پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

توابع همساز بر رویه‌ها

نگارنده

یاسمن جعفرآبادی

استاد راهنما

دکتر مهدی خواجه‌صالحانی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی

در رشته ریاضیات و کاربردها

بهمن ماه ۱۳۹۹

سـال‌ها بعد دانتـه در راونّـا می‌مرد به ناروایی و تنهایی هر کس دیگری.
در رویایی، خداوند آهنگ نهانی زندگانی و کارش را با او در میان نهاد.
دانتـه، به حیرت، سرانجام دریافت که بود و چه بود.
و تلخی زندگانی خویش را مبارک خواند

[دوزخ ۳۲،۱]

به مهدی و طلا

فهرست مطالب

پیشگفتار

انگیزه اولیه انجام این پروژه، آشنایی با هندسه خمینه‌ها و فراهم آوردن مقدماتی برای ورود به هندسه ریمانی بود. به این ترتیب با پیشنهاد استاد راهنما، هدف اصلی پایان‌نامه کارشناسی، پیشروی در متن [1] قرار داده شد تا با توجه به فرصت محدود و نیاز به مطالعه پیش‌نیاز هایی ناموجود در سرفصل دروس کارشناسی، ماحصل این پایان‌نامه، علاوه بر فراهم آمدن ابزاری برای ورود به هندسه خمینه‌ها و تحقق انگیزه‌های اولیه دانشجو، استفاده از این ابزار جهت مطالعه نتایجی در رابطه با توابع هارمونیک بر رویه‌های ریمانی باشد. معادل انگلیسی کلماتی که با * مشخص شده‌اند در واژه‌نامه آمده است.

چکیده

تابع $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ را تابعی همساز گوییم هرگاه Ω زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^2$ بوده و بعلاوه با تعریف

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

برای هر نقطه از Ω داشته باشیم $\Delta u = 0$. به علاوه u را یک تابع زیرهمساز گوییم هرگاه $\Delta u \geq 0$. معادله دیفرانسیل فوق، به معادله لاپلاس معروف است. طبق صورت کلاسیک قضیه ی لیوویل در $\mathbb{R}^2$، هر تابع کراندار همساز تابعی ثابت است. همچنین صورت قوی‌تر این قضیه عنوان می‌کند که اگر u تابعی زیرهمساز روی $\mathbb{R}^2$ باشد، u تابعی ثابت است. از این خاصیت به عنوان خاصیت سهموی صفحه یاد می‌شود.

در خمینه های ریمانی به عنوان فضاهایی که دارای ساختارهای دیفرانسیلی و ضرب داخلی هستند، معادلات لاپلاس قابل تعریف و در نتیجه مفاهیمی چون توابع همساز یا زیرهمساز به طور طبیعی قابل تعمیم هستند. در نتیجه درستی قضیه لیوویل و خاصیت بیضوی بر روی این خمینه‌ها نیز به صورت طبیعی قابل بررسی است.

در این پروژه، علاوه بر مطالعه پیش‌نیازهایی در هندسه دیفرانسیل، توابع همساز و متریک ریمانی و حالت کلاسیک قضایای لیوویل به مطالعه و بررسی خواص لیوویل و قضیه شکاف بر روی صفحه با متریک ریمانی می‌پردازیم و درستی این نتایج را بر رویه هایی بررسی می‌کنیم که مختصات قطبی در آنها قابل تعریف است. به علاوه به بررسی برخی خواص لیوویل عملگر لاپلاس روی $\mathbb{R}^2$ با متریک

به ... $g = dr^2 + f^2(r,\theta)d\theta^2$ می‌پردازیم که در آن $f : (0,\infty) \times [0,2\pi] \to (0,\infty)$ تابعی هموار است به طوری که

$$\begin{cases} f(r,0) = f(r,2\pi) \\ \lim_{r\to 0^+} f(r,\theta) = 0 \\ \lim_{r\to 0^+} f'(r,\theta) = 1 \end{cases}$$

و $f'(r,\theta) \equiv \frac{\partial f(r,\theta)}{\partial r}$. ابتدا تابع $z : (a,\infty) \to (0,\infty)$ را به عنوان به عنوان تابعی از ردهٔ C^2 در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $h(r) = \int_\alpha^r \frac{1}{z(s)} ds$ به گونه‌ای باشد که خمیدگی گاوسی برای r های به قدر کافی بزرگ در نامساوی $K_g \geq -\frac{z''}{z}(r)$ صدق کند. اگر u تابع زیرهمساز دل‌خواهی باشد و $M(u;r) = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |u(r,\theta)|$ و بعلاوه داشته باشیم :

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M(u;r)}{h(r)} = 0$$

آن‌گاه به کمک قضیه مقایسه و اصل ماکسیمم نشان می‌دهیم u بایستی تابعی ثابت باشد. در پایان، به شرط اینکه $K_g \geq 0$ و u تابعی همساز بوده و برای هر $\delta > 0$ داشته باشیم

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M(u;r)}{r^{1+\delta}} = 0$$

. با استفاده از تخمین گرادیان یائو و اصل ماکسیمم، نشان می‌دهیم برای هر عدد ثابت مانند C داریم $|u(r,\theta)| \leq Cr$.

فصل ۱
مقدماتی بر هندسه خمینه‌ها

۱.۱ فضاهای اقلیدسی

هدف اصلی این متن معرفی یک متریک ریمانی روی فضای $\mathbb{R}^2$، تعریف رویه‌های ریمانی و بررسی برخی از خواص توابع همساز روی این رویه‌ها از جمله قضیه شکاف است که در فصل دوم، اثبات می‌شود. اما پیش از پرداختن به این هدف، برخی از مفاهیم و قضایایی را که از هندسه دیفرانسیل در فصل دوم مورد استفاده قرار خواهند گرفت، مرور می‌کنیم. تعدادی از قضایای این بخش و بخش بعدی، بدون اثبات ذکر شده‌اند برهان تمامی این قضایا در [4] و [6] آمده است.

