پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

قضیه اساسی خم های غلتان

نگارش

علی عیسایی

استاد راهنما

دکتر مهدی خواجه صالحانی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی

در رشته ریاضیات و کاربرد ها

بهمن ۱۳۹۷

چکیده

هدف مقاله در اصل بررسی تئوری خم غلتان است که حدود ۱۰۰ سال پیش بیان شده است. در این مقاله می خواهیم نشان دهیم که تئوری خم های غلتان در اصل یک معادله دیفرانسیل پذیر است که خم غلتان را به عنوان یک جواب خاص در بردارد و از تابع مختلط ـ مقدار برای توضیح این خم ها در صفحه استفاده شده است. به همین منظور در طول مقاله ابتدا در پی فهمیدن شهود هندسی خم غلتان با استفاده از دو خم دیگر (خم چرخش پذیر و خم ثابت) هستیم ، دو خمی که خم غلتان را تعریف می کنند هر دو دارای دستگاه مختصاتی با ویژگی های خود هستند و در نتیجه ویژگی هایی برای خم غلتان به دست می آوریم و در انتهای مقاله دو خم دیگر را با استفاده از خم غلتان به دست می آوریم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

و در آخر این مقاله در مورد قضیه ی خم غلتان که نزدیک به ۱۰۰ سال پیش چاپ شده است صحبت می کنیم که برای توصیف کردن یک خم در صفحه، در آن از تابع هایی با مقادیر مختلط استفاده کرده‌ایم . یکی از نتایج آن این است که یک معادله ی دیفرانسیل که شامل لم خم غلتان است به عنوان یک حالت خاص بیان شده است و در آخر خود خم غلتان را به عنوان خم اولیه در نظر می گیریم و حرکت آن را روی یک خط صاف بررسی می کنیم.

۱.۱ خم غلتان

در ابتدا با در نظر گرفتن یک خم و یک نقطه ثابت روی آن، می خواهیم بدانیم که مفهوم خم غلتان چیست؟ غلتان در اصل یک خم است که از چرخش بدون لغزش یک خم روی یک خط (و در ادامه روی یک خم) بدست می آید. البته نقطه ثابت در نظر گرفته شده روی این خم، مکان هندسی است که در هر چرخش خم وجود دارد و با وصل کردن آنها به هم خم غلتان ساخته می شود.

اگر نقطه ثابت p را روی محیط دایره در نظر بگیریم، به خم غلتان ساخته شده چرخزاد [1] گفته می شود.

تعریف خم قابل چرخش : یک خم هموار پیوسته مشتق پذیر را قابل چرخش گوییم اگر زاویه دوران آن نسبت به خط مماس، یک تابع اکیدا یکنوا از طول قوس باشد.

قضیه ۱ (لم خم غلتان) : فرض کنید C یک خم قابل چرخش و R یک خم غلتان رسم شده توسط نقطه ی ثابت p که روی خم C قرار دارد ، باشد و خم C نیز روی محور x می چرخد. اگر $(x,y) = (f(\theta), g(\theta))$ یک پارامتری شده ی خم R که θ زاویه دوران خم C روی محور x است. آن گاه دو تابع f و g به طور پیوسته مشتق پذیر هستند و داریم که: $f(\theta) = g'(\theta)$

اثبات این لم با استفاده از مختصات قطبی است.

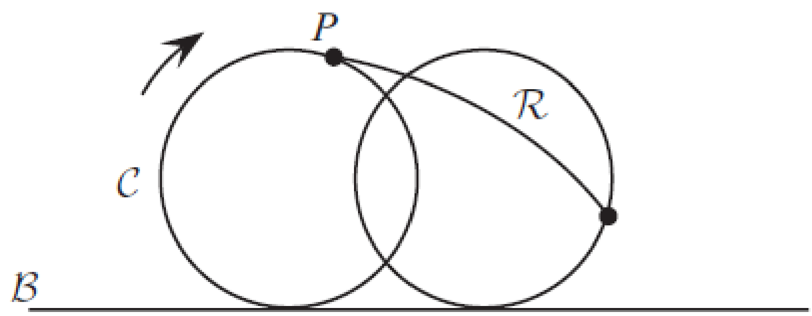
در ادامه می خواهیم یک اثبات آنالیزی برای لم بالا به دست آوریم و یک نمایش انتگرالی برای معادله ی خم غلتان بیان کنیم.

توجه : فرض کنید که یک دایره واحد روی محور x در حال چرخش است پس پارامتری شده ی چرخزاد تولید شده به صورت زیر است:

$$(x,y) = (\theta - \sin(\theta), ۱ - \cos(\theta))$$

که θ زاویه دوران دایره است. نکته قابل توجه در پارامتر تولید شده برای چرخزاد این است که: $dx/d\theta = y$

1- *cycloid*



شکل ۱.۱: تولید یک چرخزاد

$$x = r\theta - r\sin(\theta) = r(\theta - \sin(\theta))$$
$$y = r - r\cos(\theta) = r(۱ - \cos(\theta))$$
$$dx/d\theta = d(r(\theta - \sin(\theta))/d\theta$$
$$dx/d\theta = r(۱ - \cos(\theta))$$

و می دانیم که $y = r(۱ - \cos(\theta))$ پس رابطه بالا برقرار است.

در مقاله [۷] نشان داده است که رابطه بالا اتفاقی نیست اما یک رابطه خاص برای تمام خم های غلتان به وسیله چرخش یک خم قابل چرخش دلخواه روی محور x تولید می شود.

تعریف : یک خم هموار پیوسته مشتق پذیر را خم غلتان گوییم اگر زاویه دوران خط مماس آن یک تابع اکیدا یکنوا از طول قوس آن باشد.

فرض کنید که دو دایره داریم که شعاع یکی از دایره ها دو برابر دایره دیگری است اگر دایره کوچک تر درون محیط دایره برزگ تر در حال چرخش باشد آنگاه

خم غلتان مورد نظر به شکل بیضی تولید می شود و چرخش دایره کوچک تر بیرون محیط دایره برزگ تر را نیز بررسی می کنیم.(که در بخش ۵ به صورت یک مثال این حالت ها را بررسی می کنیم.)

فصل ۲

روش بیوشگِنز[1]

در ادامه مقاله سه خمی را که همواره احتیاج داریم به صورت زیر نام گذاری می کنیم.

خم چرخشی را با C نمایش می دهیم و خم ثابت را با B نمایش می دهیم و خم غلتان را با R نمایش می دهیم.

در این مقاله ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که خم های ثابت B و چرخشی C داده شده اند و به دنبال پیدا کردن خم غلتان R هستیم و در بخش آخر با استفاده از خم غلتان R به دنبال پیدا کردن دو خم دیگر هستیم.

۱- پارامتری شده خم ثابت B به صورت زیر است:

$$\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} = \tilde{z}(u)$$

که دستگاه مختصاتی آن دستگاه دکارتی (x, y) با مبدا صفر است

۲- پارامتری شده خم چرخشی C به صورت زیر است:

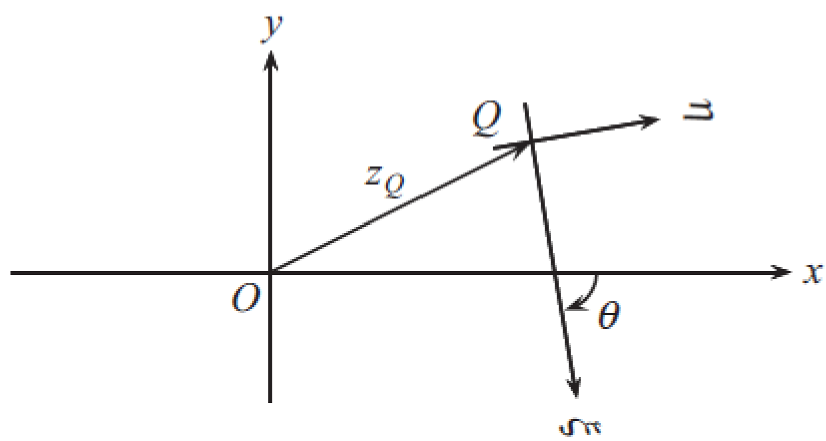
$$\tilde{\zeta} = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} = \zeta(\tilde{v})$$

1- S. S. BJUSHGENS

که دستگاه مختصاتی آن دستگاه دکارتی (ξ, η) با مبدا Q است که این دستگاه مختصات با خم C ثابت است و همراه با آن نیز می چرخد.

۳- نقطه Q که مبدا دستگاه دکارتی (ξ, η) است را در دستگاه دکارتی (x, y) با نماد z_Q نمایش می دهیم.

که در اصل یک بردار در دستگاه دکارتی (x, y) است که مبدا دستگاه دکارتی (x, y) را به مبدا دستگاه دکارتی (ξ, η) متصل می کند و به این بردار ، z_Q می گوییم.



شکل ۱.۲: دستگاه های مختصاتی

۴- θ را زاویه جهت دار بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور ξ گوییم که در جهت عقربه های ساعت حرکت می کند .

۵ ـ برای به دست آوردن خم غلتان R نقطه p را روی خم چرخشی C ثابت در نظر می گیریم که نقطه p در دستگاه دکارتی (ξ, η) دارای مختصات ثابت ζ است.

که تبدیل نقطه P در دستگاه دکارتی (x, y) به صورت زیر است :

$$z = z_Q + e^{-i\theta}\zeta$$

۶ ـ پارامتری شده خم غلتان R به صورت زیر است:

$$z = x + iy = z(\theta)$$

که خم غلتان R در دستگاه مختصات دکارتی (x, y) قرار دارد و هر نقطه دلخواه روی خم چرخشی C را می توان با استفاده از $\tilde{\zeta}$ به صورت زیر نوشت :

$$\tilde{z} = z_Q + e^{-i\theta}\tilde{\zeta}$$

که $\tilde{\zeta}$ در دستگاه مختصات دکارتی (ξ, η) قرار دارد و فرمول $\tilde{z}$ بالا بیان گر نقطه برخورد خم ثابت B با خم چرخشی C نیز است.

با ترکیب کردن دو فرمول زیر داریم که :

$$z = z_Q + e^{-i\theta}\zeta \qquad (۱)$$

$$\tilde{z} = z_Q + e^{-i\theta}\tilde{\zeta} \qquad (۲)$$

فرمول (۲) را به صورت زیر می نویسیم :

$$z_Q = \tilde{z} - e^{-i\theta}\tilde{\zeta}$$

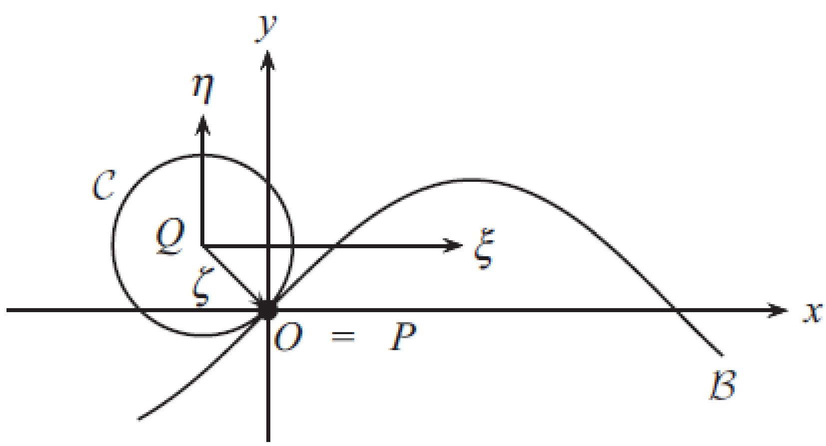
z_Q به دست آمده را در فرمول (۱) قرار می دهیم،حال داریم که :

$$z = \tilde{z} - e^{-i\theta}\tilde{\zeta} + e^{-i\theta}\zeta$$

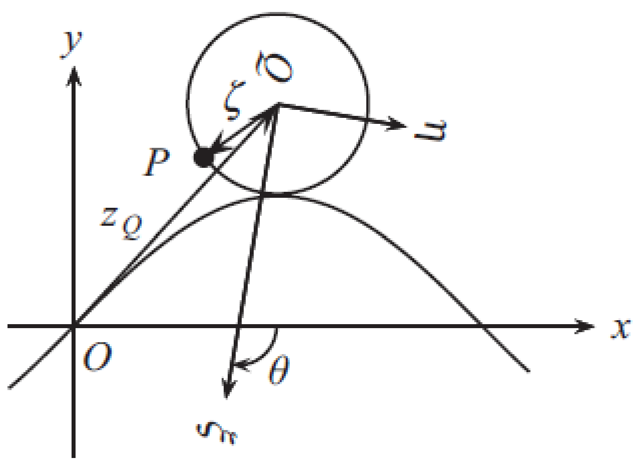
$$z = \tilde{z} + e^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta}) \qquad (۳)$$

از فرمول زیر مشتق می گیریم :

$$\tilde{z} = z_Q + e^{-i\theta}\tilde{\zeta}$$



شکل ۲.۲: دوران خم چرخشی،حالت اول



شکل ۳.۲: دوران خم چرخشی،حالت دوم

حال داریم که :

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{\zeta}} = \frac{dz_Q}{d\tilde{\zeta}} + e^{-i\theta}$$

نقطه Q در دستگاه مختصاتی (ξ, η) مرکز است حال برای بیان نقطه Q در دستگاه مختصاتی (x, y) آن را با z_Q **نمایش می دهیم ، که درون** z_Q **متغیر** $\tilde{\zeta}$ وجود ندارد ؛ پس $\frac{dz_Q}{d\tilde{\zeta}} = ۰$ است.

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{\zeta}} = e^{-i\theta}$$

پس داریم که :

$$d\tilde{z} = e^{-i\theta} d\tilde{\zeta} \qquad (۴)$$

فرمول بالا برای زمانی است که دو خم ثابت B و خم چرخشی C بدون لغزش روی هم می چرخند و در این حالت دو خم مورد نظر بر هم مماس هستند.

حال اگر از معادله (۳) نسبت به θ مشتق بگیریم ، فرمول زیر حاصل می شود :

$$dz = d\tilde{z} + e^{-i\theta} d(\zeta - \tilde{\zeta}) - ie^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta}) d\theta$$

حال با استفاده از معادله (۴) داریم که :

$$d\tilde{z} - e^{-i\theta} d\tilde{\zeta} = ۰$$

حال چون در اول مقاله فرض کردیم که ζ در دستگاه مختصاتی (ξ, η) مختصات ثابت است پس داریم که :

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = ۰$$

پس در نهایت داریم که :

$$d\tilde{z} + e^{-i\theta} d(\zeta - \tilde{\zeta}) = ۰$$

در نهایت با جای گذاری معادله بالا در مشتق معادله (۳) داریم که :

$dz = -ie^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta})d\theta$

و از معادله های (۱) و (۲) می دانیم که :

$z - \tilde{z} = e^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta})$

با جای گذاری فرمول بالا در ساده شده ی مشتق معادله (۳) داریم که :

$dz = -i(z - \tilde{z})d\theta$

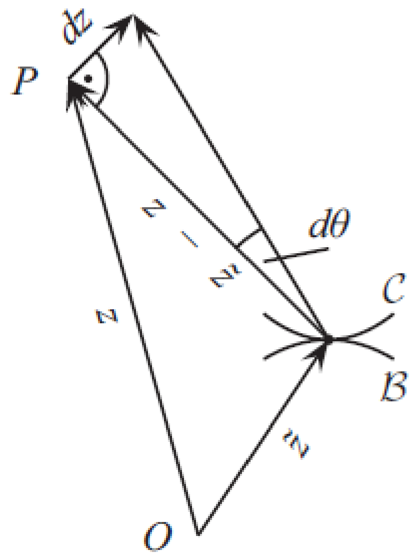
تفسیر هندسی معادله بالا به صورت زیر است:

$\tilde{z}$ در اصل نقطه برخورد خم چرخشی C با خم ثابت B است . z در اصل نقطه ثابت در نظر گرفته شده در همان ابتدا روی خم C است که همان نقطه P است درون دستگاه مختصاتی (ξ, η) ولی درون دستگاه مختصاتی (x, y) به صورت z نمایش داده می شود .

با توجه به شکل زیر می خواهیم تعبیر هندسی معادله را بیان کنیم .

$\tilde{z}$ در اصل مرکز لحظه ای برای چرخش خم C است یعنی $\tilde{z}$ همان مرکز حرکت بردار ها در چرخش اول خم C است که زمانی که این خم C با خم B برخورد دارد آن نقطه ی دلخواه را $\tilde{z}$ می نامیم . پس نقطه P تا نقطه $\tilde{z}$ دارای فاصله ی $|z - \tilde{z}|$ است .

یک چرخش کوچک $d\theta$ حاصل یک حرکت کوچک dz از نقطه P است که dz در نقطه P بر $(z - \tilde{z})$ عمود است .



