} \; f_0(x)$$

$$\text{s.t.} \qquad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., m$$

[1] Robust Optimization

که در آن $x \in R^n$ بردار متغیرهای تصمیم، $f_0, f_i : R^u \longrightarrow R$ توابع حقیقی مقدار هستند.
مسئله بهینه‌سازی استوار متناظر با آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in R^n} \ f_0(x) \\ &\text{s.t.} \qquad f_i(x, u_i) \le 0, \quad \forall u_i \in \mathcal{U}_i, \quad i = 1, 2, ..., m \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{U}_i$ مجموعه عدم قطعیت [۲] داده‌های مسئله است بطوریکه پارامتر نامعلوم $u_i \in R^k$ مقادیر خود را در مجموعه‌های $\mathcal{U}_i \subseteq R^k$ می‌گیرد. همچنین می‌توان فرض کرد که

$$(u_1, u_2, ..., u_k) \in (\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \ \times \mathcal{U}_k) = \mathcal{U}$$

در حالتی که مسئله بهینه‌سازی خطی است داریم:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in R^n} \quad c^\top x \\ &\text{s.t.} \quad Ax \le b, \quad \forall (a^1, ..., a^m) \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

۲.۴ فرم استوار مسائل PBR

در مسائلی که از یادگیری ماشین در آن‌ها استفاده شده، عمدتا پارامترها دارای عدم قطعیت هستند. بنابراین می توان در حل این دسته از مسائل، از بهینه سازی استوار استفاده کرد. در مسائل تعیین سبد سهام نیز بهینه‌سازی استوار کاربرد وسیعی دارد. فرض کنید یک سرمایه‌گذار بخواهد در n شرکت سرمایه‌گذاری کند. او می‌خواهد، در یک افق زمانی مشخص، با بازدهی مشخص، کمترین ریسک را داشته باشد. توزیع بازده و زیان این سرمایه‌گذاری مشخص نیست و با در نظر گرفتن هر توزیع، مقدار زیان تغییر می‌کند. بنابراین یکی از راه‌های یافتن جواب بهینه نهایی زمانی که توزیع زیان نامعلوم است، مینیمم کردن مقدار ریسک در بدترین حالت (توزیع با بیشترین زیان) است[۸]
.

[2]Uncertainity set

در ادامه می‌خواهیم تقریب محدب مسائل $(MV-PBR)$ و $(CV-PBR)$ به کمک بهینه‌سازی استوار را بازنویسی کنیم.

در تقریب محدب مسئله $(MV-PBR)$ با بکارگیری بهینه سازی استوار داریم[۱] :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{n,PBR1} = & \underset{\omega \in R^P}{argmin}\ \omega^\top \hat{\sum}_n \omega \\ \text{s.t.} \quad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\ & \underset{u\in \upsilon}{max} \quad \omega^\top u \leq \sqrt{U}. \end{aligned} \tag{MV-PBR-RO}$$

که در آن υ مجموعه ای است که به طور زیر تعریف می شود:

$$\upsilon = \{u \in R^p | u^\top P^\dagger u \leqslant 1, (I-PP^\dagger)u = 0\},$$

که $P = \alpha\alpha^\top$ برای مسئله (MV-PBR-۱) و $P = A^*$ برای مسئله (MV-PBR-۲) و $P^\dagger$ ماتریس شبه وارون مور-پنروس ماتریس P [3] است. در صورت وارون پذیر بودن P، $P^\dagger$ برابر وارون P خواهد بود که $P = A^*$ وارون پذیر است. برای جزئیات بیشتر مرجع [۱] را ببینید.