در ابتدا لازم است تا برخی تعاریف، از جمله میدان‌های برداری و یک–فرم‌های دیفرانسیل را روی فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یاد آوری کنیم. لازم به ذکر است که تمامی این مفاهیم در حالت کلی به خمینه‌های هموار نیز قابل تعمیم هستند که در ادامه به برخی از آن‌ها نیز اشاره خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱ اگر k یک عدد صحیح و نامنفی باشد، گوییم تابع حقیقی مقدار $f : U \to \mathbb{R}$ از کلاس توابع C^k در U است اگر تمام مشتقات پاره‌ای*

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_j}}$$

به ازای تمام مرتبه‌های $j \leq k$ در هر نقطه $p \in U$ موجود و پیوسته باشند. و می‌نویسیم $f^k(U)$ به علاوه f را یک تابع C^∞ گوییم هرگاه به ازای هر k، f از کلاس C^k باشد.

در حسابان برداری* ما فضای مماس* $T_p\mathbb{R}^n$ در نقطه p را، مجموعه بردارهایی در $\mathbb{R}^n$ که از نقطه p آغاز می‌شوند، معرفی می‌کنیم. به علاوه اگر v یک بردار مماس در نقطه p باشد، و f یک تابع C^∞ روی $\mathbb{R}^n$ باشد. مشتق f در جهت v به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$D_v f = \lim_{t \to 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t))$$

که در آن $c(t) = \left(p^1 + tv^1, \ldots, p^n + tv^n\right)$ خط گذرا از نقطه $p = \left(p^1, \ldots, p^n\right)$ در جهت $v = \left\langle v^1, \ldots, v^n \right\rangle$ در $\mathbb{R}^n$ است. به‌علاوه طبق قاعده زنجیری داریم

$$D_v f = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

در حالت کلی هر نگاشت خطی $D : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ را که در قاعده لایبنیتز*، یعنی

$$D(fg) = (Df)\, g(p) + f(p) Dg$$

صدق کند را یک مشتق نقطه‌ای در p می‌نامیم. طبق این تعریف هر مشتق جهتی در p یک مشتق نقطه‌ای در p است. لذا اگر فضای برداری تمام مشتقات نقطه‌ای در p را با $\mathcal{D}_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ نمایش دهیم، یک نگاشت مانند ϕ موجود است به طوری‌که

$$\begin{aligned} \phi : T_p\left(\mathbb{R}^n\right) &\to \mathcal{D}_p\left(\mathbb{R}^n\right) \\ v &\mapsto D_v = \sum v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \end{aligned}$$

قضیه ۱.۱ نگاشت $\phi : T_p\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathcal{D}_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ با تعریف بالا یک ایزومورفیسم* فضاهای برداری است.

در نتیجه این گزاره، ما می‌توانیم فضای مماس $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ را تحت ایزومورفیسم $T_p\left(\mathbb{R}^n\right) \simeq \mathcal{D}_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ با فضای مشتقات نقطه‌ای در نقطه p یکی در نظر بگیریم. به علاوه پایه‌های این فضای برداری، همان مشتقات پاره‌ای خواهند بود.

تعریف ۲.۱ یک میدان برداری* X روی زیر مجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ یک نگاشت روی U است به طوری‌که به هر نقطه p یک بردار مماس در فضای مماس $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ نسبت می‌دهد.

یا به عبارتی با توجه به بحث فوق می‌توانیم هر میدان برداری روی U را با یک ماتریس ستونی به شکل زیر متناظر در نظر بگیریم.

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

تعریف ۳.۱ اگر X یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^n$ باشد، به ازای هر تابع هموار f روی $\mathbb{R}^n$ نگاشت Xf را برای هر $p \in U$ تعریف می‌کنیم:

$$(Xf)(p) = X_p f$$

تعریف ۴.۱ فضای کتانژانت* $\mathbb{R}^n$ را در نقطه p به صورت دوگان* فضای برداری فضای مماس در نقطه p، یعنی $\left(T_p\mathbb{R}^n\right)^\vee$ تعریف می‌کنیم و آن را با $T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ نمایش می‌دهیم.

به موازات تعریف یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^n$ یک ۱-فرم دیفرانسیل* روی $\mathbb{R}^n$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۱ یک ۱-فرم دیفرانسیل روی زیر مجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ یک نگاشت

مانند ω است که به هر نقطه p یک هم‌بردار* از فضای $T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ را نسبت می‌دهد.

$$\omega : U \to \bigcup_{p\in U} T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$$
$$p \mapsto \omega_p \in T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right).$$

به ازای هر تابع C^∞ مانند $f : U \to \mathbb{R}$ یک ۱-فرم دیفرانسیل df روی U به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد.

$$(df)_p\left(X_p\right) = X_p f$$

به df دیفرانسیل f می‌گوییم.

گزاره ۱.۱ اگر $x^1,\ldots,x^n$ مختصات استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ باشد در این صورت در هر نقطه $p\in\mathbb{R}^n$ مجموعه $\left\{\left(dx^1\right)_p,\ldots,\left(dx^n\right)_p\right\}$ تشکیل یک پایه برای $T_p^*\left(\mathbb{R}^n\right)$ می‌دهد که این پایه دوگان* پایه $\left\{\partial/\left.\partial x^1\right|_p,\ldots,\partial/\left.\partial x^n\right|_p\right\}$ برای $T_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ است.

گزاره ۲.۱ اگر $f : U \to \mathbb{R}$ یک تابع C^∞ روی زیر مجموعه باز U از $\mathbb{R}^n$ باشد، داریم:

$$df = \sum \tfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

گزاره ۱.۱ علاوه بر اینکه به ما می‌گوید که می‌توانیم هر عضو فضای مماس R^n را به صورت ترکیب خطی از مشتقات پاره‌ای بنویسیم؛ یک تعمیم برای مفهوم فضای مماس به هر خمینه هموار را پیشنهاد می‌کند که در بخش بعدی آن را به طور دقیق‌تر تعریف خواهیم کرد.