شکل ۴.۲: تعبیر هندسی معادله

قضیه ۲ : فرض کنید پارامتری شده ی خم غلتان R به صورت زیر باشد :

$z = x + iy = z(\theta)$

آن گاه دو نتیجه زیر با توجه به گفته بالا به دست می آید :

$$\begin{cases} dx = (y - \tilde{y})d\theta \\ dy = -(x - \tilde{x})d\theta \end{cases}$$

می دانیم که :

$dz = -i(z - \tilde{z})d\theta$

و از پارامتری شده ی خم های R و B داریم که:

$(z - \tilde{z}) = (x - \tilde{x}) + i(y - \tilde{y})$

حال فرمول بالا را در $i-$ ضرب می کنیم ، که به صورت زیر می شود :

$$-i(z-\tilde{z}) = -i(x-\tilde{x}) + (y-\tilde{y})$$

پس نتیجه می شود :

$$dz = [-i(x-\tilde{x}) + (y-\tilde{y})]\,d\theta \qquad (*)$$

حال از پارامتری شده ی خم R نسبت به θ مشتق می گیریم :

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta}$$

که فرمول بالا را می توان به صورت زیر نمایش داد :

$$dz = dx + idy \qquad (**)$$

از $(*)$ و $(**)$ داریم که :

$$dx + idy = [-i(x-\tilde{x}) + (y-\tilde{y})]\,d\theta$$

$$dx + idy = (y-\tilde{y})d\theta - i(x-\tilde{x})d\theta$$

توجه : اگر خم C فقط روی محور x حرکت کند آن گاه داریم که :

$$\tilde{y} = ۰$$

چون وقتی خم C روی محور x حرکت می کند یعنی خم B که خم C روی آن حرکت می کند محور x است و محور y ندارد ؛ پس با توجه به فرمول پارامتری شده ی خم B فرمول بالا نتیجه می شود .

با استفاده از قضیه بالا می دانیم که :

$$dx = (y - \tilde{y})d\theta = yd\theta - \tilde{y}d\theta = yd\theta$$

$$dx = yd\theta$$

پس داریم که :

$$y = \frac{dx}{d\theta}$$

به وضوح لم قضیه ی ۱ یک نتیجه از قضیه ی ۲ است.

فصل ۳

تعمیمی از روش بیوشگِنز

به دنبال نمایش انتگرالی برای خم غلتان هستیم.

از قضیه ۲ به دست می آید که :

$$dx = (y - \tilde{y})d\theta$$

فرمول بالا درارای نمایش زیر است :

$$\frac{dx}{d\theta} = (y - \tilde{y})$$

حال از فرمول بالا نسبت به θ مشتق می گیریم و فرمول زیر حاصل می شود :

$$\frac{d}{d\theta}(\frac{dx}{d\theta}) = \frac{d}{d\theta}(y - \tilde{y}) = \frac{dy}{d\theta} - \frac{d\tilde{y}}{d\theta} \qquad (*)$$

حال از قضیه ۲ می دانیم که :

$$\frac{dy}{d\theta} = -(x - \tilde{x})$$

حال فرمول بالا را در $(*)$ قرار می دهیم و فرمول زیر حاصل می شود :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dx}{d\theta}\right) = -(x-\tilde{x}) - \frac{d\tilde{y}}{d\theta}$$

پس داریم که :

$$\frac{d^{۲}x}{d\theta^{۲}} = -(x-\tilde{x}) - \frac{d\tilde{y}}{d\theta}$$

پس مولفه x برای خم غلتان R به صورت یک معادله ساده ی مشتق پذیر با مرتبه ۲ است ؛ پس داریم که :

$$\frac{d^{۲}x}{d\theta^{۲}} = \tilde{x} - x - \frac{d\tilde{y}}{d\theta}$$

آن گاه داریم که :

$$\frac{d^{۲}x}{d\theta^{۲}} + x = \tilde{x} - \frac{d\tilde{y}}{d\theta} =: h(\theta) \qquad (۵)$$

این معادله مشتق پذیر ساده یک راه حل عمومی دارد که به صورت زیر است :

$$x = c_{۱}\cos\theta + c_{۲}\sin\theta + \int_{\theta_{۱}}^{\theta} h(\alpha)\sin(\theta-\alpha)\,d\alpha \qquad (۶)$$

حال از قضیه ۲ داریم که :

$$dx = (y-\tilde{y})d\theta \quad \longrightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = y - \tilde{y}$$
$$\longrightarrow \; y = \frac{dx}{d\theta} + \tilde{y}$$

فرمول بالا دارای نمایش زیر نیز است :

$$y(\theta) = \tilde{y}(\theta) + \frac{dx}{d\theta}$$

با توجه به فرمول (۶) و فرمول بالا می توان فهمید که x و y بر حسب θ هستند .

از x نسبت به θ مشتق می گیریم ، فرمول زیر به دست می آید :

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta + \int_{\theta_۱}^{\theta} h(\alpha)\sin(\theta-\alpha)\, d\alpha)$$

پس داریم که :

$$\frac{dx}{d\theta} = -c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta + \int_{\theta_۱}^{\theta} h(\alpha)\cos(\theta-\alpha)\, d\alpha$$

چون درون $h(\alpha)$ ، θ قرار ندارد و به جای θ ، $h(\alpha)$ قرار داده ایم و این مشتق نسبت به θ است ، پس $\frac{d\alpha}{d\theta} = ۰$ است ؛ پس داریم که :

$$\frac{d}{d\theta}\sin(\theta-\alpha) = \cos(\theta-\alpha) \times \frac{d}{d\theta}(\theta-\alpha)$$

$$\frac{d}{d\theta}(\theta-\alpha) = \frac{d\theta}{d\theta} - \frac{d\alpha}{d\theta} = ۱ \qquad \text{و} \qquad \frac{d\alpha}{d\theta} = ۰$$

آن گاه :

$$\frac{d}{d\theta}\sin(\theta-\alpha) = \cos(\theta-\alpha)$$

پس :

$$y = \tilde{y} + \frac{dx}{d\theta}$$

$$y = \tilde{y}(\theta) - c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta + \int_{\theta_۱}^{\theta} h(\alpha)\cos(\theta-\alpha)\, d\alpha \qquad (۷)$$

ثابت θ_1 یک جهت اصلی را در دستگاه مختصات (ξ, η) می دهد ، که زاویه اولیه بین قسمت مثبت محور x و ξ است و مقدار ثابت های c_1 و c_2 مختصات اولیه ی نقطه ی p بستگی دارد .

در حالتی که $\tilde{y} = 0$ است ؛ معادله (۵) به صورت زیر در می آید :

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + x = \tilde{x} - \frac{d\tilde{y}}{d\theta} \qquad (5)$$

$$\tilde{y} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\tilde{y}}{d\theta} = 0$$

پس:

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + x = \tilde{x} \qquad (8)$$

از قبل می دانیم که جواب عمومی x به صورت زیر است ؛ حال می خواهیم در حالتی که $\tilde{y} = 0$ برقرار است معادله های x و y خم غلتان R را به دست آوریم .

$$x = c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta + \int_{\theta_1}^{\theta} h(\alpha) \sin(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

$$h(\theta) = \tilde{x} - \frac{d\tilde{y}}{d\theta} \qquad \text{و} \qquad \frac{d\tilde{y}}{d\theta} = 0$$

پس داریم که :

$$h(\theta) = \tilde{x} \quad \longrightarrow \quad h(\alpha) = \tilde{x}$$

در این جا فرض شده است که $\tilde{x}$ بر حسب $\varphi(\alpha)$ است ، پس داریم که :

$$h(\alpha) = \tilde{x}\left(\varphi(\alpha)\right)$$

پس داریم که :

$$x = c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta + \int_{\theta_۱}^{\theta} \tilde{x}\left(\varphi(\alpha)\right) \sin(\theta - \alpha)\, d\alpha \quad (۹)$$

می خواهیم با استفاده از توجه بخش قبلی و معادله (۹) ، معادله y را در این حالت به دست آوریم ، پس داریم که :

$$y = \frac{dx}{d\theta}$$

$$y = \frac{d}{d\theta}(c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta + \int_{\theta_۱}^{\theta} \tilde{x}\left(\varphi(\alpha)\right) \sin(\theta - \alpha)\, d\alpha)$$

$$y = -c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta + \int_{\theta_۱}^{\theta} \tilde{x}\left(\varphi(\alpha)\right) \cos(\theta - \alpha)\, d\alpha \quad (۱۰)$$

در دو فرمول بالا ، φ ، به طوری که $u = \varphi(\theta)$ انتخاب شده است ؛ پس محاسبه تابع $h = h(\theta)$ مشکل است .

فصل ۴

پارامتری سازی

در این بخش با استفاده از پارامتری شده ی خم غلتان R و فرمول های x و y آن ، می خواهیم رابطه ای برای θ به دست آوریم .

در این بخش ما به دنبال پیدا کردن رابطه ای بین پارامتر θ از خم غلتان R و پارامتر های u و v از خم ثابت B و خم چرخشی C به ترتیب است . حال معادله (۲) را در نظر می گیریم ، پس داریم که :

$$|d\tilde{z}| = |d\tilde{\zeta}|$$

حال از معادله (۲) داریم که :

$$d\tilde{z} = e^{-i\theta} d\tilde{\zeta}$$

$$|d\tilde{z}| = |e^{-i\theta} d\tilde{\zeta}| = \underbrace{|e^{-i\theta}|}_{۱} |d\tilde{\zeta}| = |d\tilde{\zeta}|$$

چون مقدار θ معلوم است ، پس $e^{-i\theta}$ عدد ثابت می شود و به همین خاطر می توان فرمول بالا را به صورت ضرب قدر مطلقی نوشت .

پس با توجه به $|d\tilde{z}| = |d\tilde{\zeta}|$ داریم که :

$$\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} \qquad \longrightarrow \qquad d\tilde{z} = d\tilde{x} + id\tilde{y}$$

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} \qquad \longrightarrow \qquad d\tilde{\zeta} = d\tilde{\xi} + id\tilde{\eta}$$

پس داریم که :

$$\sqrt{(d\tilde{x})^{۲} + (d\tilde{y})^{۲}} = \sqrt{(d\tilde{\xi})^{۲} + (d\tilde{\eta})^{۲}}$$

حال در سمت راست تساوی یک dv ضرب و تقسیم می کنیم و در سمت چپ تساوی یک du ضرب و تقسیم می کنیم و در هر دو سمت تساوی مقدار هایی که تقسیم کرده ایم را زیر رادیکال می بریم ، حال داریم که :

(به خاطر زیر رادیکال بردن مقادیر مورد نظر ، تساوی زیر در یک طرف آن علامت مثبت و منفی می گیرد)

$$du\sqrt{(\frac{d\tilde{x}}{du})^{۲} + (\frac{d\tilde{y}}{du})^{۲}} = \pm dv\sqrt{(\frac{d\tilde{\xi}}{dv})^{۲} + (\frac{d\tilde{\eta}}{dv})^{۲}} \qquad (۱۱)$$

با حل این معادله ی ساده ی مشتق پذیر مرتبه ی اول ، رابطه ی زیر بین پارامتر های u و v به دست می آید :

$$v = \phi(u)$$

می دانیم که :

$$z\bar{z} = |z|^{۲} \qquad (*)$$

و

$$e^{-i\theta}=\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{\zeta}}=\frac{\frac{d\tilde{z}}{du}du}{\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}dv}=\frac{\frac{d\tilde{z}}{du}du}{dv}\times\frac{۱}{\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}}$$

با توجه به $(*)$ داریم که :

$$\left(\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right)\overline{\left(\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right)}=\left|\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right|^{۲}$$

در نتیجه :

$$\overline{\left(\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right)}\left|\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right|^{-۲}=\frac{۱}{\left(\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right)}\qquad(**)$$

$(**)$ را در فرمول $e^{-i\theta}$ قرار می دهیم ، پس داریم که :

$$e^{-i\theta}=\frac{\frac{d\tilde{z}}{du}du}{dv}\times\frac{۱}{\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}}=\frac{\frac{d\tilde{z}}{du}du}{dv}\times\overline{\left(\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right)}\left|\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right|^{-۲}$$

$$=\frac{d\tilde{z}}{du}\overline{\left(\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right)}\frac{du}{dv}\left|\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right|^{-۲}$$

می دانیم که :

$$\frac{d\tilde{z}}{du}=\frac{d\tilde{x}}{du}+i\frac{d\tilde{y}}{du}$$

$$\overline{\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}} = \frac{d\tilde{\xi}}{dv} - i\frac{d\tilde{\eta}}{dv}$$

حال دو فرمول بالا را درون فرمول $e^{-i\theta}$ قرار می دهیم :

$$e^{-i\theta} = \left|\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right|^{-۲} \frac{du}{dv}\left(\frac{d\tilde{x}}{du} + i\frac{d\tilde{y}}{du}\right)\left(\frac{d\tilde{\xi}}{dv} - i\frac{d\tilde{\eta}}{dv}\right)$$

چون عبارت $\left(\left|\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}\right|^{-۲} \frac{du}{dv}\right)$ یک عدد حقیقی است پس نتیجه می گیریم که :

می دانیم که اگر داشته باشیم :

$$z = x + iy = Re(z) + iIm(z)$$

آن گاه :

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{Im(z)}{Re(z)}$$

در این جا $e^{-i\theta}$ همان z است ، پس داریم که :

$$\tan(-\theta) = \frac{Im(e^{-i\theta})}{Re(e^{-i\theta})}$$

پس :

$$-\tan\theta = \frac{Im(e^{-i\theta})}{Re(e^{-i\theta})} \quad \longrightarrow \quad \tan\theta = -\frac{Im(e^{-i\theta})}{Re(e^{-i\theta})}$$

حال فرمول $e^{-i\theta}$ را ساده تر می کنیم :

$$e^{-i\theta} = \left(\left| \frac{d\tilde{\zeta}}{dv} \right|^{-2} \frac{du}{dv} \right) k$$

که :

$$\left[\left(\frac{d\tilde{x}}{du}\frac{d\tilde{\xi}}{dv} + \frac{d\tilde{y}}{du}\frac{d\tilde{\eta}}{dv} \right) + i \left(\frac{d\tilde{y}}{du}\frac{d\tilde{\xi}}{dv} - \frac{d\tilde{x}}{du}\frac{d\tilde{\eta}}{dv} \right) \right]$$

در نتیجه :

$$\tan\theta = -\frac{Im(e^{-i\theta})}{Re(e^{-i\theta})} = -\frac{\frac{d\tilde{y}}{du}\frac{d\tilde{\xi}}{dv} - \frac{d\tilde{x}}{du}\frac{d\tilde{\eta}}{dv}}{\frac{d\tilde{x}}{du}\frac{d\tilde{\xi}}{dv} + \frac{d\tilde{y}}{du}\frac{d\tilde{\eta}}{dv}} \qquad (۱۲)$$

بعد از جای گذاری کردن رابطه ی $v = \phi(u)$ در فرمول بالا و حل کردن معادله برای پارامتر u ، رابطه ی دلخواه $u = \varphi(\theta)$ به وجود می آید.

توجه کنید در حالتی که $\tilde{y} = ۰$ است ، چون $\frac{d\tilde{y}}{du} = ۰$ است ، پس فرمول (۱۲) به صورت زیر می شود :

$$\tan\theta = (\frac{d\tilde{\eta}}{dv}) \left(\frac{d\tilde{\xi}}{dv} \right)^{-1} \qquad (۱۳)$$

مفهوم هندسی معادله ی (۱۲) واضح می شود اگر به صورت زیر نوشته شود: صورت و مخرج معادله ی (۱۲) را بر $\left(\frac{d\tilde{x}}{du} \times \frac{d\tilde{\xi}}{dv}\right)$ تقسیم می کنیم ، داریم که:

$$\tan\theta = \frac{\dfrac{۱}{\dfrac{d\tilde{x}}{du}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dv}}\left(\dfrac{d\tilde{x}}{du}\dfrac{d\tilde{\eta}}{dv} - \dfrac{d\tilde{y}}{du}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dv}\right)}{\dfrac{۱}{\dfrac{d\tilde{x}}{du}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dv}}\left(\dfrac{d\tilde{x}}{du}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dv} + \dfrac{d\tilde{y}}{du}\dfrac{d\tilde{\eta}}{dv}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{\frac{d\tilde{\eta}}{dv}}{\frac{d\tilde{\xi}}{dv}} - \dfrac{\frac{d\tilde{y}}{du}}{\frac{d\tilde{x}}{du}}}{۱ + \dfrac{\frac{d\tilde{\eta}}{dv}}{\frac{d\tilde{\xi}}{dv}} \cdot \dfrac{\frac{d\tilde{y}}{du}}{\frac{d\tilde{x}}{du}}}$$

فرمول زیر را برای $\tan\theta$ می دانیم:

$$\tan\theta = \tan(\varphi_C - \varphi_B) = \frac{\tan\varphi_C - \tan\varphi_B}{۱ + \tan\varphi_C \cdot \tan\varphi_B}$$

که φ_C و φ_B به ترتیب زاویه ی شیب (انحراف) خطوط مماس به خم چرخشی C و خم ثابت B است .

فصل ۵

مثال

در این فصل به حل مثال هایی از الگوریتم گفته شده در دو فصل قبل می پردازیم.

در این بخش به بررسی ۴ مثال می پردازیم ؛ که مقدار $\theta_۱$ و ثابت های انتگرالی $u_۱$ و $v_۱$ که ناشی از معادله ی (۱۱) است ، به طوری که موقعیت اولیه دستگاه های مختصات و نقطه ی برخورد خم چرخشی C و خم ثابت B را نشان می دهد و از نمایش انتگرالی معادله های خم غلتان R استفاده می کنیم.