در تقریب محدب مسئله $(CV-PBR)$ با بکار گیری بهینه‌سازی استوار داریم:

$$\begin{aligned} & \underset{\alpha,\omega,z}{min}\ \alpha + \frac{1}{n(1-\beta)} \sum_{i=1}^{n} z_i \\ \text{s.t.} \quad & \omega^\top 1_p = 1 \\ & (\omega^\top \hat{\mu}_n = R) \\ & \underset{u\in\upsilon_1}{max}\ z^\top u \leq \sqrt{U_1} \\ & z_i = max(0, -\omega^\top X_i - \alpha); \quad i = 1, ..., n \\ & (\underset{\tilde{\mu}\in\upsilon_2}{max}\ \omega^\top(\tilde{\mu} - \mu) \leq \sqrt{U_2}) \end{aligned} \tag{CV-PBR-RO}$$

[3] Moore-Penrose pseudoiverse

که در آن

$$\upsilon_1 = \left\{\mu \in R^p | (\tilde{\mu} - \mu)^\top \hat{\sum}_n^{-1} (\tilde{\mu} - \mu) \leq 1\right\},$$

$$\upsilon_2 = \left\{u \in R^p | u^\top \Phi_n^\dagger u \leq 1, 1_p^\top u = 0\right\}$$

و $\Phi_n^\dagger$ ماتریس شبه وارون مور-پنروس Φ_n است.

کتاب‌نامه

[۱] G.-Y. Ban, N. El Karoui, A.E.B. Lim, Machine Learning and Portfolio Optimization, Management Science, 64, 1136-1154, 2016.

[۲] C. Caramanis, S. Mannor, H. Xu, Robust Optimization in Machine Learning, Preptint, 2012.

[۳] G.-Y. Ban, N. El Karoui, A.E.B. Lim, Performance-Based Regularization in Mean-CVaR Portfolio Optimization, Priprint, 2014.

[۴] A. Beck, Introduction to Nonlinear Optimization: Theory, Algorithms, and Applications with MATLAB, MOS-SIAM series on Optimization, 2014.

[۵] E. Martinez, J. Manuel, Stock Selection Using Machine Learning Techniques, Preprint, 2017.

[۶] F.D. Paiva, R.T.N. Cardoso, G.P. Hanaoka, Decision Making for Financial Trading: A fusion approach of machine learning and portfolio selection, Expert Systems with Applications,115, 635-655, 2019.

[۷] S. Amoukazemi, Inverse Optimization and its Applications in Network Flows, Assignment and Portfolio Selection, Master dissertation, University of Tehran, 2013.

[۸] Z. Nazif, Robust Portfolio Choice Using Value at Risk Criteria, Master dissertation, University of Tehran, 2017.

[۹] R.V. Hogg, E.A. Tanis, D. Zimmerman, Probability and Statistical Inference, Pearson Education, 2015.

Abstract

Portfolio selection (investment) is one of the crucial financial issues in each country. An investor should have a great amount of information about risk and return of the investment. The investor makes decision based on the former investments' information (historical data). So, the exact values of risk and return are unknown.

In an optimization problem when some parameters are approximated, most of the times, the solution of the problem is not optimal in practice due to the approximations and the errors.

In this bachelor project, first we review two approaches for defining risk: the classic Markowitz one and the conditional value at risk (CVaR). Then we continue with modeling the portfolio selection problem. As the distribution of the relative investment is unknown, we try to approximate it by Sample Average Approximation (SAA) method. We apply *Performance-based regularization* (PBR) approach to improve the model and to control the varience of the estimated parameters.

To make the derived portfolio optimization problem with Markowitz Risk function convex, we consider two convex approximations: Rank-1 approximation and best convex quadratic approximation. For portfolio optimization problem with CVaR risk, we consider a convex approximation by relaxation tools. Finally, we show thar PBR model can be cast as robust optimization problems with novel uncertainity sets and the corresponding efficient frontiers. This bachelor project report has been written based upon the existing litreture, including [1].

College of Science

School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Machine Learning in Robust Portfolio Optimization

Helia Alipanah

Supervisor: Dr. Majid Soleimani-damaneh

A thesis submitted to Undergraduate Studies Office

in partial fulfillment of the requirements for the degree of

B.Sc. in

Mathematics

2019