۲.۱ خمینه‌های هموار

در این بخش تلاش می‌کنیم تا به طور مختصر برخی مفاهیم هندسه خمینه‌ها* و هندسه ریمانی* مقدماتی را که در فصل آینده برای اثبات قضیه شکاف مورد

استفاده ما قرار می‌گیرند، معرفی کنیم. و به علاوه تعمیمی از مفاهیمی که در بخش گذشته مطرح شد ارائه دهیم.
در حالت کلی و به طور شهودی یک خمینه هموار یک فضای توپولوژیک* است که به طور موضعی* به یک فضای اقلیدسی شباهت دارد. منظور ما البته از این شباهت، وجود نگاشت‌های دیفئومورفیسم* $\phi_p : U_p \to \mathbb{R}^n$ به ازای هر $p \in M$ است. که U_p یک همسایگی باز حول نقطه p باشد. به هر زوج مرتب (U_p, ϕ_p) یک چارت* روی M گفته می‌شود.

تعریف ۶.۱ یک مشتق نقطه‌ای در نقطه $p \in M$ یک نگاشت خطی مثل D از M به $\mathbb{R}$ است که در رابطه لایبنیز یعنی $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg$. صدق می‌کند .

تعریف ۷.۱ برای هر نقطه p فضای مماس TpM را برابر فضای تمام مشتقات نقطه‌ای روی M تعریف می‌کنیم.

اگر $(x^1, ..., x^n)$ یک مختصات موضعی حول p روی M باشد، می‌توان نشان داد که مجموعه $\{\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n\}$ تشکیل یک پایه برای فضای مماس T_pM می‌دهد.

تعریف ۸.۱ یک فضای ضرب داخلی*، فضای برداری مثل V روی یک میدان $\mathbb{R}$ است به همراه یک عمل ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ که به آن ضرب داخلی گفته می‌شود و دارای خواص زیر است:

۱. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
۲. $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$
۳. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
٤. $\langle v, v \rangle \geq 0$ که تساوی تنها در حالتی برقرار است که $v = 0$.

در هندسه دیفرانسیل، یک خمینه ریمانی را به صورت یک زوج مرتب (M, g) متشکل از یک خمینه هموار M و یک ضرب داخلی g روی فضای مماس T_pM در

هر نقطه p از خمینه M تعریف می‌کنیم یعنی $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. که با توجه به این ضرب داخلی، یک تابع نرم* $|\cdot|_p : T_pM \to \mathbb{R}$ روی هر T_pM به صورت $|v|_p = \sqrt{g_p(v,v)}$ تعریف می‌شود. که به متریک تعریف شده توسط این نرم روی فضاهای مماس، متریک ریمانی* گفته می‌شود.

تعریف ۹.۱ اجتماع مجزای فضاهای مماس T_pM را کلاف مماس* M می‌نامیم.

$$TM := \coprod_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$$

تعریف ۱۰.۱ برای هر $p \in M$ فضای خطی T_p^*M را دوگان برداری T_pM در نظر می‌گیریم و به آن فضای کتانژانت می‌گوییم همچنین به طور موازی، اجتماع مجزای فضاهای مماس T_p^*M را کلاف کتانژانت* می‌نامیم.

حال می‌توانیم تعمیم مفاهیم میدان‌های برداری و ۱-فرم های دیفرانسیل را به هر خمینه هموار M ذکر کنیم.

تعریف ۱۱.۱ اگر M یک خمینه هموار باشد، یک میدان برداری روی M یک نگاشت هموار مثل $X : M \to TM$ است که به هر نقطه $p \in M$ یک بردار مماس در T_pM نسبت می‌دهد.

تعریف ۱۲.۱ برای خمینه هموار M مفهوم ۱-فرم دیفراسیل، به شکل دوگان مفهوم میدان برداری تعریف می‌شود. یعنی هر ۱-فرم دیفرانسیل، نگاشتی هموار مثل $\omega : M \to T^*M$ می‌باشد که به هر نقطه $p \in M$ یک هم‌بردار در T_P^*M نسبت می‌دهد.

با تعاریف فوق هر نگاشت دیفرانسیل df یک ۱-فرم دیفرانسیل روی M است و برای هر مختصات موضعی $x^1, \dots, x^n$ ، هر نگاشت $\partial/\partial x^i$ یک میدان برداری روی M می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱ یک برش هموار* روی کلاف مماس TM (کلاف مماس T^*M) یک نگاشت هموار مثل $s : M \to TM$ ($s : M \to T^*M$) است که برای هر p داریم $s_p \in T_pM$ ($s_p \in T_p^*M$).

تعریف ۱۴.۱ یک قاب هموار* روی کلاف $TM \to M$ ($T^*M \to M$) گردایه‌ای از برش‌های هموار $S^1, \dots, S^r$ روی TM (T^*M) است، به طوری که در هر نقطه p ، مجموعه $s_p^1, \dots, s_p^n$ تشکیل یک پایه برای فضای مماس T_pM (T_p^*M) بدهد.

تعریف ۱۵.۱ برای هر $f : M \to \mathbb{R}$ دیفرانسیل f را به شکل $df : M \to T^*M$ تعریف می‌کنیم.
می‌توان نشان داد که در هر چارت مختصاتی، با مختصات $\{x^1, \dots, x^n\}$ داریم

$$df_p := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i \Big|_p$$

$$df_p(v) := vf \quad \forall v \in T_pM .$$

حال می‌توانیم به تعریف اتصال* روی یک خمینه ریمانی بپردازیم. اگر (M, g) یک خمینه ریمانی باشد، و X و Y میدان‌هایی برداری روی M باشند، یک اتصال آفین* ∇ یک نگاشت روی کلاف مماس M یعنی TM است.

تعریف ۱۶.۱ اگر $\mathfrak{X}(M)$ مجموعه تمام میدان‌های برداری هموار روی M اتصال آفین را به شکل

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

تعریف می‌کنیم به طوری‌که ∇ دارای خواص زیر باشد

۱- $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

۲- $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$

۳- $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

به $\nabla_X Y$ مشتق کوواریانت* Y نسبت به X می‌گوییم.به علاوه منظور ما از Xf در هر نقطه به ازای میدان برداری X و تابع هموار f ،

$$Xf(p) := D_{X_p}\big|_p f$$

است.

به طور مثال اگر R^n را با متریک اقلیدسی، یک خمینه ریمانی فرض کنیم، و تعریف کنیم

$$\left(\nabla_Y X\right)_p = \lim_{h\to 0} \frac{Y_{p+hX_p} - Y_p}{h} \quad \forall p \in \mathcal{M}$$

مشتق جهتی عادی، یک مشتق کوواریانت است.