مثال ۱ : فرض کنید خم چرخشی C به صورت دایره ای با پارامتری شده ی $\tilde{\xi} = a\cos v$ و $\tilde{\eta} = a\sin v$ که $(a > ۰)$ است و خم ثابت B یک خط به صورت $\tilde{x} = u$ و $\tilde{y} = ۰$ در نتیجه فرمول y مربوط به خم غلتان R به صورت زیر محاسبه می شود :

$$y = \frac{dx}{d\theta}$$

موقعیت اولیه دستگاه های مختصات توسط $u_۱ = ۰$ و $v_۱ = -\frac{\pi}{۲}$ و $\theta_۱ = ۰$ توصیف شده است ، پس داریم که:

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v) = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} = a\cos v + i(a\sin v)$$

و

$$\tilde{z} = \tilde{z}(u) = \tilde{x} + i\tilde{y} = u + i(۰) = u$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v) = a(\cos v + i\sin v) \\ \tilde{z} = \tilde{z}(u) = u \end{cases}$$

پس داریم که:

$$\begin{cases} \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(-\frac{\pi}{۲}) = a(\cos(-\frac{\pi}{۲}) + i\sin(-\frac{\pi}{۲})) = -ia < ۰ \\ \tilde{z} = \tilde{z}(۰) = ۰ \end{cases}$$

می دانیم که:

۱– θ زاویه ی بین محور x و محور ξ است ، پس با توجه به این که $\theta_۱ = ۰$ است پس زاویه ی بین محور x و محور ξ در موقعیت اولیه صفر است ، پس این دو محور ، با هم در یک جهت هستند.

۲– محل برخورد خم ثابت B با خم چرخشی C در اصل با کمک فرمول $\tilde{z}$ به دست می آید که $\tilde{z}$ در موقعیت اولیه به صورت $(۰,۰)$ است.

در این حالت از معادله (۱۳) استفاده می شود:

$$\tan\theta = (\frac{d\tilde{\eta}}{dv})\left(\frac{d\tilde{\xi}}{dv}\right)^{-۱}$$

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v) = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} \longrightarrow \frac{d\tilde{\zeta}}{dv} = \frac{d\tilde{\zeta}(v)}{dv} = \frac{d\tilde{\xi}}{dv} + i\frac{d\tilde{\eta}}{dv}$$

پس:

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{dv} = \frac{d}{dv}\left(a\cos v\right) + i\frac{d}{dv}\left(a\sin v\right)$$

$$= -a\sin v + i\left(a\cos v\right)$$

در نتیجه:

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dv} = -a\sin v \qquad \text{و} \qquad \frac{d\tilde{\eta}}{dv} = a\cos v$$

پس:

$$\tan\theta = \left(a\cos v\right) \times \frac{۱}{\left(-a\sin v\right)} = -\frac{\cos v}{\sin v}$$

$$= -\cot v$$

پس:

$$\tan\theta = -\cot v$$

می دانیم که:

$$\cot x = \cot\alpha \quad \Longrightarrow \quad x = k\pi + \alpha$$

و

$$\tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$$

پس:

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=-\cot v=\cot(-v)$$

داریم که:

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cot(-v)\Longrightarrow -v=k\pi+\frac{\pi}{۲}-\theta$$

در نتیجه:

$$\theta=k\pi+\frac{\pi}{۲}+v$$

پس:

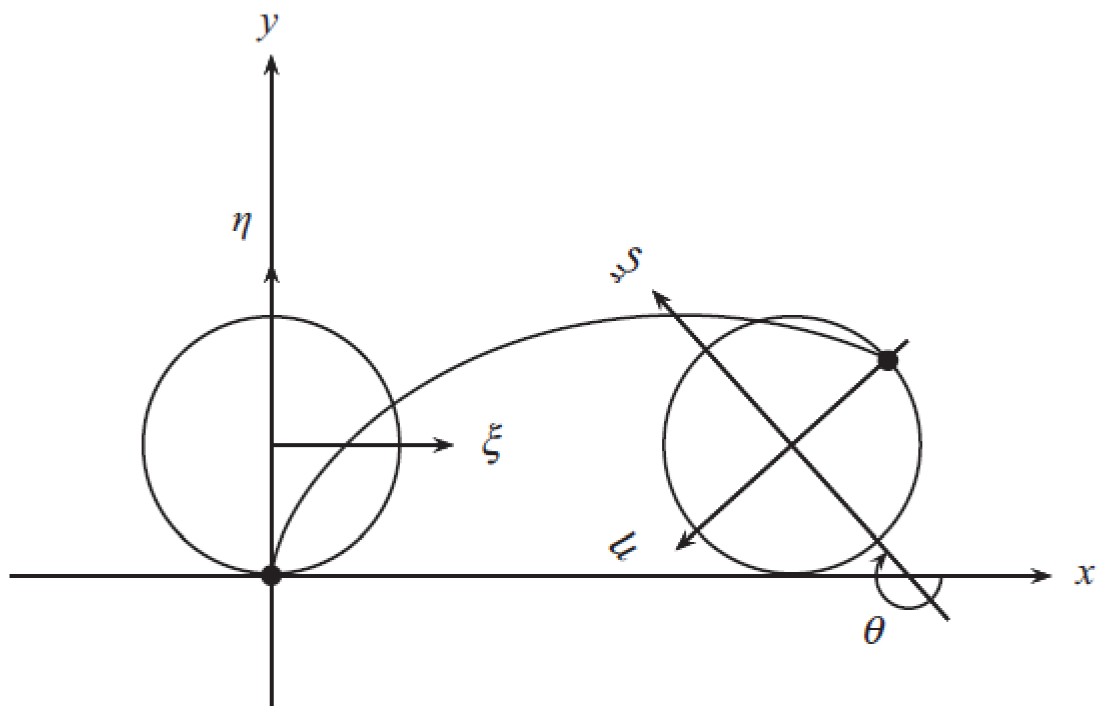
$$\theta\equiv\frac{\pi}{۲}+v \quad (mod\pi)$$

در مورد شکلی که می خواهیم برای مثال بکشیم می توان گفت که میزان دوران خم چرخشی C روی خم ثابت C به اندازه ی $k\pi+\frac{\pi}{۲}-v$ است ، حال فرض کنید که $k=\frac{۱}{۲}$ است ، پس ابتدا به اندازه π دوران می کند و بعد به اندازه v نیز دوران می یابد.

با استفاده از فرض مثال داریم که :

$$\tilde{x}=u \text{ و } \tilde{y}=۰ \quad \longrightarrow \quad \frac{d\tilde{x}}{du}=۱ \text{ و } \frac{d\tilde{y}}{du}=۰$$

$$\begin{cases}\tilde{\xi}=a\cos v\\ \tilde{\eta}=a\sin v\end{cases} \longrightarrow \quad \begin{cases}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dv}=-a\sin v\\ \dfrac{d\tilde{\eta}}{dv}=a\cos v\end{cases}$$



شکل ۱.۵: تولید کردن یک چرخزاد به عنوان خم غلتان

با استفاده از معادله (۱۱) داریم که:

$$du = \pm\sqrt{a^۲}dv = \pm adv \quad \longrightarrow \quad du = \pm adv$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم که:

$$\int du = \int adv = a\int dv$$

پس:

$$u - u_۱ = a(v - v_۱)$$

و می دانیم که $u_۱ = ۰$ و $v_۱ = -\frac{\pi}{۲}$ است ؛ پس:

$$u = a(v + \frac{\pi}{۲})$$

یک رابطه ای را بین پارامتر های u و v به دست آورده ایم ، حال به دنبال پیدا کردن رابطه ای برای پارامتر های u و θ هستیم.پس:

$$u = u_۱ + a(v - v_۱) \qquad (*)$$

می دانیم که:

$$\theta = k\pi + \frac{\pi}{۲} + v$$

فرض کنید که $k = ۰$ است ، پس:

$$\theta = \frac{\pi}{۲} + v \quad \longrightarrow \quad v = \frac{\pi}{۲} + \theta$$

حال مقدار v به دست آمده را در $(*)$ قرار می دهیم.حال داریم که:

$$u = u_۱ + a(\theta - \frac{\pi}{۲} - v_۱)$$

و می دانیم که با توجه به فرض مثال $v_۱ = -\frac{\pi}{۲}$ و $u_۱ = ۰$ پس با جای گذاری آن در فرمول بالا داریم که:

$$u = a\theta = \varphi(\theta)$$

حال از معادله های (۹) و (۱۰) استفاده می کنیم و باید توجه کنید که در دو معادله عبارت $\tilde{x}(\varphi(\alpha))$ وجود دارد که مقدار آن می شود:

$$\tilde{x} = \tilde{x}(u) = u = a\theta = \varphi(\theta)$$

حال $\varphi(\alpha) = a\alpha$ است ، پس داریم که:

$$\tilde{x} = \tilde{x}(\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha) = a\alpha$$

پس:

$$\tilde{x}(\varphi(\alpha)) = a\alpha$$

حال داریم که:

$$x = c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta + \int_{\theta_۱}^{\theta} a\alpha \sin(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

$$= c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta + a(\theta - \sin\theta)$$

$$y = -c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta + \int_{\theta_۱}^{\theta} a\alpha \cos(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

$$= -c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta + a(۱ - \cos\theta)$$

برای انتگرال گیری بالا می توان از روش جز به جز استفاده کرد ، مثلا برای انتگرال زیر داریم که:

$$\int \alpha \sin(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

$$\begin{cases} u = \alpha \\ dv = \sin(\theta - \alpha) d\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = d\alpha \\ v = \cos(\theta - \alpha) \end{cases}$$

فرمول جز به جز به صورت زیر است:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

پس مقادیر به دست آمده در بالا را در فرمول جز به جز جای گذاری می کنیم:

$$\int \alpha \sin(\theta - \alpha)\, d\alpha = \alpha \cos(\theta - \alpha) - \int \cos(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

با حل کردن عبارت بالا به مقدار $(\theta - \sin\theta)$ می رسیم.

یادآوری : خم غلتان رسم شده به وسیله ی نقطه ی P که روی محیط یک دایره است، چرخزاد می باشد.

خم غلتان به دست آمده در بالا خانواده چرخزاد است.

در حالت خاص ، اگر $P = ۰ = (۰,۰)$ در شروع باشد ، آن گاه داریم که:

$$z = z(\theta) = x + iy = (x, y)$$

پس:

$$(x, y) = (c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta + a(\theta - \sin\theta),$$
$$-c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta + a(۱ - \cos\theta))$$

حال اگر $P = \text{۰} = (\text{۰}, \text{۰})$ باشد ، آن گاه این نقطه روی پارامتری شده ی خم غلتان ، یعنی z وجود دارد ، چون می خواهیم حالت اولیه را بررسی کنیم ، پس در حالت اولیه مقادیر زیر را داریم:

$$\theta_{\text{۱}} = \text{۰} \quad \text{و} \quad v_{\text{۱}} = -\frac{\pi}{\text{۲}} \quad \text{و} \quad u_{\text{۱}} = \text{۰}$$

با قرار دادن همه ی این مقادیر در (x, y) بالا داریم که:

$z = (x, y) = (c_{\text{۱}}, c_{\text{۲}})$

پس در حالت اولیه $z = (c_{\text{۱}}, c_{\text{۲}})$ است و حال که برای حالت اولیه $P = \text{۰} = (\text{۰}, \text{۰})$ در نظر گرفته شده است ، چون P در z صدق می کند ، پس P در z که حالت اولیه است نیز صدق می کند ، پس داریم که:

$P = \text{۰} = (\text{۰}, \text{۰}) = z = (x, y) = (c_{\text{۱}}, c_{\text{۲}})$

پس:

$c_{\text{۱}} = \text{۰}$ و $c_{\text{۲}} = \text{۰}$

حال با قرار دادن مقادیر $c_{\text{۱}}$ و $c_{\text{۲}}$ در فرمول $z = (x, y)$ ، چرخزاد کلاسیک به دست می آید.پس:

$(x, y) = (a(\theta - \sin\theta), a(\text{۱} - \cos\theta))$

مثال ۲ : خم چرخشی C به صورت بیضی با پارامتری شده ی $\tilde{\xi} = a\cos v$ و $\tilde{\eta} = b\sin v$ که $(\text{۰} < a < b)$ است و خم ثابت B یک خط به صورت $\tilde{x} = u$ و $\tilde{y} = \text{۰}$ در نتیجه فرمول y مربوط به خم غلتان R به صورت رو به رو محاسبه می شود : $y = \dfrac{dx}{d\theta}$

موقعیت اولیه دستگاه های مختصات توسط $u_1 = 0$ و $v_1 = 0$ و $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ توصیف شده است ، پس داریم که:

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v) = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} = a\cos v + i(b\sin v)$$

و

$$\tilde{z} = \tilde{z}(u) = \tilde{x} + i\tilde{y} = u + i(0) = u$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v) = a\cos v + ib\sin v \\ \tilde{z} = \tilde{z}(u) = u \end{cases}$$

پس داریم که:

$$\begin{cases} \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(0) = a\cos(0) + ib\sin(0)) = a > 0 \\ \tilde{z} = \tilde{z}(0) = 0 \end{cases}$$

می دانیم که:

۱ − θ زاویه ی بین محور x و محور ξ است ، پس با توجه به این که $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ است پس زاویه ی بین محور x و محور ξ در موقعیت اولیه نود درجه است ، پس محور ξ در جهت یا خلاف جهت محور y است.

۲ − محل برخورد خم ثابت B با خم چرخشی C در اصل با کمک فرمول $\tilde{z}$ به دست می آید که $\tilde{z}$ در موقعیت اولیه به صورت $(0,0)$ است.

توجه ۱ : چون خم چرخشی C در دستگاه مختصاتی (ξ,η) است ، پس بیضی باید در این دستگاه رسم شود.می دانیم که a مربوط به محور ξ و b مربوط به محور η است ، با توجه به فرمول بیضی $\frac{\xi^۲}{a^۲}+\frac{\eta^۲}{b^۲}=۱$ و چون $a<b$ است پس در دستگاه مختصاتی (ξ,η) یک بیضی عمودی است و چون زاویه بین محور x و محور ξ نود درجه است ، پس در دستگاه مختصاتی (x,y) یک بیضی افقی است.

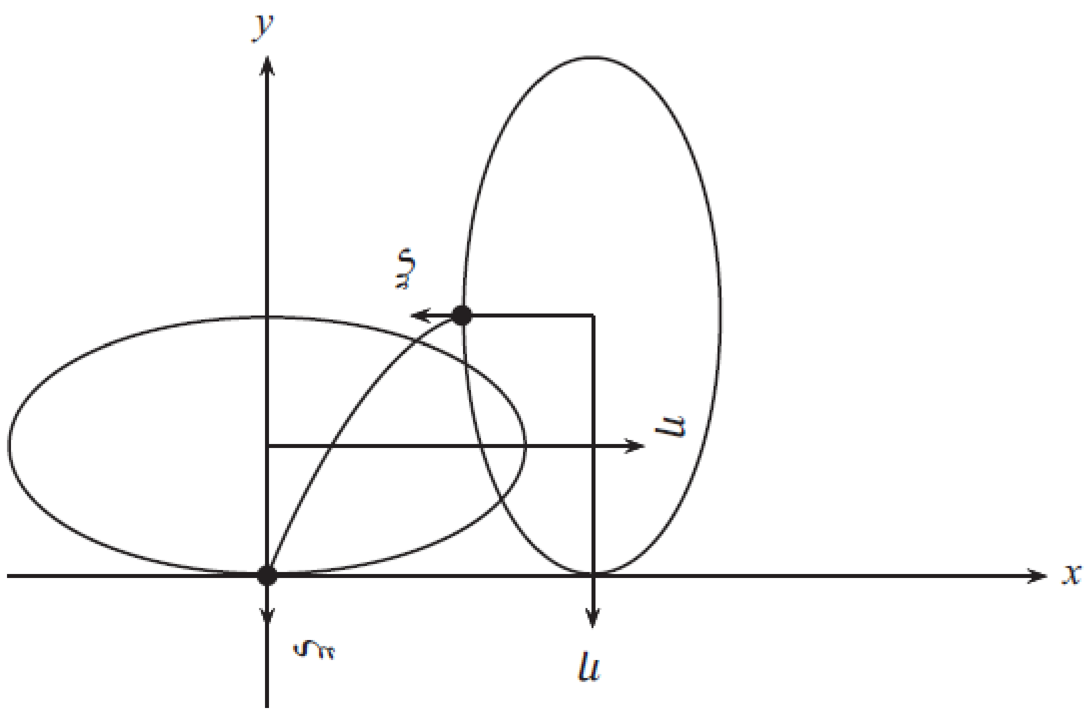
توجه ۲ : چون زاویه بین محور ξ و محور η در دستگاه مختصاتی نود درجه است ، پس زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور η ، $(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ ، که θ زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور ξ است.

پس در این مثال زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور η صفر است ، چون $\theta_۱=\frac{\pi}{۲}$ است.

در این حالت از معادله (۱۳) استفاده می شود:

$$\tan\theta=(\frac{d\tilde{\eta}}{dv})\left(\frac{d\tilde{\xi}}{dv}\right)^{-۱}$$

$$\tilde{\zeta}=\tilde{\zeta}(v)=\tilde{\xi}+i\tilde{\eta}\longrightarrow\frac{d\tilde{\zeta}}{dv}=\frac{d\tilde{\zeta}(v)}{dv}=\frac{d\tilde{\xi}}{dv}+i\frac{d\tilde{\eta}}{dv}$$



شکل ۲.۵: چرخش یک بیضی

پس:

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{dv} = \frac{d}{dv}(a\cos v) + i\frac{d}{dv}(b\sin v)$$

$$= -a\sin v + i(b\cos v)$$

در نتیجه:

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dv} = -a\sin v \qquad \text{و} \qquad \frac{d\tilde{\eta}}{dv} = b\cos v$$

پس:

$$\tan\theta = (b\cos v) \times \frac{۱}{(-a\sin v)} = -(\frac{b}{a})\frac{\cos v}{\sin v}$$

حال داریم که:

$$\tan\theta = -(\frac{b}{a})\cot v$$

پس:

$$\cot v = -(\frac{a}{b})\tan\theta$$

در نتیجه داریم که:

$$v = \cot^{-۱}(-\frac{a}{b}\tan\theta)$$

یا به عبارتی:

$$v = arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\theta)$$

یک رابطه بین پارامتر های v و θ به دست آورده ایم ، حال به دنبال پیدا کردن رابطه ای برای پارامتر های u و v هستیم ، و بعد از به دست آوردن این رابطه مقدار v به دست آمده را در این رابطه قرار می دهیم.