برای هر منیفلد ریمانی (M, g) یک اتصال یکتا وجود دارد که دارای دو خاصیت زیر است.

۱- تقارنی*؛ $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

۲- سازگار با متریک*؛ $Z\langle X, Y\rangle_g = \left\langle \nabla_Z X, Y\right\rangle_g + \left\langle X, \nabla_Z Y\right\rangle_g$

که به این اتصال، اتصال لوی‌چیویتا* گفته می‌شود.

در این تعریف منظور ما از $[\cdot,\cdot]$ براکت لی* است که به شکل

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

برای هر $f \in C^\infty$ روی M تعریف می‌شود. در واقع براکت لی یک عمل ضرب لی روی فضای برداری میدان‌های برداری است.

تعریف ۱.۱۷ اگر (M, g) یک خمینه ریمانی به همراه اتصال لوی‌چیویتا ∇ باشد، برای تابع حقیقی $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ و میدان‌های برداری X و Y هسین* ریمانی f را به صورت یک میدان *۲-تنسور تعریف می‌کنیم. یعنی

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) := X(Yf) - (\nabla_X Y)\, f = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y\rangle$$

یک روش دیگر برای تعریف هسین ریمانی به شکل یک تابع خطی $T_pM \to T_pM$ در هر نقطه p از M است. که در آن

$$\mathrm{Hess}_v\, f = \nabla_v \,\mathrm{grad}\, f.$$

برای هر $p \in M$ و $v \in T_pM$.

همچنین اگر (E_i) یک قاب *موضعی روی کلاف مماس TM باشد در این صورت می‌توانیم هر میدان برداری $\nabla_{E_i} E_j$ را بر حسب اعضای این قاب باز کنیم (قاب‌های هموار میدان‌های برداری هستند که در هر نقطه برای فضای مماس تشکیل یک پایه می‌دهند) . یعنی

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$$

به توابع هموار $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$. ضرایب کریستوفل* ∇ گفته می‌شود. طبق این تعریف، برای هر مختصات موضعی $\phi = (x_1, ..., x_n)$ روی M هسین ریمانی بر حسب ضرایب کریستوفل به شکل

$$\mathrm{Hess}\, f = f_{;i,j} dx^i \otimes dx^j := \left(\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i \otimes dx^j$$

نیز تعریف می‌شود.

فصل ۲

قضیه شکاف برای رویه‌هایی با خمیدگی گاوسی ناصفر

۱.۲ متریک ریمانی روی $\mathbb{R}^2$

با استفاده از مطالب گفته شده در فصل اول، در این بخش توجه خود را به فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ و رویه‌های ریمانی معطوف می‌کنیم و سپس در بخش‌های آینده نتایج مورد نظر را در رابطه با توابع همساز روی این رویه‌ها مطرح خواهیم کرد.

فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ را به همراه مختصات قطبی* (r, θ) در نظر بگیرید. خانواده‌هایی از ضرب های داخلی $g = dr^2 + (f(r,\theta))^2 d\theta^2$ را روی $\mathbb{R}^2$ معرفی می‌کنیم به طوری‌که در آن $f : (0,\infty) \times [0, 2\pi] \longrightarrow (0,\infty)$ تابعی هموار باشد که دارای خواص زیر است:

۱- $f(r,0) = f(r,2\pi)$

۲- $\lim_{r\to 0^+} f(r,\theta) = 0$

۳- $\lim_{r\to 0^+} f'(r,\theta) = 1$

به علاوه در اینجا منظور ما از f' دیفرانسیل f نسبت به r است.

با توجه به تعاریف بخش قبلی، اگر پایه‌های $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ را برای فضای مماس $T_p\mathbb{R}^2$ در نظر بگیریم و آن‌ها را به ترتیب با i و j نمایش بدهیم. با توجه به اینکه در مختصات قطبی داریم $x = rcos\theta$ و $y = rsin\theta$ و با استفاده از قاعده زنجیری* مشتق خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

از طرفی اگر قرار دهیم:

$$\mathbf{v_j} = a_j\frac{\partial}{\partial r} + b_j\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad j = 1, 2$$

که v_1 و v_2 اعضای $T_p\mathbb{R}^2$ هستند، در این صورت در هر نقطه p از $\mathbb{R}^2$ خواهیم داشت

$$(d\theta)_p(v_i) = b_i \text{ ، } (dr)_p(v_i) = a_i$$

در نتیجه در هر نقطه از $\mathbb{R}^2$ ضرب داخلی g_p با تعریف بالا به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g_p(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = a_1a_2 + b_1b_2(f(r,\theta))^2$$

با توجه به تعریف فوق اگر قرار دهیم $f(r,\theta) = r$ در این صورت ضرب داخلی g_p در هر نقطه همان ضرب داخلی $\mathbb{R}^2$ تحت ایزومورفیسم کانونی* فضاهای برداری R^2 و $T_p\mathbb{R}^2$ خواهد بود.

در این صورت فضای برداری R^2 را به کمک یک ضرب داخلی g_p به یک خمینه ریمانی تبدیل کردیم.

می‌توان گفت که یک رویه ریمانی* یک خمینه ریمانی دو بعدی است. به علاوه یک خاصیت ذاتی* مهم رویه‌های ریمانی با متریک ریمانی g که در بالا تعریف شده است؛ این است که خمیدگی گاوسی* آنها به طریق زیر محاسبه می‌شود

$$K_g(r,\theta) = -\frac{f''(r,\theta)}{f(r,\theta)}$$

۲.۲ توابع همساز روی رویه‌ها

تعریف ۱.۲ برای تابع هموار $u : M \to \mathbb{R}$ روی رویه ریمانی (M, g) گرادیان* u میدان برداری ∇ روی M است به طوریکه داشته باشیم

$$g(\nabla u, X) = \partial_X u$$

به این معنا که در هر نقطه p داشته باشیم

$$g_p\big((\nabla u)_p, X_p\big) = (\partial_X u)\,(p)$$

در بحث ما، میدان گرادیان روی $\mathbb{R}^2$ با ضرب داخلی تعریف شده در بخش قبل به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$\nabla_g u = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

در حالت کلی عملگر لاپلاس* روی فضاهای اقلیدسی توسط دیورژانس* گرادیان یک تابع هموار تعریف می‌شود. که توسط ∇^2 نمایش داده می‌شود. در مختصات دکارتی عملگر لاپلاس به صورت جمع مشتقات جزئی مرتبه دوم نسبت به هر نگاشت مختصاتی محاسبه می‌شود. این مفهوم به خمینه‌های ریمانی نیز قابل تعمیم است که بررسی آن از اهداف ما نیست. در بحث ما، عملگر لاپلاس روی $(\mathbb{R}^2, g)$ را به صورت زیر نسبت به مختصات قطبی تعریف می‌کنیم.

$$\nabla_g^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{f^3}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

گزاره زیر ابزاری به ما می‌دهد تا بتوانیم جمله $h_g := \frac{f'}{f_s}$ ظاهر شده در تعریف عملگر لاپلاس را تخمین بزنیم.

گزاره ۱.۲ اگر $f : [a, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ یک تابع C^2 باشد، اگر داشته باشیم $\frac{f''}{f}(r) \leq \frac{h''}{h}(r), r > a$ و همچنین $\frac{f'}{f}(a) \leq \frac{h'}{h}(a)$، آنگاه برای هر $r > a$ خواهیم داشت:

$$\frac{f'}{f}(r) \leq \frac{h'}{h}(r).$$

تعریف ۲.۲ تابع $u: M \to \mathbb{R}$ از کلاس C^2 را تابعی همساز گوییم اگر داشته باشیم $\nabla_g^2 u = 0$

به علاوه تابع u زیرهمساز* است اگر $\nabla_g^2 \geq 0$ و فوق‌همساز* است اگر $\nabla_g^2 \leq 0$.

تعریف ۳.۲ زیر مجموعه باز Ω از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را یک دامنه روی $\mathbb{R}^n$ گوییم هرگاه همبند باشد.

در ادامه نشان می‌دهیم که تابع غیر ثابت همساز u ماکسیمم و مینیمم درونی* ندارد. به این منظور قضیه ۲.۱ را ثابت می‌کنیم که برهان آن در [3] آمده است.

گزاره ۲.۲ اگر داشته باشیم $\nabla_g^2 u \geq 0 (\leq 0)$ روی دامنه Ω آنگاه نقطه‌ای مانند $y \in \Omega$ وجود دارد به طوری‌که $u(y) = \sup_\Omega u \, (\inf_\Omega u)$.

گزاره ۳.۲ اگر داشته باشیم $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ به طوریکه $\nabla_g^2 u \geq 0 (\leq 0)$ در Ω در این صورت اگر Ω کراندار باشد خواهیم داشت

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \, (\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u) \, .$$

در نتیجه برای u همساز داریم:

$$\inf_{\partial\Omega} u \leqslant u(x) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u, \qquad x \in \Omega$$

تعریف ۴.۲ اگر ϕ نگاشتی بین بین فضای توابع $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ باشد و $f \in \mathcal{F}_2$ به طوری که f تصویر u تحت ϕ است. در این صورت یک عملگر دیفرانسیلی یک ترکیب خطی به فرم $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ است که در آن $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ یک مجموعه مرتب اندیس است و $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ همچنین $\alpha_\alpha(x)$ ها توابعی روی یک دامنه Ω از فضای اقلیدسی هستند. همچنین $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$ که D_j ها میدانهای برداری $\frac{\partial}{\partial x_j}$ روی $\mathbb{R}^n$ هستند که در هر نقطه تشکیل یک پایه برای فضای مماس $T_p\mathbb{R}^n$ می‌دهند.

حال عملگر دیفرانسیلی*

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji}$$

را روی توابع $C^2(\Omega)$ نظر می‌گیریم که در آن Ω دامنه‌ای در R^n است و همچنین $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$.

تعریف ۵.۲ گوییم عملگر دیفرانسیلی خطی L بیضوی* است هرگاه ماتریس $\left[a^{ij}(x)\right]$ یک ماتریس مثبت باشد. به این معنا که اگر $\lambda(x)$ و $\Lambda(x)$ به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار ویژه ی ماتریس $\left[a^{ij}(x)\right]$ به ازای هر $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ باشند، داشته باشیم

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda(x)|\xi|^2$$

همچنین اگر Λ/λ روی Ω کراندار باشد، L را به طور یکنواخت بیضوی می‌گوییم. توجه کنید که طبق تعاریف فوق، عملگر لاپلاس یک عملگر دیفرانسیلی بیضوی است. و اگر L همان عملگر لاپلاس باشد، شرط $Lu = 0(\leq 0, \geq 0)$ همان شرط همساز (زیر همساز یا فوق همساز) بودن است.

قضیه ۱.۲ اگر L با تعریف فوق یک عملگر بیضوی باشد که در آن $c = 0$ و $Lu \geqslant 0(\leqslant 0)$ در دامنه Ω برای یک تابع C^2 مانند u؛ آنگاه اگر u ماکسیمم (مینیمم) خود را درون Ω اختیار کند، u ثابت است. و اگر $c \leq 0$ و c/λ کراندار باشد، در این صورت u نمیتواند مقدار ماکسیمم نامنفی (مینیمم نامثبت) درون Ω داشته باشد، مگر آنکه ثابت باشد.

نتیجه ۱.۲ اگر Ω یک دامنه کراندار در $\mathbb{R}^2$ باشد و $\mathbb{R}^2$ مجهز به ضرب داخلی g و متریک ریمانی القا شده توسط آن باشد، در این صورت اگر $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ عضو $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ باشد:

۱- اگر $\nabla_g^2 u \geq 0$ و u درون Ω دارای مینیمم باشد، u ثابت است.

۲- اگر $\nabla_g^2 u \geq 0(\geq 0)$ و u درون Ω دارای ماکسیمم باشد u ثابت است.