با استفاده از فرض مثال داریم که :

$$\tilde{x} = u \text{ و } \tilde{y} = ۰ \quad \longrightarrow \quad \frac{d\tilde{x}}{du} = ۱ \text{ و } \frac{d\tilde{y}}{du} = ۰$$

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = a\cos v \\ \tilde{\eta} = b\sin v \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{\xi}}{dv} = -a\sin v \\ \frac{d\tilde{\eta}}{dv} = b\cos v \end{cases}$$

با استفاده از معادله (۱۱) داریم که:

$$du = \pm dv\left(\sqrt{a^۲\sin^۲ v + b^۲\cos^۲}\right)$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم که:

$$\int du = \int dv\sqrt{a^۲\sin^۲ v + b^۲\cos^۲ v}$$

پس:

$$u - u_۱ = \int_{\gamma=v_۱}^{\gamma=v} \sqrt{a^۲\sin^۲\gamma + b^۲\cos^۲\gamma}\, d\gamma$$

و می دانیم که $u_1 = 0$ و $v_1 = 0$ است ؛ پس:

$$u = \int_{\gamma=0}^{\gamma=v} d\gamma\sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}$$

مقدار $v = arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\theta)$ را در فرمول بالا جای گذاری می کنیم و داریم که:

$$u = \int_{\gamma=0}^{\gamma=arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\theta)} d\gamma\sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma}$$

با توجه به فرمول زیر که مربوط به انتگرال بیضی نافص از نوع دوم است:

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} d\gamma\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}$$

و فرمول خروج از مرکز بیضی می شود:

$$\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

می خواهیم فرمول u به دست آمده در بالا را با استفاده از دو فرمول گفته شده بنویسیم:

$$u = \int_0^{\gamma} d\gamma\sqrt{b^2(\frac{a^2}{b^2}\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma)}$$

که $\gamma = arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\theta)$ است.

پس:

$$u = \int_0^{\gamma} bd\gamma\sqrt{(\frac{a^2}{b^2}\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma)}$$

می دانیم که $\cos^۲\gamma = ۱ - \sin^۲\gamma$ پس عبارت زیر رادیکال می شود:

$$u = \int_۰^\gamma bd\gamma\sqrt{۱ - (۱ - \frac{a^۲}{b^۲})\sin^۲\gamma}$$

b را از انتگرال بیرون می آوریم و $k^۲ = ۱ - \frac{a^۲}{b^۲}$ را در نظر می گیریم.پس:

$$\varphi = arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\theta) \quad \text{و} \quad k = \sqrt{۱ - \frac{a^۲}{b^۲}}$$

پس از $E(\varphi, k)$ استفاده می کنیم:

$$u = bE(arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\theta), \varepsilon)$$

حال از معادله های (۹) و (۱۰) استفاده می کنیم و باید توجه کنید که در دو معادله عبارت $\tilde{x}(\varphi(\alpha))$ وجود دارد که مقدار آن می شود:

$$\tilde{x} = \tilde{x}(u) = u = bE(arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\theta), \varepsilon)$$

حال $\varphi(\theta) = bE(arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\theta), \varepsilon)$ است ، پس داریم که:

$$\varphi(\alpha) = bE(arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\alpha), \varepsilon)$$

و

$$\tilde{x}(\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha)$$

در نتیجه:

$$\tilde{x}(\varphi(\alpha)) = bE(arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\alpha), \varepsilon)$$

با فرض این که $\theta_۱ = \frac{\pi}{۲}$ است ، داریم که:

$$x = c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta$$

$$+ \int_{\theta_۱}^{\theta} bE(arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\alpha), \varepsilon)\sin(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

$$y = -c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta$$

$$+ \int_{\theta_۱}^{\theta} bE(arc\cot(-\frac{a}{b}\tan\alpha), \varepsilon)\cos(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

برای $\theta = \theta_۱ = \frac{\pi}{۲}$ داریم که:

در این حالت چون بازه ی انتگرال از $\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ است ، پس در اصل مساحت یک نقطه می شود ، پس مقدار انتگرال در هر دو معادله ی (۹) و (۱۰) صفر می شود و داریم که:

$$x = c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta$$

$$y = -c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta$$

حال با قرار دادن $\theta = \frac{\pi}{۲}$ در عبارت بالا داریم که:

$$(x, y) = (c_۲, -c_۱)$$

که در اصل مختصات اولیه برای نقطه ی ثابت در نظر گرفته شده ی p است و شکلی که رسم کردیم نشان می دهد که نقطه ی $p = (۰, ۰)$ است.

مثال ۳ : خم چرخشی C با پارامتری شده ی $\tilde{\xi} = v$ و $\tilde{\eta} = -Ln\cos v$ که $(-\frac{\pi}{۲} < v < \frac{\pi}{۲})$ است و خم ثابت B یک خط به صورت $\tilde{x} = u$ و $\tilde{y} = ۰$ در نتیجه فرمول y مربوط به خم غلتان R به صورت رو به رو محاسبه می شود:

$$y = \frac{dx}{d\theta}$$

موقعیت اولیه دستگاه های مختصات توسط $u_۱ = ۰$ و $v_۱ = ۰$ و $\theta_۱ = ۰$ توصیف شده است ، پس داریم که:

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v) = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} = v + i(-Ln\cos v)$$

و

$$\tilde{z} = \tilde{z}(u) = \tilde{x} + i\tilde{y} = u + i(۰) = u$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v) = v - iLn\cos v \\ \tilde{z} = \tilde{z}(u) = u \end{cases}$$

پس داریم که:

$$\begin{cases} \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(۰) = (۰) - iLn\cos(۰)) = -Ln۱ = ۰ \\ \tilde{z} = \tilde{z}(۰) = ۰ \end{cases}$$

می دانیم که:

۱− θ زاویه ی بین قسمت مثبت های محور x و محور ξ است ، پس با توجه به این که $\theta_۱ = ۰$ است پس زاویه ی بین محور x و محور ξ در موقعیت اولیه صفر درجه است ، پس محور ξ هم جهت با محور x است و زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور η ، $(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ ، که θ زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور ξ است.

پس در این مثال زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور η نود درجه است ، چون $\theta_۱ = ۰$ است.

۲− محل برخورد خم ثابت B با خم چرخشی C در اصل با کمک فرمول $\tilde{z}$ به دست می آید که $\tilde{z}$ در موقعیت اولیه به صورت $(۰,۰)$ است.

با توجه به فرض مثال $(v, -Ln\cos v)$ پارامتری شده ی خم چرخشی C است که $(-\frac{\pi}{۲} < v < \frac{\pi}{۲})$.

اگر $(۰ < v < \frac{\pi}{۲})$ باشد ، آن گاه $(۰ < \cos v < ۱)$ و اگر $(-\frac{\pi}{۲} < v < ۰)$ باشد ، آن گاه $(۰ < \cos v < ۱)$ ؛ پس اگر $(-\frac{\pi}{۲} < v < \frac{\pi}{۲})$ باشد ، داریم که: $(۰ < \cos v < ۱)$

پس:

$$Ln۰ < Ln\cos v < Ln۱ \quad \longrightarrow \quad -\infty < Ln\cos v < ۰$$

در نهایت:

$$\text{۰} < Ln\cos v < +\infty$$

چون در این مثال دستگاه مختصات (ξ,η) بر دستگاه مختصات (x,y) منطبق است ؛ پس کلیه ی تغییرات را روی دستگاه مختصات (x,y) بررسی می کنیم.

پس y در دستگاه مختصات (x,y) از صفر تا $(+\infty)$ حرکت می کند و x در این دستگاه در بازه ی $(-\frac{\pi}{\text{۲}},\frac{\pi}{\text{۲}})$ قرار دارد.

می توان بررسی کرد که در هر دو مرزی که v دارد ، مقدار y به سمت $(+\infty)$ می رود.

توجه کنید که $x = v$ پس داریم که:

$$y = -Ln\cos v = -Ln\cos x = -Log_e\cos x$$

در نتیجه:

$$y = Log_e(\cos x)^{-\text{۱}}$$

پس:

$$e^y = (\cos x)^{-\text{۱}} = \frac{\text{۱}}{\cos x} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{e}^y\cos x = \text{۱}$$

در نهایت داریم که:

$$\begin{cases} \cdot < y < +\infty & \text{if} \quad \cdot < x < \frac{\pi}{۲} \\ y = \cdot & \text{if} \quad x = \cdot \\ \cdot < y < +\infty & \text{if} \quad -\frac{\pi}{۲} < x < \cdot \end{cases}$$

برای تشخیص تقعر شکل خم چرخشی C ، از معادله y دو بار باید مشتق بگیریم.پس داریم که:

$$y = Log_e(\cos x)^{-۱} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{y}' = \tan x$$

$$y'' = ۱ + \tan^{۲} x > \cdot$$

پس در هر زاویه ای ، تقعر رو به بالا است.

در این حالت از معادله (۱۳) استفاده می شود:

$$\tan\theta = (\frac{d\tilde{\eta}}{dv})\left(\frac{d\tilde{\xi}}{dv}\right)^{-۱}$$

$$\tilde{\zeta} = \zeta(\tilde{v}) = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} \longrightarrow \frac{d\tilde{\zeta}}{dv} = \frac{d\zeta(\tilde{v})}{dv} = \frac{d\tilde{\xi}}{dv} + i\frac{d\tilde{\eta}}{dv}$$

پس:

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{dv} = \frac{d}{dv}(v) + i\frac{d}{dv}(-Ln\cos v) = ۱ + i\tan v$$

در نتیجه:

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dv} = ۱ \qquad \text{و} \qquad \frac{d\tilde{\eta}}{dv} = \tan v$$

پس:

$$\tan\theta = (\tan v) \times \frac{۱}{(۱)} = \tan v$$

پس:

$$\tan\theta = \tan v$$

می دانیم که:

$$\tan x = \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad x = k\pi + \alpha$$

داریم که:

$$\tan\theta = \tan v \Longrightarrow \theta = k\pi + v$$

در نتیجه:

$$\theta \equiv v \quad (mod \pi)$$

یک رابطه بین پارامتر های v و θ به دست آورده ایم ، حال به دنبال پیدا کردن رابطه ای برای پارامتر های u و v هستیم ، و بعد از به دست آوردن این رابطه مقدار v به دست آمده را در این رابطه قرار می دهیم.

با استفاده از فرض مثال داریم که :

$$\tilde{x} = u \text{ و } \tilde{y} = ۰ \quad \longrightarrow \quad \frac{d\tilde{x}}{du} = ۱ \text{ و } \frac{d\tilde{y}}{du} = ۰$$

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = v \\ \tilde{\eta} = -Ln\cos v \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\tilde{\xi}}{dv} = ۱ \\ \dfrac{d\tilde{\eta}}{dv} = \tan v \end{cases}$$

با استفاده از معادله (۱۱) داریم که:

$$du = \pm dv\sqrt{۱ + \tan^{۲} v}$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم که:

$$\int du = \int dv\sqrt{۱ + \tan^{۲} v}$$

پس:

$$u - u_{۱} = \int_{\gamma=v_{۱}}^{\gamma=v} d\gamma\sqrt{۱ + \tan^{۲} v}$$

و می دانیم که $u_{۱} = ۰$ و $v_{۱} = ۰$ است ؛ پس:

$$u = \int_{۰}^{v} d\gamma\sqrt{۱ + \tan^{۲} v}$$

می دانیم که:

$$۱ + \tan^{۲}\gamma = \frac{۱}{\cos^{۲}\gamma}$$

پس داریم که:

$$u = \int_{۰}^{v} \frac{۱}{\cos\gamma} d\gamma$$

حال می خواهیم مقدار انتگرال بالا را به دست آوریم ؛ ابتدا عبارت $\cos\gamma$ را در انتگرال یک بار ضرب و یک بار تقسیم می کنیم:

$$\int_{۰}^{v} \frac{۱}{\cos\gamma} d\gamma = \int_{۰}^{v} \frac{۱}{\cos\gamma} \times \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma} d\gamma$$

$$= \int_{۰}^{v} \frac{\cos\gamma}{\cos^{۲}\gamma} d\gamma = \int_{۰}^{v} \frac{\cos\gamma}{۱ - \sin^{۲}\gamma} d\gamma$$

حال از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$u = \sin\gamma \qquad \longrightarrow \qquad du = \cos\gamma d\gamma$$

و

$$\begin{cases} \gamma = v \\ \gamma = ۰ \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{cases} u = \sin v \\ u = \sin(۰) = ۰ \end{cases}$$

پس داریم که:

$$\int_{۰}^{v} \frac{\cos\gamma}{۱ - \sin^{۲}\gamma} d\gamma = \int_{۰}^{\sin v} \frac{du}{۱ - u^{۲}}$$

توجه کنید که می توان $\frac{۱}{۱ - u^{۲}}$ را به صورت جمع $\frac{۱}{۱ - u}$ و $\frac{۱}{۱ + u}$ بنویسیم:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}$$

$$= \frac{A(1+u) + B(1-u)}{1-u^2}$$

$$= \frac{(A+B) + u(A-B)}{1-u^2}$$

پس:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \longrightarrow A = B \end{cases} \longrightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

پس داریم که:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+u} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-u}$$

پس:

$$\int_0^{\sin v} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\sin v} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right)$$

حال انتگرال بالا را که حساب کنیم ، داریم که:

$$\int_0^{\sin v} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} Ln(\frac{1+\sin v}{1-\sin v})$$

پس در نهایت:

$$u = \int_{\cdot}^{v} \frac{۱}{\cos\gamma} d\gamma = \frac{۱}{۲} Ln(\frac{۱ + \sin v}{۱ - \sin v})$$

حال از معادله های (۹) و (۱۰) استفاده می کنیم و باید توجه کنید که در دو معادله عبارت $\tilde{x}(\varphi(\alpha))$ وجود دارد که مقدار آن می شود:

$$\tilde{x} = \tilde{x}(u) = u = \varphi(\theta)$$

حال می دانیم که $v = \theta$ ، پس:

$$u = \frac{۱}{۲} Ln(\frac{۱ + \sin\theta}{۱ - \sin\theta})$$

آن گاه:

$$\varphi(\theta) = \frac{۱}{۲} Ln(\frac{۱ + \sin\theta}{۱ - \sin\theta})$$

در نهایت:

$$\tilde{x}(\varphi(\alpha)) = \frac{۱}{۲} Ln(\frac{۱ + \sin\alpha}{۱ - \sin\alpha})$$

با فرض این که $\theta_۱ = ۰$ است ، داریم که:

$$x = c_۱ \cos\theta + c_۲ \sin\theta + \int_{\cdot}^{\theta} \frac{۱}{۲} Ln(\frac{۱ + \sin\alpha}{۱ - \sin\alpha}) \sin(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

$$y = -c_۱ \sin\theta + c_۲ \cos\theta + \int_{\cdot}^{\theta} \frac{۱}{۲} Ln(\frac{۱ + \sin\alpha}{۱ - \sin\alpha}) \cos(\theta - \alpha)\, d\alpha$$

حال مقدار انتگرال زیر را به دست می آوریم:

$$\int_{۰}^{\theta} Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})\sin(\theta-\alpha)\,d\alpha$$

از روش جز به جز استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} u = Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}) \\ dv = \sin(\theta-\alpha)d\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = \left(Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})\right)' d\alpha \\ v = \cos(\theta-\alpha) \end{cases}$$

مشتق $Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})$ نسبت به α می شود:

$$\left(Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})\right)' = (\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})' \times \frac{۱-\sin\alpha}{۱+\sin\alpha} = \frac{۲}{\cos\alpha}$$

پس:

$$\begin{cases} u = Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}) \\ dv = \sin(\theta-\alpha)d\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = \frac{۲}{\cos\alpha}d\alpha \\ v = \cos(\theta-\alpha) \end{cases}$$

در نهایت داریم که:

$$\int Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})\sin(\theta-\alpha)\,d\alpha =$$

$$Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})\cos(\theta-\alpha) - \int \frac{۲}{\cos\alpha}\cos(\theta-\alpha)\,d\alpha$$

حال اگر از روابط مثلثاتی استفاده کنیم ، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\int_{۰}^{\theta} Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})\sin(\theta-\alpha)\,d\alpha =$$

$$Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}) - ۲\theta\cos\theta + ۲\sin\theta Ln\cos\theta$$

به همین روش نیز می توان مقدار انتگرال درون فرمول y را محاسبه کرد:

$$\int_{۰}^{\theta} Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha})\cos(\theta-\alpha)\,d\alpha = ۲\theta\sin\theta + ۲\cos\theta Ln\cos\theta$$

پس مقدار x و y به صورت زیر است:

$$x = c_{۱}\cos\theta + c_{۲}\sin\theta$$
$$+\frac{۱}{۲}Ln(\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}) - \theta\cos\theta + \sin\theta Ln\cos\theta$$

$$y = -c_{۱}\sin\theta + c_{۲}\cos\theta + \theta\sin\theta + \cos\theta Ln\cos\theta$$

خم غلتان کشیده شده در شکل برای حالت اولیه ی $p = (۰,۰)$ است که در این حالت $c_{۱} = ۰$ و $c_{۲} = ۰$ هستند.

چون در حالت اولیه $\theta = \theta_{۱} = ۰$ است پس در x و y بالا $\theta = ۰$ را قرار می دهیم تا بتوانیم x و y را به صورت کوچک تر و بر حسب $c_{۱}$ و $c_{۲}$ بنویسیم ، حال چون حالت اولیه دارای $p = (۰,۰)$ است پس این نقطه باید در (x,y) به دست آمده در حالت اولیه نیز صدق کند.

$$(x, y) = (c_۱, c_۲) = (۰, ۰) = P$$

حال می خواهیم تقعر خم غلتان را به دست آوریم ؛ پس باید y را بر حسب x بنویسیم و از آن دو بار مشتق بگیریم.

حال پارامتری شده ی خم غلتان R به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲} Ln(\frac{۱ + \sin\alpha}{۱ - \sin\alpha}) - \theta\cos\theta + \sin\theta Ln\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta + \cos\theta Ln\cos\theta \end{cases}$$

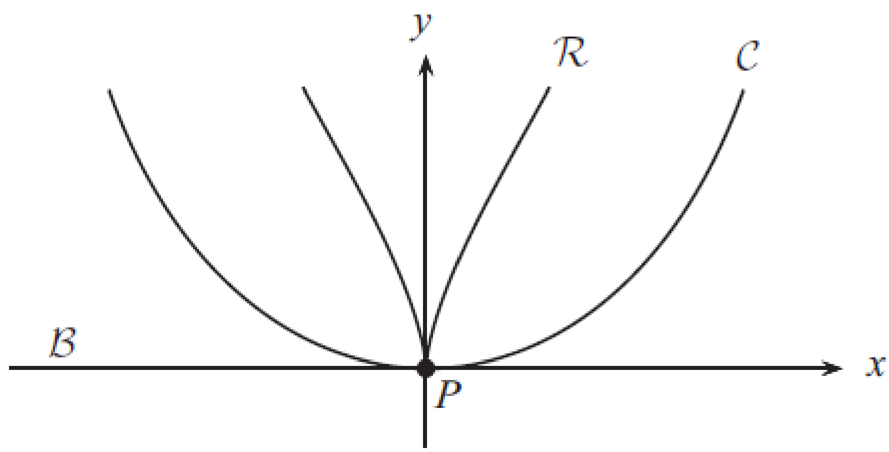
حال $Ln\cos\theta$ درون x را برحسب x می نویسیم و $Ln\cos\theta$ را درون y قرار می دهیم و از y نسبت به x مشتق می گیریم.پس:

$$y = \cot\theta \left[x + \theta\cos\theta - \frac{۱}{۲} Ln(\frac{۱ + \sin\theta}{۱ - \sin\theta}) \right] + \theta\sin\theta$$

$$y' = \cot\theta \quad \longrightarrow \quad \mathrm{y}'' = -۱ - \cot^۲\theta < ۰$$

چون θ از x است ، پس می توان از θ مشتق گرفت ؛ البته یک مشتق θ نسبت به x هم داریم ، در مشتق اول و دوم y بالا.

پس تقعر خم غلتان R رو به پایین است و خم غلتان R دارای یک مجانب قائم $x = ۰$ و یک مجانب افقی $y = \frac{\pi}{۲}$ است.



شکل ۳.۵: چرخش یک خم واگرا

به دنبال این هستیم که یک مثالی را حل کنیم که در آن خم ثابت B ، یک خط مستقیم و صاف نباشد ، به همین خاطر به سراغ درون و برون چرخزاد [1] می رویم.

مثال ۴ : خم چرخشی C یک دایره با پارامتری شده ی $\tilde{\xi} = b\cos v$ و $\tilde{\eta} = b\sin v$ که $(b > ۰)$ است و خم ثابت B یک دایره با پارامتری شده ی $\tilde{x} = a\cos u$ و $\tilde{y} = a\sin u$ که $(a > ۰)$ در نتیجه فرمول y مربوط به خم غلتان R به صورت زیر محاسبه می شود :

$$y = \tilde{y} + \frac{dx}{d\theta}$$

1- $hypo - andepitrochoids$

موقعیت اولیه دستگاه های مختصات توسط $u_۱ = ۰$ و $v_۱ = ۰$ توصیف شده است .

با استفاده از فرض مثال داریم که :

$$\begin{cases} \tilde{x} = a\cos u \\ \tilde{y} = a\sin u \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{du} = -a\sin u \\ \dfrac{d\tilde{y}}{du} = a\cos u \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = b\cos v \\ \tilde{\eta} = b\sin v \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\tilde{\xi}}{dv} = -b\sin v \\ \dfrac{d\tilde{\eta}}{dv} = b\cos v \end{cases}$$

با استفاده از معادله (۱۱) داریم که:

$$du(\sqrt{a^۲}) = \pm dv\sqrt{b^۲} \longrightarrow adu = \pm bdv$$

با انتگرال گیری از طرفین داریم که:

$$\int adu = \int bdv$$

پس:

$$a(u - u_۱) = \pm b(v - v_۱)$$

و می دانیم که $u_1 = 0$ و $v_1 = 0$ است ؛ پس:

$$au = \pm bv$$

یک رابطه بین پارامتر های u و v به دست آورده ایم ، حال به دنبال پیدا کردن رابطه ای برای پارامتر های θ و u و v هستیم ، و بعد از به دست آوردن این رابطه مقدار v به دست آمده را در این رابطه قرار می دهیم ، تا فقط رابطه ای بین θ و u داشته باشیم.

در این حالت از معادله (۱۲) استفاده می شود:

$$\tan\theta = -\frac{\dfrac{d\tilde{y}}{du}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dv} - \dfrac{d\tilde{x}}{du}\dfrac{d\tilde{\eta}}{dv}}{\dfrac{d\tilde{x}}{du}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dv} + \dfrac{d\tilde{y}}{du}\dfrac{d\tilde{\eta}}{dv}}$$

می دانیم که:

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha \end{cases}$$

پس:

$$\tan\theta = \frac{\sin(v - u)}{\cos(v - u)} = \tan(v - u)$$

می دانیم که:

$$\tan x = \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad x = k\pi + \alpha$$

داریم که:

$$\tan\theta = \tan(v-u) \Longrightarrow \theta = k\pi + (v-u)$$

در نتیجه:

$$\theta \equiv (v-u) \quad (mod\pi)$$

قبلا به دست آورده ایم که:

$$au = \pm bv$$

می خواهیم معادله ی $\theta \equiv (v-u)(mod\pi)$ را فقط بر حسب θ و u بنویسیم ؛ پس:

$$v = \pm\frac{a}{b}u$$

حال $k = ۰$ در نظر می گیریم ؛ پس داریم که:

$$\theta = (\pm\frac{a}{b} - ۱)u$$

حال معادله ی بالا را در دو حالت مثبت و منفی تحلیل می کنیم.

توجه کنید که $a > b$ و $a \neq b$ است.

حالت اول: اگر داشته باشیم:

$$\theta = (\frac{a}{b} - ۱)u$$

چون $0 < (\frac{a}{b} - 1)$ است و θ هم زاویه ی بین خم چرخشی C و خم ثابت B است ، پس زمانی که θ افزایش می یابد ؛ به خاطر محل قرار گرفتن دو دستگاه مختصات (x, y) و (ξ, η) نسبت به هم ، باید دستگاه مختصات (ξ, η) در جهت عقربه های ساعت دوران کند ، پس خم چرخشی C در جهت عقربه های ساعت و خم ثابت B در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت می کند ؛ همان طور که را θ بر حسب u نوشتیم ، می توان θ را بر حسب v نیز نوشت و چون در هر دو حالت ضرایب مثبت هستند ، پس دو متغیر u و v هم علامت هستند و به طور هم زمان افزایش می یابند.

حالت دوم: اگر داشته باشیم:

$$\theta = (-\frac{a}{b} - 1)u$$

چون $0 > (-\frac{a}{b} - 1)$ است و θ هم زاویه ی بین خم چرخشی C و خم ثابت B است ، پس زمانی که θ افزایش می یابد ؛ به خاطر محل قرار گرفتن دو دستگاه مختصات (x, y) و (ξ, η) نسبت به هم ، باید دستگاه مختصات (ξ, η) در جهت عقربه های ساعت دوران کند ، پس خم چرخشی C در جهت عقربه های ساعت حرکت می کند ؛ همان طور که را θ بر حسب u نوشتیم ، می توان θ را بر حسب v نیز نوشت و چون v در θ دارای ضریب مثبت است و u در θ دارای ضریب منفی است ، پس علامت دو متغیر u و v با هم متفاوت هستند و اگر u کاهش یابد ، v افزایش می یابد.

توجه کنید که رابطه بین u و v برای تشخیص جهت حرکت خم چرخشی C و خم ثابت B است ؛ نه برای تشخیص جهت دوران آن.

حال می خواهیم برای حالت $\theta = (\frac{a}{b} - ۱)u$ ، سوال را حل کنیم.

اول از همه داریم که: $\theta = (\frac{a-b}{b})u$

که برای بیان u در θ نیاز داریم که داشته باشیم: $a \neq b$

یعنی شعاع دو دایره که یکی خم چرخشی C و دیگری خم ثابت B است ، نباید یکی باشد.به طور هندسی ، $a = b$ ، یعنی که خم چرخشی C و خم ثابت B بر هم منطبق هستند.

حال از معادله (۵) استفاده می کنیم ولی قبل از آن مقادیر $\tilde{x}$ و $\frac{d\tilde{y}}{d\theta}$ را به دست می آوریم:

$$\tilde{x} = \tilde{x}(u) = a\cos u$$

حال u را بر حسب θ می نویسیم: $u = (\frac{b}{a-b})\theta$

$$\tilde{x} = a\cos(\frac{b\theta}{a-b}) \longrightarrow \tilde{x}(\theta) = a\cos(\frac{b\theta}{a-b}) = \tilde{x}$$

$$\tilde{y} = \tilde{y}(u) = a\sin u$$

$$\tilde{y} = a\sin(\frac{b\theta}{a-b}) \longrightarrow \tilde{y}(\theta) = a\sin(\frac{b\theta}{a-b}) = \tilde{y}$$

حال مقدار $h(\theta)$ را محاسبه می کنیم:

$$h(\theta) = \tilde{x} - \frac{d\tilde{y}}{d\theta} = (a - \frac{ab}{a-b})\cos(\frac{b\theta}{a-b}) = \frac{a(a-۲b)}{a-b}\cos(\frac{b\theta}{a-b})$$

پس داریم که:

$$h(\alpha) = \frac{a(a-۲b)}{a-b}\cos(\frac{b\alpha}{a-b})$$

و فرض کنید که $\theta_۱ = ۰$ است.

حال می خواهیم برای حالت اولیه $u_۱ = ۰$ و $v_۱ = ۰$ و $\theta_۱ = ۰$ شکل رسم کنیم:

۱- می دانیم که هر دو خم چرخشی C و خم ثابت B دایره هستند و در این حالت خم چرخشی C درون دایره ای که خم ثابت B است ، حرکت می کند.

$$\tilde{z} = \tilde{z}(u) = \tilde{x} + i\tilde{y} = (x, y) = (x(u), y(u)) = (a\cos u, a\sin u)$$

البته $\tilde{z}$ محل برخورد خم چرخشی C و خم ثابت B است و $u_۱ = ۰$ ، پس برای حالت اولیه داریم که:

$$\tilde{z}(۰) = (a\cos(۰), a\sin(۰)) = (a, ۰)$$

۲- θ زاویه ی بین قسمت مثبت های محور x و محور ξ است ، پس با توجه به این که $\theta_1 = 0$ است پس زاویه ی بین محور x و محور ξ در موقعیت اولیه صفر درجه است ، پس محور ξ هم جهت با محور x است و زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور η ، $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ، که θ زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور ξ است.

پس در این مثال زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور η نود درجه است ، چون $\theta_1 = 0$ است.

حال از معادله های (۶) و (۷) استفاده می کنیم و باید توجه کنید که در دو معادله ، عبارت $h(\alpha)$ وجود دارد ، می دانیم که:

$$h(\alpha) = \frac{a(a-2b)}{a-b}\cos(\frac{b\alpha}{a-b})$$

$$x = c_1\cos\theta + c_2\sin\theta + \int_0^\theta \frac{a(a-2b)}{a-b}\cos(\frac{b\alpha}{a-b})\sin(\theta-\alpha)d\alpha$$

$$y = \tilde{y} - c_1\sin\theta + c_2\cos\theta + \int_0^\theta \frac{a(a-2b)}{a-b}\cos(\frac{b\alpha}{a-b})\cos(\theta-\alpha)d\alpha$$

برای محاسبه انتگرال های بالا از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]\\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\end{cases}$$

پس داریم که:

$$\int_{۰}^{\theta} \frac{a(a-۲b)}{a-b}\cos(\frac{b\alpha}{a-b})\sin(\theta-\alpha)d\alpha = (a-b)(\cos(\frac{b\theta}{a-b})-\cos\theta)$$

$$\int_{۰}^{\theta} \frac{a(a-۲b)}{a-b}\cos(\frac{b\alpha}{a-b})\cos(\theta-\alpha)d\alpha = -b\sin(\frac{b\theta}{a-b})+(a-b)\sin\theta)$$

$$x = c_۱\cos\theta + c_۲\sin\theta + (a-b)(\cos(\frac{b\theta}{a-b})-\cos\theta)$$

$$y = a\sin(\frac{b\theta}{a-b}) - c_۱\sin\theta + c_۲\cos\theta - b\sin(\frac{b\theta}{a-b}) + (a-b)\sin\theta)$$

پس داریم که:

$$x = c_۱\cos\theta + c_۲\sin\theta + (a-b)\cos(\frac{b\theta}{a-b})$$

$$y = -c_۱\sin\theta + c_۲\cos\theta + (a-b)\sin(\frac{b\theta}{a-b})$$

حال داریم که:

$$z = z(\theta) = (x,y) = (x(\theta), y(\theta))$$

فرض کنید که P به صورت زیر است ؛ مختصات نقطه P در حالت اولیه می باشد:

$$P = (p_۱, p_۲) = (x(\theta = ۰), y(\theta = ۰))$$

حال می خواهیم $C_۱$ و $C_۲$ را در حالت اولیه که $\theta = ۰$ است ، محاسبه کنیم:

$$P = (x(۰), y(۰)) = (c_۱ + (a - b), c_۲) = (p_۱, p_۲)$$

پس داریم که:

$$c_۱ = p_۱ - a + b$$

و

$$c_۲ = p_۲$$

حال کافی است که نشان دهیم که فاصله ی نقطه ی P تا مرکز خم چرخشی C به صورت زیر است:

$$|P - O_C| = \sqrt{c_۱^۲ + c_۲^۲}$$

واضح است ، چون:

$$O_C = (a - b, ۰)$$

پس نقطه P روی محیط خم چرخشی C قرار دارد ، پس نقطه P می تواند محل برخورد دو خم چرخشی C و خم ثابت B باشد.

فرض کنید که:

$$\theta = \frac{a - b}{a} t$$

که t متغیر جدید است.حال می خواهیم با استفاده از تعریف بالا ، معادله کلاسیک درون چرخزاد [2] را به دست آوریم.