۳.۲ توابع همساز کراندار

پیش از بیان نتیجه اصلی این بخش در رابطه با ثابت بودن توابع همساز کراندار، $M(v;r)$ را برای یک تابع هموار v روی یک رویه ریمانی به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M(v;r) = \sup_{\theta\in[0,2\pi)} |v(r,\theta)|.$$

حال می‌توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم

قضیه ۲.۲ اگر $g = dr^2 + f(r,\theta)^2 d\theta^2$ یک متریک روی $\mathbb{R}^2$ باشد و $z : (a,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ تابعی C^2 باشد به طوری‌که داشته باشیم

۱- $\lim_{r\to a^+} z(r) = 0,$

۲- $\lim_{r\to a^+} z'(r) > 0$

در این صورت اگر برای r های به قدر کافی بزرگ داشته باشیم

$$K_g(r,\theta) \geq -\frac{z''}{z}(r)$$

آنگاه هر تابع زیرهمسازی که در شرط

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M(u;r)}{h(r)} = 0$$

صدق کند، ثابت است.

برهان. ابتدا در نظر بگیرید که اگر $z : (a,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ یک نگاشت C^2 باشد، می‌توانیم با محاسبات مستقیم نشان دهیم که اگر $\alpha > a$ آنگاه برای تابع

$$h(r) = \int_\alpha^r \frac{1}{z(\sigma)} d\sigma$$

داریم

$$\frac{d^2h}{dr^2} + \frac{z'(r)}{z(r)}\frac{dh}{dr} = 0.$$

یا به عبارتی طبق تعریف تابع همساز و ضرب داخلی h نسبت به متریک

$$g_0 = dr^2 + z(r)^2 d\theta^2$$،

تابعی همساز است. به علاوه توجه کنید که z روی متمم گوی باز به شعاع $a \geq 0$ تعریف شده است. حال از آنجا که طبق فرض z داریم $\lim_{r\to a^+} z(r) = 0$ و $\lim_{r\to a^+} z'(r) > 0$، در این صورت اگر $g = dr^2 + (f(r,\theta))^2 d\theta^2$ یک متریک روی $\mathbb{R}^2$ باشد، به طوری که $K_g(r,\theta) \geq -\frac{z''}{z}(r)$ آنگاه $\nabla_g^2 h \leq 0$.

در واقع با توجه به شروطی که برای z در نظر گرفتیم داریم $\lim_{r\to a^+} \frac{z'}{z}(r) = \infty$ پس در نتیجه برای a_0 های به قدر کافی نزدیک به a می‌توان گفت $\frac{f'}{f}(a_0) \leq \frac{z'}{z}(a_0)$.

در این صورت مفروضات گزاره ۱.۳ برقرار است و طبق گزاره برای هر $r > a$ خواهیم داشت

$$\frac{f'}{f}(r) \leq \frac{z'}{z}(r)$$

و در نتیجه

$$\Delta_g h = \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{f'}{f}\frac{dh}{dr} = \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{f'}{f}\frac{1}{z} \leq \frac{d^2h}{dr^2} + \frac{z'}{z}\frac{dh}{dr} = 0.$$

حال $R_1 > 0$ را طوری در نظر بگیرید که برای $r \geq R_1$ برای $\delta > 0$ ثابت و دلخواه تعریف کنید

$$w_{\delta,\eta} = u - \delta h(r) - M(u; R_1)$$

از طرفی طبق فرض $R_2 > R_1$ موجود است به طوری‌که روی مرز گوی‌های باز $\partial B_{R_1}(0,0)$ و $\partial B_{R_2}(0,0)$ داشته باشیم $w_{\delta,\eta} \leq 0$. از آنجا که $\nabla^2 w_{\delta,\eta} \geq 0$ در نتیجه ی قضیه ۱.۲ روی حلقه $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | R_1 < ||x|| < R_2$ ، $w_{\delta,\eta} \leq 0$. از آنجا که $\delta > 0$ می‌تواند به مقدار کافی کوچک باشد برای هر $p \in A$ داریم

$$|u(P)| \leq M(u; R_1)$$

یا به عبارتی $|u(P)| \leq M(u; R_1)$ درون گوی باز $B_{R_2}(0,0)$.

پس طبق نتیجه ۱.۱ چون u ماکسیمم خود را در درون $B_{R_2}(0,0)$ اتخاذ می‌کند پس u درون R_2 ثابت است. از آنجا که R_2 دلخواه بود، حکم برقرار است. □

گزاره زیر نتیجه مستقیم قضیه فوق می‌باشد.

نتیجه ۲.۲ اگر u یک تابع همساز روی یک رویه باشد به طوری‌که برای $r_0 \geq 1$ خمیدگی K_g آن در نامساوی $K_g \geq -\frac{1}{r^2 \log r}$ صدق کند؛ و اگر داشته باشیم

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M(u;r)}{\log\log r} = 0$$

آن‌گاه u ثابت است. به ویژه اگر u کراندار باشد، ثابت است.

برهان. برای $r \geq_0$ تعریف کنید

$$z(r) = r\log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

از آنجا که $R_0 \geq 1$ داریم

$$-\frac{z''}{z} = -\frac{1}{r^2\log\left(\frac{r}{r_0}\right)} \leq -\frac{1}{r^2\log r} \leq K_g$$

و از طرفی $\lim_{r\to r_0^+}\frac{z'}{z}(r) = +\infty$ پس اگر قرار دهیم

$$h(r) = \int_{e\cdot r_0}^{r} \frac{1}{z(\sigma)}d\sigma = \log\log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

طبق گزاره ۳.۱، $\nabla^2 h \leq 0$. از طرفی چون

$$\liminf_{r\to\infty}\log\log = \frac{r}{r_0}\liminf_{r\to\infty}\log\log(r)$$

آنگاه طبق فرض داریم

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{M(u;r)}{h(r)} = 0$$

و طبق قضیه ۲.۲ u ثابت است. □

۴.۲ قضیه شکاف*

هدف اصلی ما در این بخش، اثبات قضیه شکاف بر رویه های ریمانی با خمیدگی گاوسی ناصفر است. پیش از آنکه به بیان صورت و برهان این قضیه بپردازیم، مفاهیمی را از آنالیز مختلط یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۶.۲ تابع مختلط f را در نقطه $z_0 \in \mathbb{C}$ مشتق پذیر گوییم هر گاه حد زیر موجود باشد

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

در این صورت f' را مشتق f در z_0 می‌نامیم.