روش به دست آوردن معادله کلاسیک درون چرخزاد به این صورت است که باید جای c_1 و c_2 که عدد هستند ، $\sin$ و $\cos$ زاویه ای را قرار دهیم:

$$c_1 = \cos\beta\sqrt{c_1 + c_2}$$

و

$$c_2 = \sin\beta\sqrt{c_1 + c_2}$$

پس:

$$\tan\beta = \frac{c_2}{c_1}$$

حال عبارت زیر را با قرار دادن θ جدید به دست می آوریم:

$$\frac{b\theta}{a-b} = \frac{b}{a-b} \times \frac{a-b}{a}t = \frac{b}{a}t$$

حال مقدار x و y خم غلتان را با جای گذاری c_1 و c_2 و فرمول بالا به دست می آوریم:

$$x = \sqrt{c_1 + c_2}(\cos\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta) + (a-b)\cos(\frac{b}{a}t)$$

$$y = -\sqrt{c_1 + c_2}(\cos\beta\sin\theta - \sin\beta\cos\theta) + (a-b)\sin(\frac{b}{a}t)$$

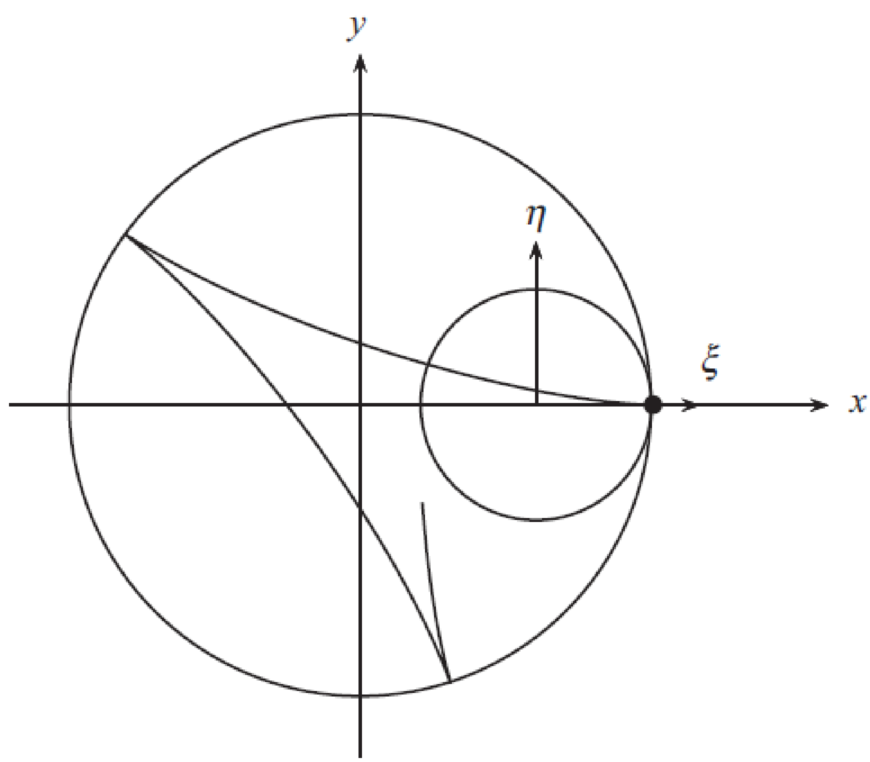
2- hypotrochoid

در نتیجه داریم که:

$$x = \sqrt{c_۱ + c_۲}\cos(\frac{a-b}{a}t - \beta) + (a-b)\cos(\frac{b}{a}t)$$

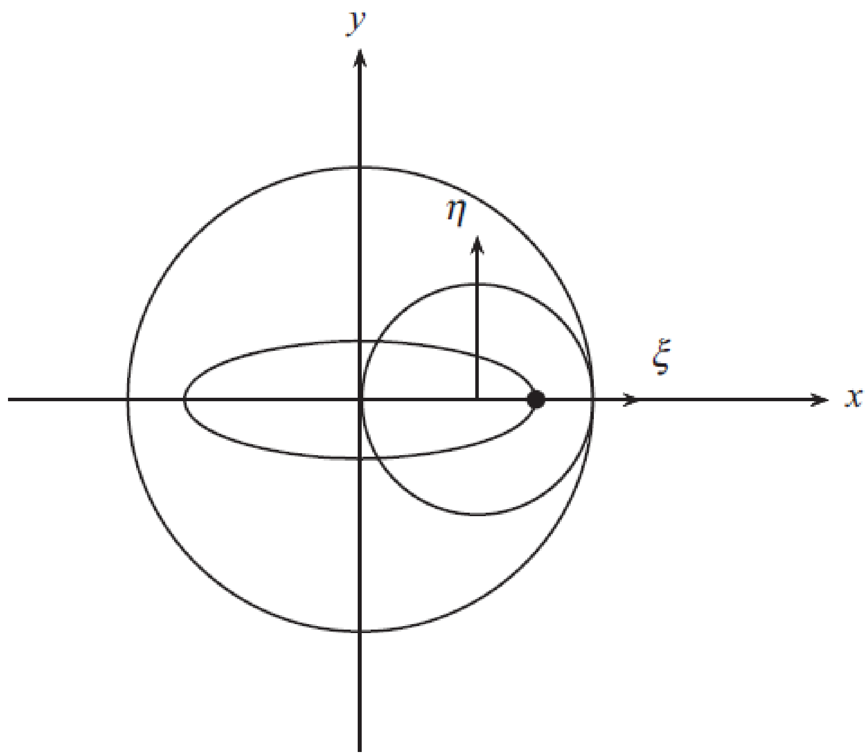
$$y = -\sqrt{c_۱ + c_۲}\sin(\frac{a-b}{a}t - \beta) + (a-b)\sin(\frac{b}{a}t)$$

در این حالت که نقطه p روی خم چرخشی C قرار دارد ، خم غلتان R یک درون چرخزاد است.



شکل ۴.۵: تولید یک درون چرخزاد به عنوان خم غلتان

اگر $a = ۲b$ و $p = (p,۰)$ که $b < p < ۲b$ در این حالت نقطه p روی محیط خم چرخشی C قرار ندارد بلکه روی شعاع خم چرخشی C ، آن هم در قسمتی که به محیط خم ثابت B نزدیک تر است ، قرار دارد ؛ در این حالت $c_۱ = p - b$ و $c_۲ = ۰$ است ؛ که در این صورت ، خم غلتان R یک بیضی است.



شکل ۵.۵: تولید یک بیضی به عنوان خم غلتان

چون:

$$P = (x(۰), y(۰)) = (c_۱ + (a - b), c_۲) = (p, ۰)$$

پس نتیجه بالا حاصل می شود.

حال می خواهیم ببینیم که خم غلتان R در این حالت چگونه است ؛ پس x و y به صورت زیر می شود:

$$x = (p-b)\cos\theta + b\cos\theta = p\cos\theta$$

$$y = -(p-b)\sin\theta + b\sin\theta = (۲b-p)\sin\theta = (a-p)\sin\theta$$

پس داریم که:

$$x = p\cos\theta$$

$$y = (a-p)\sin\theta$$

بررسی (x,y) :

$$\frac{x}{p} = \cos\theta$$

$$\frac{y}{a-p} = \sin\theta$$

پس:

$$(\frac{x}{p})^۲ + (\frac{y}{a-p})^۲ = \cos^۲\theta + \sin^۲\theta = ۱$$

در نتیجه خم غلتان بیضی است:

$$(\frac{x}{p})^۲ + (\frac{y}{a-p})^۲ = ۱$$

حال می خواهیم برای حالت $\theta = (-\frac{a}{b} - ۱)u$ ، سوال را حل کنیم.

اول از همه داریم که: $\theta = (\frac{-a-b}{b})u = -(\frac{a+b}{b})u$

که برای بیان u در θ نیاز به داشتن شرطی نداریم ، چون: $a + b > ۰$

حال از معادله (۵) استفاده می کنیم ولی قبل از آن مقادیر $\tilde{x}$ و $\frac{d\tilde{y}}{d\theta}$ را به دست می آوریم:

$$\tilde{x} = \tilde{x}(u) = a\cos u$$

حال u را بر حسب θ می نویسیم:
$$u = (\frac{-b}{a+b})\theta$$

$$\tilde{x} = a\cos(\frac{-b\theta}{a+b}) \longrightarrow \tilde{x}(\theta) = a\cos(\frac{b\theta}{a+b}) = \tilde{x}$$

$$\tilde{y} = \tilde{y}(u) = a\sin u$$

$$\tilde{y} = a\sin(\frac{-b\theta}{a+b}) \longrightarrow \tilde{y}(\theta) = -a\sin(\frac{b\theta}{a+b}) = \tilde{y}$$

حال مقدار $h(\theta)$ را محاسبه می کنیم:

$$h(\theta) = \tilde{x} - \frac{d\tilde{y}}{d\theta} = (a + \frac{ab}{a+b})\cos(\frac{b\theta}{a+b})$$

$$= \frac{a(a+۲b)}{a+b}\cos(\frac{b\theta}{a+b})$$

پس داریم که:

$$h(\alpha) = \frac{a(a+۲b)}{a+b}\cos(\frac{b\alpha}{a+b})$$

و فرض کنید که $\theta_۱ = \pi$ است.

حال می خواهیم برای حالت اولیه $u_1 = 0$ و $v_1 = 0$ و $\theta_1 = \pi$ شکل رسم کنیم:

۱- می دانیم که هر دو خم چرخشی C و خم ثابت B دایره هستند و در این حالت خم چرخشی C درون دایره ای که خم ثابت B است ، حرکت می کند.

$$\begin{aligned}\tilde{z} = \tilde{z}(u) = \tilde{x} + i\tilde{y} = (x, y) = (x(u), y(u))\\ = (a\cos u, a\sin u)\end{aligned}$$

البته $\tilde{z}$ محل برخورد خم چرخشی C و خم ثابت B است و $u_1 = 0$ ، پس برای حالت اولیه داریم که:

$$\tilde{z}(0) = (a\cos(0), a\sin(0)) = (a, 0)$$

۲- θ زاویه ی بین قسمت مثبت های محور x و محور ξ است ، پس با توجه به این که $\theta_1 = \pi$ است پس زاویه ی بین محور x و محور ξ در موقعیت اولیه ۱۸۰ درجه است ، پس محور ξ هم جهت با محور x است و زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور η ، $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ، که θ زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور ξ است.

پس در این مثال زاویه ی بین قسمت مثبت محور x و قسمت مثبت محور η منفی نود درجه است ، چون $\theta_1 = \pi$ است.

حال از معادله های (۶) و (۷) استفاده می کنیم و باید توجه کنید که در دو معادله ، عبارت $h(\alpha)$ وجود دارد ، می دانیم که:

$$h(\alpha) = \frac{a(a+۲b)}{a+b}\cos(\frac{b\alpha}{a+b})$$

$$x = c_۱\cos\theta + c_۲\sin\theta + \int_۰^{\theta}\frac{a(a+۲b)}{a+b}\cos(\frac{b\alpha}{a+b})\sin(\theta-\alpha)d\alpha$$

$$y = \tilde{y} - c_۱\sin\theta + c_۲\cos\theta + \int_۰^{\theta}\frac{a(a+۲b)}{a+b}\cos(\frac{b\alpha}{a+b})\cos(\theta-\alpha)d\alpha$$

برای محاسبه انتگرال های بالا از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]\\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\end{cases}$$

پس داریم که:

$$\int_۰^{\theta}\frac{a(a+۲b)}{a+b}\cos(\frac{b\alpha}{a+b})\sin(\theta-\alpha)d\alpha = (a+b)(\cos(\frac{b\theta}{a+b}) - \cos\theta)$$

$$\int_۰^{\theta}\frac{a(a+۲b)}{a+b}\cos(\frac{b\alpha}{a+b})\cos(\theta-\alpha)d\alpha = -b\sin(\frac{b\theta}{a+b}) + (a+b)\sin\theta)$$

$$x = c_۱\cos\theta + c_۲\sin\theta + (a+b)(\cos(\frac{b\theta}{a+b}) - \cos\theta)$$

$$y=-a\sin(\frac{b\theta}{a+b})-c_۱\sin\theta+c_۲\cos\theta-b\sin(\frac{b\theta}{a+b})+(a+b)\sin\theta)$$

پس داریم که:

$$x=c_۱\cos\theta+c_۲\sin\theta+(a+b)\cos(\frac{b\theta}{a+b})$$

$$y=-c_۱\sin\theta+c_۲\cos\theta-(a+b)\sin(\frac{b\theta}{a+b})$$

حال داریم که:

$$z=z(\theta)=(x,y)=(x(\theta),y(\theta))$$

فرض کنید که P به صورت زیر است ؛ مختصات نقطه P در حالت اولیه می باشد:

$$P=(p_۱,p_۲)=(x(\theta=۰),y(\theta=۰))$$

حال می خواهیم $C_۱$ و $C_۲$ را در حالت اولیه که $\theta=۰$ است ، محاسبه کنیم:

$$P=(x(۰),y(۰))=(c_۱+(a+b),c_۲)=(p_۱,p_۲)$$

پس داریم که:

$$c_۱=p_۱-(a+b)$$

و

$$c_۲=p_۲$$

حال کافی است که نشان دهیم که فاصله ی نقطه ی P تا مرکز خم چرخشی C به صورت زیر است:

$$|P - O_C| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

واضح است ، چون:

$$O_C = (a + b, 0)$$

پس نقطه P روی محیط خم چرخشی C قرار دارد ، پس نقطه P می تواند محل برخورد دو خم چرخشی C و خم ثابت B باشد.

فرض کنید که:

$$\theta = \frac{a + b}{a} t$$

که t متغیر جدید است.حال می خواهیم با استفاده از تعریف بالا ، معادله کلاسیک برون چرخزاد [3] را به دست آوریم.

روش به دست آوردن معادله کلاسیک برون چرخزاد به این صورت است که باید جای c_1 و c_2 که عدد هستند ، sin و cos زاویه ای را قرار دهیم:

$$c_1 = \cos\beta\sqrt{c_1 + c_2}$$

و

$$c_2 = \sin\beta\sqrt{c_1 + c_2}$$

پس:

$$\tan\beta = \frac{c_2}{c_1}$$

3- epicycloid

حال عبارت زیر را با قرار دادن θ جدید به دست می آوریم:

$$\frac{b\theta}{a+b} = \frac{b}{a+b} \times \frac{a+b}{a}t = \frac{b}{a}t$$

حال مقدار x و y خم غلتان را با جای گذاری $c_۱$ و $c_۲$ و فرمول بالا به دست می آوریم:

$$x = \sqrt{c_۱ + c_۲}(\cos\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta) + (a+b)\cos(\frac{b}{a}t)$$

$$y = -\sqrt{c_۱ + c_۲}(\cos\beta\sin\theta - \sin\beta\cos\theta) + (a+b)\sin(\frac{b}{a}t)$$

در نتیجه داریم که:

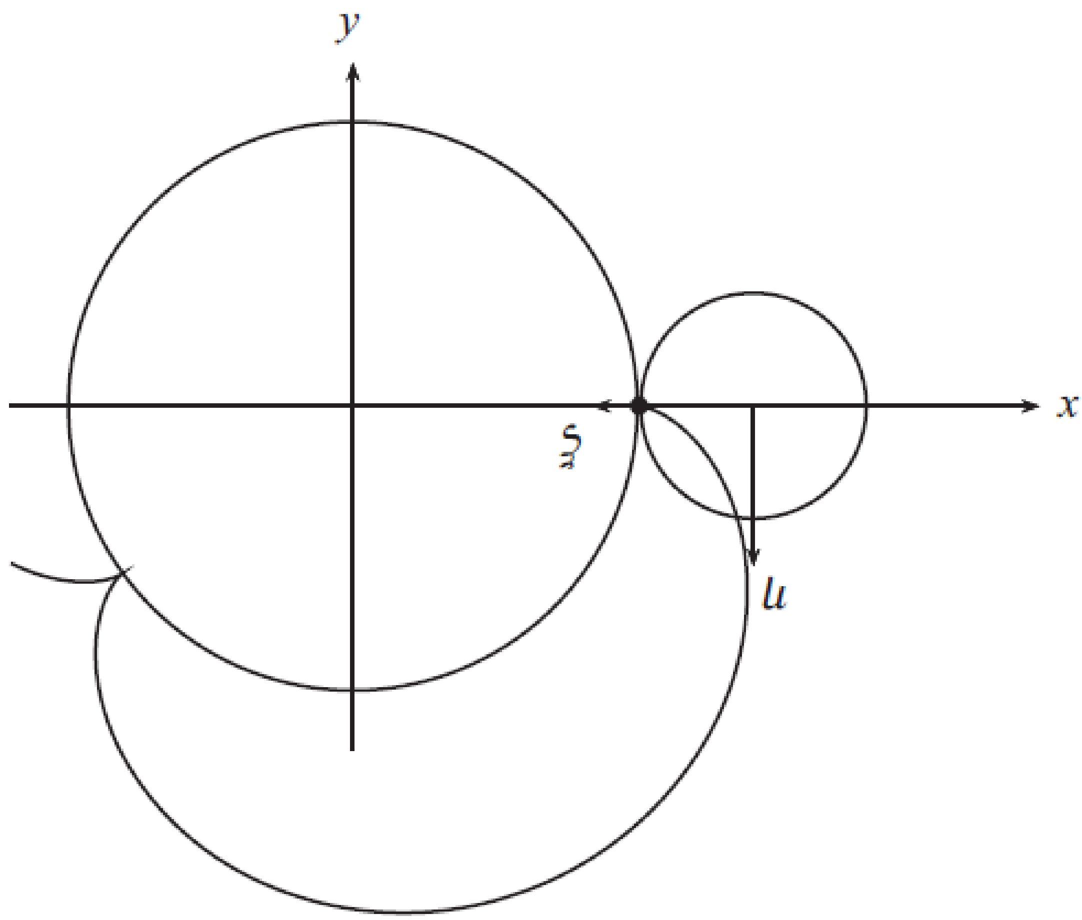
$$x = \sqrt{c_۱ + c_۲}\cos(\frac{a+b}{a}t - \beta) + (a+b)\cos(\frac{b}{a}t)$$

$$y = -\sqrt{c_۱ + c_۲}\sin(\frac{a+b}{a}t - \beta) + (a+b)\sin(\frac{b}{a}t)$$

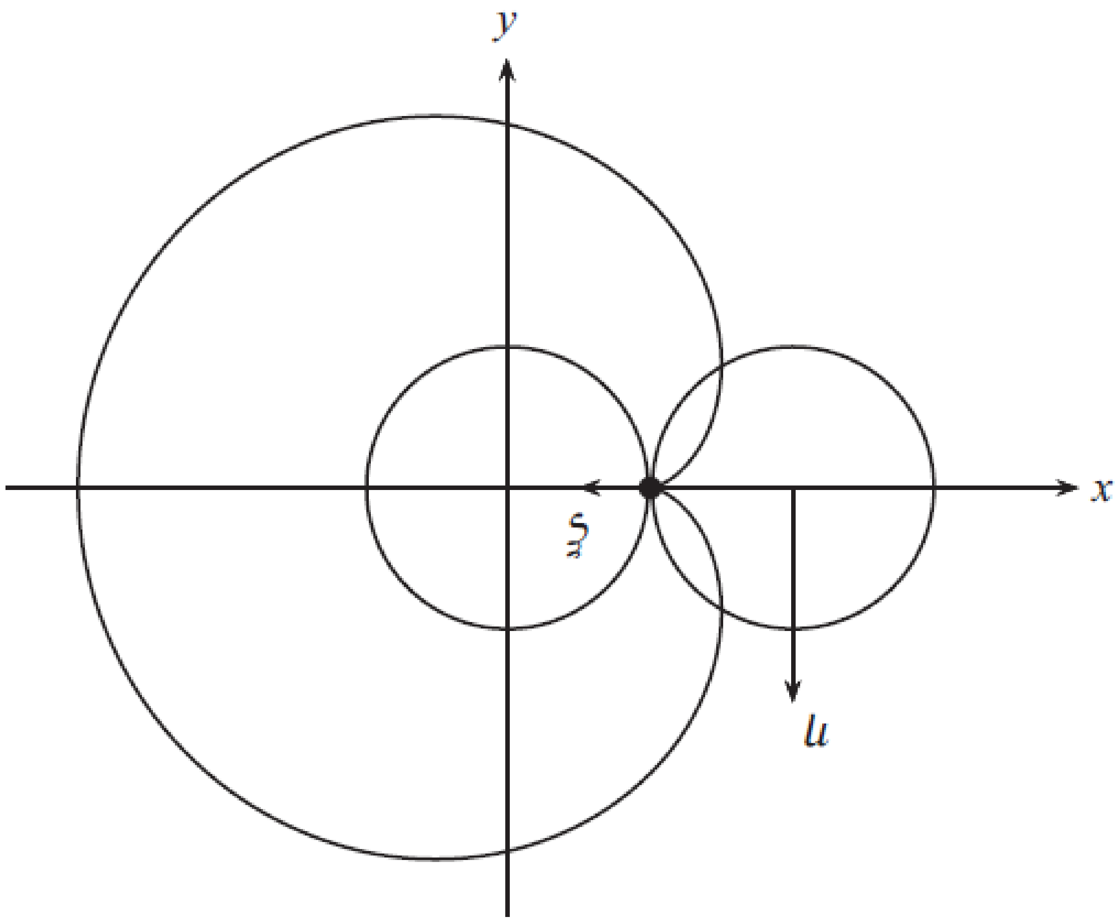
در این حالت که نقطه p روی خم چرخشی C قرار دارد ، خم غلتان R یک برون چرخزاد است.

اگر $a = b$ و $p = (a, ۰)$ باشد آن گاه در این حالت $c_۱ = -a$ و $c_۲ = ۰$ است ؛ که در این صورت ، خم غلتان R یک دل گون [۴] است.

4- cardioid



شکل ۶.۵: تولید یک برون چرخزاد به عنوان خم غلتان



شکل ۵.۷: تولید یک دل گون به عنوان خم غلتان

چون:

$$P = (x(0), y(0)) = (c_1 + (a+b), c_2) = (a, 0)$$

پس نتیجه بالا حاصل می شود.

حال می خواهیم ببینیم که خم غلتان R در این حالت چگونه است ؛ پس x و y به صورت زیر می شود:

$$x = -a\cos\theta + 2a\cos(\frac{\theta}{2})$$

$$y = a\sin\theta - 2a\sin(\frac{\theta}{2})$$

بررسی (x, y) :

$$x^2 + y^2 = 5a^2 - 4a^2\cos\frac{\theta}{2} = a^2(5 - 4\cos\frac{\theta}{2})$$

یا

$$x^2 + y^2 = a^2 + 4a^2(1 - \cos\frac{\theta}{2}) = a^2 + 8a^2\sin\frac{\theta}{4}$$

فصل ۶

بررسی نتایج روش بیوشگِنز

در بخش ۲ در مورد روش بیوشگِنز صحبت کردیم ، که در مورد به دست آوردن اطلاعات در مورد خم سوم است ، اگر دو خم از خم های C و B و R داده شده باشد.

قضیه روش بیوشگِنز شامل رویکرد مقاله [۶] است ، که حالت خاصی را در نظر می گیرد که در این حالت خم غلتان R ، محور x است.

۱.۶ مطالعه خم چرخشی

فرض کنید که خم ثابت B ، $\tilde{z} = \tilde{z}(u)$ است و خم غلتان R ، $z = z(w)$ است ، که u و w پارامترهای حقیقی دلخواه هستند.فرض کنید که θ پارامتر خم غلتان R که در بخش ۲ توصیف شده است ، باشد.حال می خواهیم معادله ی خم چرخشی C را به دست آوریم ؛ حال با استفاده از معادله زیر داریم که:

$$dz = -i(z - \tilde{z})d\theta$$

پس:

$$\frac{dz}{\tilde{z} - z} = id\theta \qquad (۱۵)$$

در انتها می توان نوشت که:

$$Re(\frac{dz}{\tilde{z} - z}) = Re(\frac{dz/dw}{\tilde{z} - z}) = ۰ \qquad (۱۶)$$

که از فرمول (۱۶) برای پیدا کردن رابطه بین u و w به صورت $w = w(u)$ استفاده می شود.

بعد از به دست آوردن رابطه ی $w = w(u)$ از معادله (۱۵) به دست می آید که: $\theta = \theta(u)$

در نهایت از فرمول زیر داریم که:

$$z = \tilde{z} + e^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta})$$

حال فرمول بالا را در $e^{i\theta}$ ضرب می کنیم ، حال داریم که:

$$\tilde{\zeta} = \zeta + e^{-i\theta}(\tilde{z} - z)$$

فرمول به دست آمده همان فرمول خم چرخشی C است که متغیر آن θ است ؛ یعنی: $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(\theta)$

می دانیم که:

$$\begin{cases} arg(z_۱ z_۲) \equiv arg z_۱ + arg z_۲ \quad mod(-\pi, \pi] \\ arg(z_۱/z_۲) \equiv arg z_۱ - arg z_۲ \quad mod(-\pi, \pi] \\ arg(z^n) \equiv n(arg z) \quad , z \neq ۰ \quad mod(-\pi, \pi] \end{cases}$$

یادآوری: آرگومان [1] در اصل زاویه ی شعاع عدد مختلط با جهت مثبت محور حقیقی است. حال اگر $z = x + iy$ باشد ، داریم که:

$$\arg(z) = \begin{cases} arc\tan(y/x) & x > ۰ \\ arc\tan(y/x) + \pi & x > ۰, y \geq ۰ \\ arc\tan(y/x) - \pi & x < ۰, y < ۰ \\ \frac{\pi}{۲} & x = ۰, y > ۰ \\ -\frac{\pi}{۲} & x = ۰, y < ۰ \\ \text{نامشخص} & x = ۰, y = ۰ \end{cases}$$

پس با استفاده از معادله ی (۱۵) و (۱۶) داریم که:

$$\frac{dz}{\tilde{z} - z} = id\theta \longrightarrow \frac{dz/dw}{\tilde{z} - z} = id\theta \longrightarrow \frac{dz/dw}{\tilde{z} - z} = ۰ + id\theta$$

پس $x = ۰$ و $y = d\theta > ۰$ است ؛ پس از جدول بالا داریم که:

$$arg(\frac{dz/dw}{\tilde{z} - z}) = \frac{\pi}{۲}$$

پس:

$$arg(dz/dw) - arg(\tilde{z} - z) \equiv \frac{\pi}{۲} \qquad \mathrm{mod}(-\pi, \pi]$$

در نهایت:

$$arg(dz/dw) - arg(\tilde{z} - z) \equiv \frac{\pi}{۲} \qquad \mathrm{mod}(\pi)$$

1- arg

توجه ۱ :با توجه به این که خم چرخشی C روی خم ثابت B می چرخد ، می توانیم فکر کنیم که خم چرخشی C با طی کردن مسیر چرخش روی نمونه هایی از خودش که به صورت $(\tilde{\zeta} - \zeta)$ گفته می شود ، به طوری که $(\tilde{z} - z)$ بر خم غلتان R عمود است حال این نمونه ها در اصل تابع $w = w(u)$ را تعریف می کند که هر نقطه تماس $\tilde{p}$ از خم ثابت B با تصویر p که از عمود کردن خطی از نقطه ی $\tilde{p}$ بر خم غلتان R به دست می آید.

توجه ۲ : توجه کنید که ممکن است یک خم چرخشی مناسب C برای هر ترکیب از خم ثابت B و خم غلتان R وجود نداشته باشد.این مهم است که معادله (۱۶) یک رابطه ای را بین متغیر های u و w تولید کند ؛ برای مثال در حالتی که $\tilde{z} = u$ و $z = iw$ که $\tilde{z}$ پارامتری شده ی خم ثابت B و z پارامتری شده ی خم غلتان R است که در این حالت برای z و $\tilde{z}$ داریم که:

خم ثابت B در اصل روی محور x است و خم غلتان R در اصل روی محور y است ؛ پس برای هر خم چرخشی C این حالت غیر ممکن است یعنی خم چرخشی C در این حالت وجود ندارد ؛ که معادله ی (۱۶) به $w = ۰$ ساده می شود.

ابتدا مقدار $\dfrac{dz/dw}{\tilde{z} - z}$ را به دست می آوریم.

و در نهایت از فرمول $Re(\dfrac{dz/dw}{\tilde{z} - z}) = ۰$ استفاده می کنیم:

$$z = iw \quad \longrightarrow \quad dz/dw = i$$

$$\tilde{z} - z = u - iw$$

$$\frac{dz/dw}{\tilde{z}-z} = \frac{i}{u-iw} \times \frac{u+iw}{u+iw} = \frac{w+iu}{u^۲+w^۲}$$

$$\frac{dz/dw}{\tilde{z}-z} = \frac{w}{u^۲+w^۲} + i\frac{u}{u^۲+w^۲}$$

پس:

$$Re(\frac{dz/dw}{\tilde{z}-z}) = \frac{w}{u^۲+w^۲} = ۰ \quad \longrightarrow \quad w = ۰$$

یک حالت بد از درون چرخزاد که در آن $a = b$ است در حالتی که در مثال ۴ برای حالت $a \neq b$ ، درون چرخزاد را بیان کردیم.

در مثال بالا دیدیم که $w = ۰$ و رابطه ای بین متغیر های u و w با استفاده از معادله ی (۱۶) به دست نیامد که لازمه حل این گونه سوالات رابطه ی بین u و w است و همچنین در این مدل حالت هندسی را می توان دید که در آن خط های عمود بر خم غلتان R به جز خطی که از مبدأ می گذرد با محور x تقاطع ندارد. در این حالت خم غلتان R محور y است. پس خط های عمود بر خم غلتان R محور x و خطوط موازی با محور x است که در این حالت محور x را در نظر نمی گیریم.

مثال ۵ : فرض کنید که خم ثابت B دایره ی $\tilde{z} = ae^{iu}$ باشد و خم غلتان R خط $z = w$ (محورx) باشد. توجه کنید که دستگاه (u, w) را داریم. حال معادله (۱۶) به صورت زیر است:

$$z = w \quad \longrightarrow \qquad dz/dw = ۱$$
$$\tilde{z} - z = ae^{iu} - w$$

پس:

$$Re(\frac{dz/dw}{\tilde{z} - z}) = Re(\frac{۱}{ae^{iu} - w}) = ۰$$

می دانیم:

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

پس:

$$ae^{iu} - w = (a \cos u - w) + ia \sin u$$

پس:

$$\frac{۱}{ae^{iu} - w} = \frac{۱}{(a \cos u - w) + ia \sin u} \times \frac{(a \cos u - w) - ia \sin u}{(a \cos u - w) - ia \sin u}$$

در نتیجه:

$$\frac{۱}{ae^{iu} - w} = \frac{(a \cos u - w) - ia \sin u}{(a \cos u - w)^۲ + a^۲ \sin^۲ u}$$

پس:

$$Re(\frac{۱}{ae^{iu} - w}) = \frac{(a \cos u - w)}{(a \cos u - w)^۲ + a^۲ \sin^۲ u}$$

در نتیجه داریم که:

$$a\cos u - w = ۰ \quad \longrightarrow \quad a\cos u = w$$

پس می توان یک راه حل فقط برای $|w| \leq a$ پیدا کرد ، چون:

$$-۱ \leq \cos u \leq ۱ \quad \longrightarrow \quad -a \leq a\cos u \leq a$$

بازه ی $[-a, a]$ قطر خم ثابت B که همان دایره است ، می باشد و بزرگ ترین قسمت از محور x که می توان خم غلتان R باشد.چون خم غلتان R در این سوال روی محور x است و باید فقط بازه ای که خم غلتان R است ، روی محور x را به دست آوریم.

با استفاده از معادله ی (۱۵) داریم که:

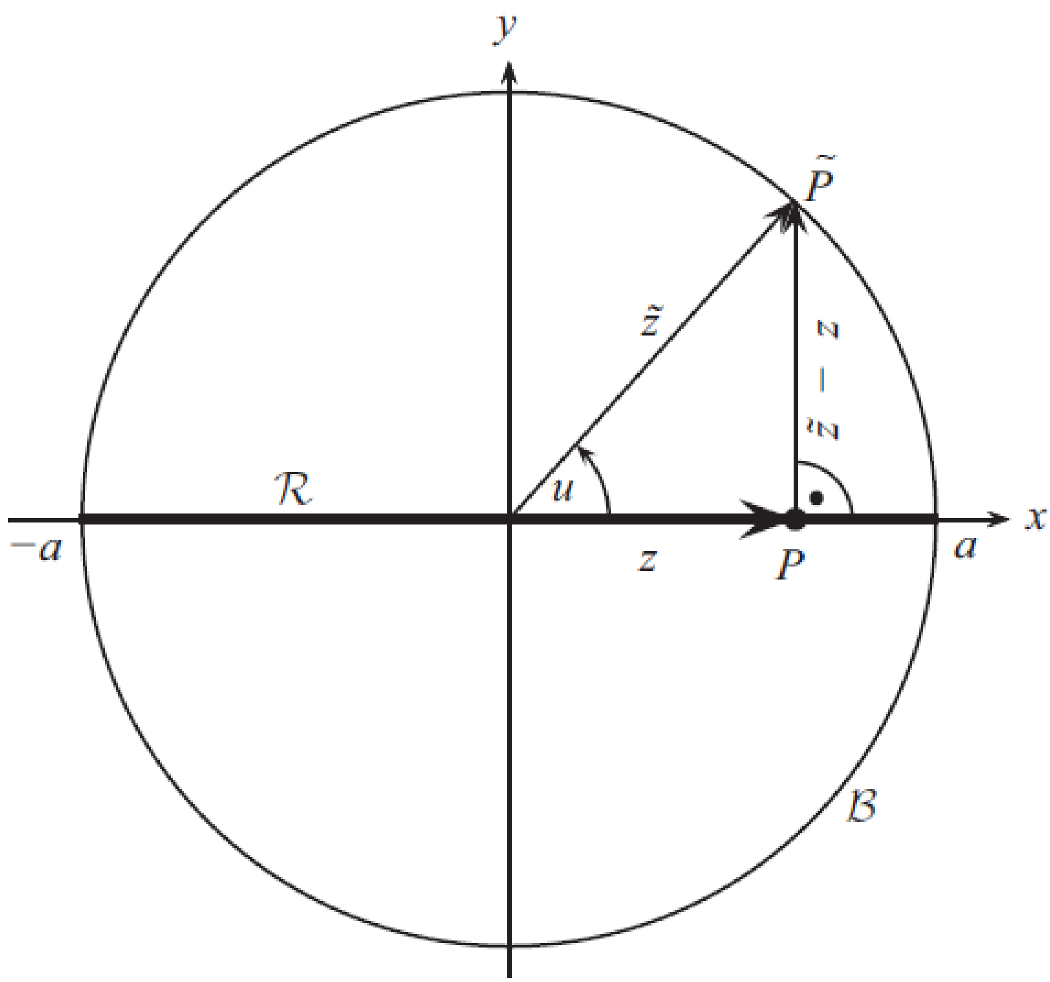
$$\frac{dz}{\tilde{z} - z} = i d\theta$$

از z و θ نسبت به u مشتق می گیریم. توجه کنید که z بر حسب w است که در حل همین سوال w را بر حسب u به دست می آوریم.حال می خواهیم با استفاده از معادله ی (۱۵) رابطه ای را بین θ و u به دست آوریم ، به همین خاطر از معادله ی (۱۵) نسبت به u مشتق می گیریم تا داشته باشیم که: $d\theta/du$ و بتوان $\theta = \theta(u)$ را به دست آورد.