تعریف ۷.۲ تابع مختلط f را روی U تحلیلی* گوییم هرگاه f روی هر $z_0 \in U$ مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۸.۲ تابع مختلط f را کراندار* گوییم هرگاه

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad st \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

قضیه زیر در آنالیز مختلط به قضیه تخمین کشی* معروف است و از نتایج مهم آن، قضیه لیوویل* است که ما صورت این دو قضیه را در اینجا ذکر می‌کنیم. برهان این دو قضیه را می‌توانید در [2] بیابید.

قضیه ۳.۲ اگر f یک تابع تحلیلی روی یک همسایگی گوی بسته $B(z^*, R)$ باشد، اگر تعریف کنیم

$$M_R := \max\left\{|f(z)| : |z-z^*| = R\right\}. \quad (< \infty)$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\left|f^{(n)}(z^*)\right| \leq \frac{n! M_R}{R^n}$$

قضیه ٤.۲ هر تابع کراندار و تحلیلی روی $\mathbb{C}$، ثابت است.

گزاره ٤.۲ اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی روی $\mathbb{C}$ باشد، اگر برای $|z|$ های به قدر کافی بزرگ داشته باشیم $|f(z)| \leq k|z|^n$ به ازای یک K ثابت، در این صورت f یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر n است.

برهان. از آنجا که f تحلیلی است، برابر با یک سری توانی* حول 0 است که شعاع همگرایی* آن ∞ است و برابر با سری تیلر* آن است. یعنی

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

و از آنجا که $|f(z)| \leq k|z|^m$ طبق تخمین کشی برای $|z| = R$ داریم

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!k|z|^m}{R^n}$$

برای $n > m$ قرار دهیم $R \to \infty$ خواهیم دید که $\left|f^{(n)}\right| = 0$ در نتیجه f یک چند جمله‌ای از درجه $\leq m$ است. $\square$

گزاره ۴.۲ نشان می‌دهد که اگر f یک تابع تحلیلی باشد به طوری‌که

$$|f(z)| \leq C|z|^k + B \tag{۱.۲}$$

، در این صورت f یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است. طبق این مشاهده می‌توانیم نتیجه بگیریم که توابع تحلیلی و در نتیجه توابع همساز، رشد مقطعی دارند. به طور مثال اگر در (۱،۲) قرار دهیم $k < 2$ در نتیجه تابع تحلیلی f از درجه رشد خطی است.
هدف ما در این بخش اثبات قضیه زیر است

قضیه ۵.۲ $\mathbb{R}^2$ را با متریک $g = dr^2 + f(r,\theta)^2 d\theta^2$ در نظر بگیرید به صورتی که خمیدگی گاوسی آن نامنفی باشد؛ یعنی داشته باشیم $K_g(r,\theta) = -\frac{f''(r,\theta)}{f(r,\theta)} \geq 0$ حال قرار دهید $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع همساز باشد. در این صورت اگر برای هر $\delta > 0$ داشته باشیم

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M(u;r)}{r^{1+\delta}} = 0$$

آنگاه ثابت $C > 0$ وجود دارد به طوری که $|u(r,\theta)| \leq Cr$. یعنی u از درجه رشد خطی است.

پیش از بیان برهان قضیه ۳.۲ قضیه تخمین یائو* را بدون اثبات مطرح می‌کنیم. این قضیه یک تعمیم اساسی از تخمین کشی، برای گرادیان توابع تحلیلی است که روی زیر مجموعه بازی از صفحه مختلط تعریف شده‌اند.

قضیه ۶.۲ فرض کنید $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع همساز مثبت روی $\mathbb{R}^2$ با متریک ریمانی باشد که خمیدگی گاوسی آن نامنفی است. در این صورت برای هر گوی باز به شعاع r درون Ω داریم

$$|\nabla \log |u\,| \leq \frac{C}{r}$$

یک نتیجه مستقیم قضیه تخمین یائو به شرح زیر است.

نتیجه ۳.۲ فرض کنید $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع همساز مثبت روی $\mathbb{R}^2$ با متریک ریمانی باشد که خمیدگی گاوسی آن نامنفی است به علاوه فرض کنید برای یک $\delta > 0$ داریم

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M(u;r)}{r^{1+\delta}} = 0$$

در این صورت یک دنباله $r_{\delta,k} \to \infty$ وجود دارد که برای $r_{\delta,k}$، روی گوی باز $B\left(r_{\delta,k}\right)$ داشته باشیم

$$|\nabla u| \leq r_{\delta,k}^{\delta}$$

حال می‌توانیم به بیان برهان صورت ضعیف‌تر قضیه بپردازیم. به این منظور ابتدا تساوی
را معرفی می‌کنیم

$$\frac{1}{2}\nabla^2|\nabla u|^2 = |\operatorname{Hess} u|^2 + g(\nabla\Delta u, \nabla u) + K_g g(\nabla u, \nabla u)$$

حال اگر u یک تابع همساز باشد و $K_g \geq 0$ در این صورت طبق تساوی $|\nabla u|^2$ زیرهمساز است. حال فرض کنیم:

$$.\liminf_{r\to\infty} \frac{M(u;r)}{r\sqrt{\log r}} = 0$$

آن‌گاه طبق تخمین یائو

$$.\liminf_{r\to\infty} \frac{M\left(|\nabla u|^2;r\right)}{\log r} = 0$$

و در نتیجه طبق قضیه ۲.۲ به ازای $Z(r) = r$ $|\nabla u|^2$ ثابت است. پس u باید از درجه رشد خطی باشد.