پس:

$$\frac{۱}{\tilde{z} - z} \times \frac{dz}{du} = i\frac{d\theta}{du} \qquad (۱۷)$$

$$z = w = a\cos u \quad \longrightarrow \quad dz/du = -a\sin u$$



شکل ۱.۶: تعبیر هندسی معادله ی ۱۶

$$\frac{-a\sin u}{ae^{iu}-a\cos u}=id\theta/du$$

پس:

$$\frac{-a\sin u}{ia\sin u}=-۱/i=id\theta/du$$

پس:

$$d\theta/du=۱ \quad\longrightarrow\quad d\theta=du$$

حال از عبارت بالا انتگرال می گیریم ، پس داریم که:

$$\int d\theta=\int du \quad\longrightarrow\quad u=\theta-\theta_۱$$

حال خم چرخشی به صورت زیر است:

$$\tilde{\zeta}=\zeta(\tilde{\theta})=\zeta(\theta)+e^{-i\theta}(\tilde{z}-z)$$

می دانیم که:

$$\begin{cases} e^{iu}=\cos u+i\sin u \\ e^{-iu}=\cos u-i\sin u \end{cases}$$

پس:

$$\cos u=\frac{۱}{۲}(e^{iu}+e^{-iu})$$

حال:

$$\tilde{z}-z=ae^{iu}-w=ae^{iu}-a\cos u$$

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}=\zeta+e^{i\theta}(\tilde{z}-z)&=\zeta+ae^{i\theta}(e^{iu}-\cos u)\\ &=\zeta+ae^{i\theta}(e^{iu}-\frac{۱}{۲}e^{iu}-\frac{۱}{۲}e^{-iu})\\ &=\zeta+ae^{i\theta}(\frac{۱}{۲}e^{iu}-\frac{۱}{۲}e^{-iu})\\ &=\zeta+\frac{a}{۲}e^{i\theta}(e^{iu}-e^{-iu})\end{aligned}$$

می دانیم که:

$$u = \theta - \theta_1$$

پس:

$$\begin{aligned}
&= \zeta + \frac{a}{2} e^{i\theta}\left(e^{i(\theta-\theta_1)} - e^{-i(\theta-\theta_1)}\right)\\
&= \zeta + \frac{a}{2} e^{i\theta}\left(e^{i(\theta-\theta_1)} - e^{i(\theta_1-\theta)}\right)\\
&= \zeta + \frac{a}{2}\left(e^{i(2\theta-\theta_1)} - e^{i\theta_1}\right)
\end{aligned}$$

پس خم چرخشی C دایره ای به شعاع $\frac{a}{2}$ است.

توجه : در حالت خاص که خم غلتان R محور x است یعنی $z = w$ و خم ثابت B دارای پارامتری شده ی زیر است:

$$\tilde{z} = \tilde{x}(u) + i\tilde{y}(u)$$

معادله ی (۱۶) به صورت زیر در می آید:

$$z = iw \quad \longrightarrow \quad dz/dw = i$$

$$\tilde{z} - z = \tilde{x}(u) + i\tilde{y}(u) - w = (\tilde{x}(u) - w) + i\tilde{y}(u)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz/dw}{\tilde{z} - z} &= \frac{1}{(\tilde{x}(u) - w) + i\tilde{y}(u)} \times \frac{(\tilde{x}(u) - w) - i\tilde{y}(u)}{(\tilde{x}(u) - w) - i\tilde{y}(u)}\\
&= \frac{(\tilde{x}(u) - w) - i\tilde{y}(u)}{(\tilde{x}(u) - w)^2 + \tilde{y}(u)^2}
\end{aligned}$$

پس:

$$Re\left(\frac{dz/dw}{\tilde{z} - z}\right) = \frac{(\tilde{x}(u) - w)}{(\tilde{x}(u) - w)^2 + \tilde{y}(u)^2} = 0$$

در نتیجه:

$$\tilde{x}(u) = w$$

پس:

$$\tilde{z} - z = (\tilde{x}(u) - w) + i\tilde{y}(u) = i\tilde{y}(u)$$

و معادله ی (۱۷) می شود که:

$$\frac{1}{\tilde{z} - z} \times \frac{dz}{du} = i\frac{d\theta}{du}$$

معادله ی بالا در i ضرب می کنیم:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{-i}{\tilde{z} - z} \times \frac{dz}{du}$$

حال با قرار دادن مقادیر به دست آمده داریم که:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{-1}{\tilde{y}(u)} \times \frac{d\tilde{x}(u)}{du}$$

این فرمول با معادله مشتق پذیر موجود در مقاله [۶] تطابق دارد.

۲.۶ مطالعه خم ثابت

فرض کنید که خم چرخشی C ، $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v)$ است و خم غلتان R ، $z = z(w)$ است ، که v و w پارامترهای حقیقی دلخواه هستند.فرض کنید که θ پارامتر خم غلتان R که در بخش ۲ توصیف شده است ، باشد.حال می خواهیم معادله ی خم ثابت B را به دست آوریم ؛ حال با استفاده از معادله زیر داریم که:

$$dz = -i(z - \tilde{z})d\theta \qquad (*)$$

و می دانیم که:

$$z = \tilde{z} + e^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta}) \qquad (**)$$

با توجه به $(**)$ داریم که:

$$z - \tilde{z} = e^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta})$$

حال نتیجه به دست آمده از $(**)$ را در $(*)$ قرار می دهیم:

$$dz = -i(z - \tilde{z})d\theta = -ie^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta})d\theta$$

یادآوری:

$$\begin{cases} z = x + iy \quad \longrightarrow \quad \overline{z} = x - iy \\ |dz|^{۲} = (dz)(\overline{dz}) \end{cases}$$

پس:

$$dz = -ie^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta})d\theta$$

حال داریم که:

$$\begin{aligned} |dz|^{۲} &= (dz)(\overline{dz}) \\ &= (-ie^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta})d\theta)(ie^{i\theta}\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}d\theta) \\ &= -i^{۲}(\zeta - \tilde{\zeta})\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}(d\theta)^{۲} \end{aligned}$$

در نهایت:

$$|dz|^{۲} = |\zeta - \tilde{\zeta}|^{۲}(d\theta)^{۲}$$

پس:

$$|dz| = \pm|\zeta - \tilde{\zeta}|(d\theta) \qquad (۱۸)$$

و

$$\frac{dz}{\overline{dz}} = \frac{-ie^{-i\theta}(\zeta-\tilde{\zeta})d\theta}{ie^{i\theta}\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}d\theta} = -\frac{(\zeta-\tilde{\zeta})}{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}}e^{-۲i\theta} \qquad (۱۹)$$

حال:

$$Log\frac{dz}{\overline{dz}} = Log\frac{(\zeta-\tilde{\zeta})}{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}}(-e^{-۲i\theta})$$

$$= Log\frac{(\zeta-\tilde{\zeta})}{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}} + Log(-e^{-۲i\theta})$$

$$= Log(\zeta-\tilde{\zeta}) - Log\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})} + Log(-e^{-۲i\theta})$$

حال از عبارت بالا نسبت به e مشتق می گیریم:

$$dLog\frac{dz}{\overline{dz}} = dLog(\zeta-\tilde{\zeta}) - dLog\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})} + dLog(-e^{-۲i\theta})$$

$$= \frac{d(\zeta-\tilde{\zeta})}{\zeta-\tilde{\zeta}} - \frac{d\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}}{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}} + \frac{d(-e^{-۲i\theta})}{-e^{-۲i\theta}}$$

چون ζ یک مقدار ثابت است ، پس: $d\zeta = ۰$ و $d\bar{\zeta} = ۰$

$$= -\frac{d\tilde{\zeta}}{\zeta-\tilde{\zeta}} + \frac{d\bar{\tilde{\zeta}}}{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}} - ۲id\theta$$

با استفاده از معادله (۱۸) و حذف $d\theta$ در معادله بالا داریم که:

$$dLog\frac{dz}{\overline{dz}} + ۲id\theta = -\frac{d\tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} + \frac{d\overline{\tilde{\zeta}}}{\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}}$$

$$d\theta = \pm\frac{|dz|}{|\zeta - \tilde{\zeta}|}$$

$$dLog\frac{dz}{\overline{dz}} \pm ۲i\frac{|dz|}{|\zeta - \tilde{\zeta}|} = -\frac{d\tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} + \frac{d\overline{\tilde{\zeta}}}{\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}} \quad (۲۰)$$

که یک معادله مشتق پذیر است که رابطه ی $w = w(u)$ را تولید می کند چون $z = z(w)$ و $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(v)$ است. حال از معادله ی $(**)$ داریم که:

$$\tilde{z} = z + e^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta})$$

فرمولی برای خم ثابت $\tilde{z} = \tilde{z}(\theta)$ است که رابطه ی $\theta = \theta(w)$ از معادله ی (۱۸) به دست می آید.

مثال ۶ : فرض کنید خم غلتان R خط $z = w$ باشد و خم چرخشی C به صورت $\tilde{\zeta} = ave^{iv}$ که $(a \neq ۰)$ باشد که اسم آن مارپیچ اقلیدسی [۲] است. برای سادگی حالت اولیه ی مارپیچ [۳] را به صورت $\zeta = ۰$ در نظر می گیریم. پس معادله ی (۲۰) می شود:

$$dLog\frac{dz}{\overline{dz}} \pm ۲i\frac{|dz|}{|\zeta - \tilde{\zeta}|} = -\frac{d\tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} + \frac{d\overline{\tilde{\zeta}}}{\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}}$$

$$z = w \longrightarrow \ \overline{z} = w \longrightarrow \ z = \overline{z} \longrightarrow \ dz = d\overline{z}$$

2- archimedean spiral
3- spiral

$$Log\frac{dz}{\overline{dz}} = Log۱ = ۰ \longrightarrow \ \mathrm{dLog}\ \frac{dz}{\overline{dz}} = ۰$$

$$۰ \pm ۲i\frac{|dw|}{|۰ - ave^{iv}|} = -\frac{d(ave^{iv})}{۰ - ave^{iv}} + \frac{d(ave^{-iv})}{۰ - ave^{-iv}}$$

پس:

$$\pm ۲i\frac{dw}{av} = -\frac{-adve^{iv} + avidve^{iv}}{-ave^{iv}}$$

$$+\frac{adve^{-iv} - avidve^{-iv}}{-ave^{-iv}}$$

$$\pm ۲i\frac{dw}{av} = -\frac{(۱ + iv)dv}{v} + \frac{(۱ - iv)dv}{v} = -۲idv$$

$$\pm\frac{dw}{av} = -dv \quad \longrightarrow \quad \pm dw = avdv$$

حال علامت مثبت را در نظر می گیریم و مسئله را بررسی می کنیم:

$$dw = avdv \quad \longrightarrow \quad \int dw = \int avdv$$

پس:

$$w = \frac{av^۲}{۲} + c_۱$$

همانند مثال ۵ که خم غلتان R روی کل محور x قرار ندارد. که به صورت زیر است: $z = w$ و $w \geq c_۱$ حال با استفاده از معادله ی (۱۹) داریم که:

$$\frac{dz}{\overline{\overline{dz}}} = -\frac{(\zeta - \tilde{\zeta})}{\overline{\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}}} e^{-۲i\theta}$$

$$\begin{cases} z = w \longrightarrow dz = dw \\ \overline{z} = w \longrightarrow \overline{dz} = dw \end{cases} \longrightarrow \quad \frac{dz}{\overline{\overline{dz}}} = ۱, \zeta = ۰$$

$$۱ = -\frac{(-ave^{iv})}{-ave^{-iv}} e^{-۲i\theta} \longrightarrow \ -e^{۲iv}\ e^{-۲i\theta} = ۱$$

پس:

$$e^{-۲i\theta} = -e^{-۲iv}$$

داریم که:

$$(e^{-i\theta})^۲ = i^۲(e^{-iv})^۲ \longrightarrow \ e^{-i\theta} = \pm i e^{-iv}$$

حال از معادله ی به دست آوردن خم ثابت B داریم که:

$$\begin{cases} \tilde{z} = z + e^{-i\theta}(\zeta - \tilde{\zeta}) \\ w = \frac{av^۲}{۲} + c_۱ \quad , \quad e^{-i\theta} = \pm i e^{-iv} \end{cases}$$

پس:

$$\tilde{z} = \frac{av^۲}{۲} + c_۱ \pm i e^{-iv}(ave^{iv})$$

که فرمول بالا در اصل یک خانواده برای شکل هندسی، سهمی [۴] است.

4- parabolas

توجه : در این حالت خاص که خم غلتان R خط $z=w$ باشد و خم چرخشی C در فرم قطبی [5] به صورت زیر است:

$$\tilde{\zeta}=r(v)e^{iv}$$

برای سادگی ، حالت اولیه ی را به صورت $\zeta=۰$ در نظر می گیریم. پس معادله ی (۱۹) می شود:

$$\frac{dz}{\overline{dz}}=-\frac{(\zeta-\tilde{\zeta})}{\overline{(\zeta-\tilde{\zeta})}}e^{-۲i\theta}$$

$$\begin{cases} z=w\longrightarrow dz=dw \\ \overline{z}=w\longrightarrow \overline{dz}=dw \end{cases} \longrightarrow \quad \frac{dz}{\overline{dz}}=۱,\zeta=۰$$

$$۱=-\frac{(-ave^{iv})}{-ave^{-iv}}e^{-۲i\theta}\longrightarrow \ -e^{۲iv}\ e^{-۲i\theta}=۱$$

پس:

$$e^{-۲i\theta}=-e^{-۲iv}$$

داریم که:

$$(e^{-i\theta})^{۲}=i^{۲}(e^{-iv})^{۲}\longrightarrow \ e^{-i\theta}=\pm ie^{-iv}$$

پس:

$$Ln(e^{-i\theta})=Ln(\pm ie^{-iv}) \qquad (*)$$

می دانیم که:

$$Lnz=Lnr+i(\theta+۲k\pi)$$

5- polar

$$\cos i\theta = \cosh\theta \quad , \quad \sin\theta = i\sinh\theta$$

ادامه ی حل $(*)$:

$$-i\theta = Ln(\pm i) - iv$$

مقدار $Ln(\pm i)$:

$$Lni = Ln۱ + i(\pi/۲ + ۲k\pi)$$

$$Ln - i = Ln۱ + i(-\pi/۲ + ۲k\pi)$$

پس داریم که:

$$Ln \pm i = Ln۱ + i(\pi/۲ + k\pi) = i(\pi/۲ + k\pi)$$

پس:

$$-i\theta + iv = Ln(\pm i) = i(\pi/۲ + k\pi)$$

$$i(-\theta + v) = i(\pi/۲ + k\pi)$$

$$v - \theta = \pi/۲ + k\pi \longrightarrow v - \theta \equiv \pi/۲ \quad mod(\pi)$$

فرمول (۲۰) می شود:

$$dLog\frac{dz}{\overline{\overline{dz}}} \pm ۲i\frac{|dz|}{|\zeta - \tilde{\zeta}|} = -\frac{d\tilde{\zeta}}{\zeta - \tilde{\zeta}} + \frac{d\overline{\tilde{\zeta}}}{\overline{\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}}}$$

$$\pm ۲i\frac{dw}{r(v)} = -\frac{d\tilde{\zeta}}{-r(v)e^{iv}} + \frac{d\overline{\tilde{\zeta}}}{-r(v)e^{-iv}}$$

$$\tilde{\zeta} = r(v)e^{iv}$$

$$d\tilde{\zeta} = dr(v)e^{iv} + ir(v)dve^{iv}$$

$$\bar{\tilde{\zeta}} = r(v)e^{-iv}$$

$$d\bar{\tilde{\zeta}} = \overline{d\tilde{\zeta}} = dr(v)e^{-iv} - ir(v)dve^{-iv}$$

$$\pm ۲i\frac{dw}{r(v)} = ۲idv$$

$$\frac{dw}{dv} = \pm r(v)$$

این فرمول با معادله ی مشتق پذیر موجود در مقاله ی [۶] مطابقت دارد.

منابع

1..A. Ahmad-Vaziri, Sur quelques Courbes li´ees au Mouvement d'une Courbe plane dans son Plan, Ph.D. dissertation, Univ. de Montpellier, Montpellier, 1938,

http://www.numdam.org/item?id=THESE$_{1}$938$_{205_{10}}$.

2.G. Cardano, Opus novum de proportionibus, Basel, Switzerland, 1570.

3. H. de la Goupilli'ere, ´ Etude g´eom´etrique et dynamique des roulettes planes ou sph´eriques, J. l'Ec. Pol. 15 no. 2 (1911) 1–107.

4. Do Carmo, Manfredo Perdigao: "Differential geometry of curves and surfaces", Prentice-Hall, 1976, Englewood Cliffs, New Jersey.

5. L. M. Hall, Trochoids, roses, and thorns—Beyond the spirograph, College Math. J. 23 (1992) 20–35.

6. L. Hall, S. Wagon, Roads and wheels, Math. Mag. 65 (1992) 283–301.

7. F. Kuczmarski, Roads and wheels, roulettes and pedals, Amer. Math. Monthly 118 (2011) 479–496,
http://dx.doi.org/10.4169/amer.math.monthly.118.06.479.

واژه‌نامه

مارپیچ اقلیدسی .... archimedean spiral
دل گون .... cardioid
مختصات دکارتی .... cartesian coordinate
چرخزاد .... cycloid
مشتق پذیر .... differentiable
زاویه جهت دار .... directed angle
بیضی .... ellipse
برون چرخزاد .... epicycloid
خم ثابت .... fixed curve
درون و برون چرخزاد .... hypo—andepitrochoids
درون چرخزاد .... hypotrochoid
جهت اولیه .... initial orientation
مرکز لحظه ای .... instantaneous center
سهمی .... parabolas
مختصات قطبی .... polar coordinates
خم چرخش پذیر .... rollable curve
خم چرخشی .... rolling curve
خم غلتان .... roulette
بیوشگِنز .... S. S. BJUSHGENS

Abstract

The purpose of this project is to bring to light a nearly forgotten theory of roulettes that was developed more than 100 years ago. It leads to a differential equation which contains the roulette lemma as a special case and uses complex-valued functions to describe curves in a plane. To do so, throughout the paper, we try first to understand the geometric interpretation of the roulette employing the two other curves (namely, the rollable and the fixed curves) each of which being considered in its particular coordinate system with specific properties. Based on these facts, we conclude the report by investigating the geometric properties of the roulette. Finally, given a roulette, we consider the problem of determining the corresponding rollable and fixed curves.

Faculty of Science

School of Mathematics, Statistics and Computer Science

Fundamental Theorem of Rolling Curves

By

Ali Issaei

Supervisor

Dr. Mahdi Khajeh Salehani

Project for Recieving Bachelor Degree

Mathematics and Its Applications

January 2019