گزاره ۵.۲ . برای هر تابع همساز u روی رویه ریمانی داریم:

$$\Delta \log\left(1+|\nabla u|^2\right) = \frac{2|\operatorname{Hess} u|^2 + 2K_g|\nabla u|^2\left(1+|\nabla u|^2\right)}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^2} \tag{۲.۲}$$

برهان. یک قاب موضعی مثل (e_1, e_2) حول نقطه p روی رویه M در نظر می‌گیریم. و منظورمان از اندیس i مشتق کواریانت نسبت به برش e_i است. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\left(\log\left(1+|\nabla u|^2\right)\right)_{jj} &= \left(\frac{2}{1+|\nabla u|^2}u_{ij}u_i\right)_j\\ &= -\frac{4}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^2}u_{ij}u_{kj}u_iu_k\\ &\quad + \frac{2}{1+|\nabla u|^2}u_{ij}u_{ij} + \frac{2}{1+|\nabla u|^2}u_{ijj}u_i\end{aligned}$$

از طرفی $u_{ij}u_{kj}u_iu_k$ برابر

$$u_{11}^2u_1^2 + 2u_{12}u_{11}u_1u_2 + u_{12}^2u_2^2 + u_{22}^2u_2^2 + 2u_{21}u_{22}u_1u_2 + u_{21}^2u_1^2$$

است. و از آنجا که

$$u_{11} = -u_{22}$$

$$u_{21} = u_{21}$$

پس

$$u_{ij}u_{kj}u_iu_k = u_{11}^2u_1^2 + u_{12}^2u_2^2 + u_{22}^2u_2^2 + u_{21}^2u_1^2$$

و چون $u_{11}u_1 = -u_{22}u_1$ و $u_{11}u_2 = -u_{22}u_2$ داریم

$$u_{22}^2|\nabla u|^2 = u_{11}^2u_1^2 + u_{22}^2u_2^2 \quad \text{و} \quad u_{11}^2|\nabla u|^2 = u_{11}^2u_1^2 + u_{22}^2u_2^2$$

پس

$$\left(u_{11}^2+u_{22}^2\right)|\nabla u|^2=2\left(u_{11}^2u_1^2+u_{22}^2u_2^2\right)$$

که در نتیجه

$$-\frac{4}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^2}u_{ij}u_{kj}u_iu_k+\frac{2}{1+|\nabla u|^2}u_{ij}u_{ij}=\frac{2u_{ij}u_{ij}}{\left(1+|\nabla u|^2\right)^2}$$

از طرفی طبق نامساوی ریچی داریم

$$\Delta u_j=(\Delta u)_j+R_{ij}u_i$$

که در آن R_{ij} تنسور ریچی متریک خمینه است. در حالت رویه‌های ریمانی $R_{ij}=K_gg_{ij}$ که k_g خمیدگی گاوسی است. حال داریم

$$\frac{2}{1+|\nabla u|^2}u_{ijj}u_i=\frac{2}{1+|\nabla u|^2}R_{ki}u_ku_i=\frac{2K_g|\nabla u|^2}{1+|\nabla u|^2}$$

□

حال به اثبات قضیه ۳.۲ می‌پردازیم.

برهان. طبق تساوی ۲.۲، $\log\left(1+|\nabla u|^2\right)$ زیر همساز است. حال اگر قرار دهیم $\delta>0$:

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{M(u;r)}{r^{1+\delta}}=0.$$

در این صورت طبق نتیجه ۳.۲ دنباله‌ای مانند $r_{\delta,k}\to\infty$ وجود دارد به طوری که

$$\log\left(1+|\nabla u|^2\right)\le\log r_{\delta,k}^{\delta}$$

از آنجا که $\delta>0$ دلخواه بود

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{M\left(\log\left(1+|\nabla u|^2\right),r\right)}{\log r}=0.$$

پس مجدد طبق قضیه ۲.۲ $\log\left(1+|\nabla u|^2\right)$ ثابت است یا معادلا ∇u ثابت است. پس u از درجه رشد خطی است. یعنی یک C موجود است به طوری که

$$|u(r,\theta)|\le Cr$$

□

کتاب‌نامه

[1] Cortissoz, J.C.*A note on harmonic functions on surfaces*, Amer. Math. Monthly 123(9) (November 2016) 884-893.

[2] Gamelin, T. *Complex analysis.* Springer Science & Business Media, 2003.

[3] Gilbarg, D., and Trudinger, N.S.'*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[4] Lee JM. Introduction to Riemannian manifolds. Springer International Publishing; 2018.

[5] Protter, M.H., and Weinberger, H.F.*Maximum Principles in Differential Equations.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967.

[6]Tu, W. *An introduction to manifolds* Springer-Verlag, New York,2011.

واژه‌نامه

حسابان برداری	vector calculus
فضای مماس	tangent spaces
قاعده لایبنیتز	Leibniz rule
میدان برداری	vector field
فضای دوگان	dual space
فضای کتانژانت	cotangent space
۱-فرم دیفرانسیل	differential 1-form
پایه دوگان	dual basis
فضای توپولوژیک	topological space
چارت	chart
فضای ضرب داخلی	inner product space
تابع نرم	norm function
متریک ریمانی	riemannian metric
کلاف مماس	tangent bundle
کلاف کتانژانت	cotangent bundle

smooth section	برش هموار
smooth frame	قاب هموار
connection	اتصال
affine connection	اتصال آفین
covariant derivative	مشتق کوواریانت
symmetric	تقارنی
metric compatible	سازگار با متریک
Levi-Civita	لوی‌چیویتا
Lie bracket	براکت لی
Hessian	هسین
2-tensor field	میدان ۲-تنسور
local frame	قاب موضعی
christoffel symbols	ضرایب کریستوفل
polar coordinates	مختصات قطبی
chain rule	قاعده زنجیری
canonical isomorphism	ایزومورفیسم کانونی
riemmanian surface	رویه ریمانی
intrinsic	ذاتی
gaussian curvature	خمیدگی گاوسی
gradient field	میدان گرادیان
laplace operator	عملگر لاپلاس
divergence	دیورژانس
Harmonic	همساز
subharmonic	زیرهمساز
superharmonic	فوق همساز
domain	دامنه

interior	درونی
differential operator	عملگر دیفرانسیلی
elliptic	بیضوی
gap theorem	قضیه شکاف
order	مرتبه
holomorphic	تحلیلی
bounded	کراندار
caushy estimate	تخمین کشی
lioville theorem	قضیه لیوویل
power series	سری توانی
Taylor series	سری تیلر
Yau’s estimate	تخمین یائو