پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

مفهوم هندسی انتقال موازی در امتداد خم‌ها همراه با چند تعبیر فیزیکی

نگارنده

پگاه محمدی‌پور نصرآبادی

استاد راهنما

دکتر مهدی خواجه صالحانی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی

در رشته ریاضیات و کاربردها

مرداد ماه ۱۴۰۰

این نکته رمز اگر بدانی دانی هر چیزی که در جستن آنی آنی

[مولانا]

تقدیم به پدربزرگ مهربانم که خلاء نبودش پرنشدنی است. از بهترین دوستم، مادرم، سپاسگزارم که کلمات ایثارش را توصیف نمی‌کنند. عبور از این دوران سخت بدون محبت‌های برادرم، پدرام، و دوستانم زهرا، یاسمن، آیسان و ایمان ممکن نبود؛ همیشه شکرگزار محبّت‌هایشان خواهم بود. همچنین قدردان راهنمایی‌های دکتر خواجه صالحانی هستم.

چکیده

فرض کنیم می‌خواهیم برداری را در امتداد یک خم روی یک کره جابه‌جا کنیم. واضح است که در ابتدا، بردار روی صفحه ای مماس بر کره قرار دارد اما این جابه‌جایی باعث می‌شود بردار روی صفحه‌ی دیگری مماس بر کره قرار بگیرد. در اینجا مفهوم جدیدی از موازی بودن را تعریف می‌کنیم که در آن میدان برداری $V(t)$ روی خم $\sigma(t)$ موازی است اگر $\frac{dV(t)}{dt}=0$. به عبارت دیگر، میدان‌برداری $V(t)$ روی خم $\sigma(t)$ توسط ساکنان سطح مماس بر σ ، بدون تغیر به نظر می‌رسد. این مفهوم انتقال موازی در $\mathbb{R}^3$ را به حالت کلی بیان خواهیم‌کرد.

در واقع اگر فرض کنیم در یک خمینه‌ی هموار، یک مشتق همورد یا یک التصاق روی کلاف مماس آن در طول یک خم تعریف شده باشد، با استفاده از این التصاق می‌توانیم بردارهای روی خمینه را در طول خم طوری انتقال دهیم که نسبت به التصاق، موازی باقی بمانند.

در فصل اول و دوم با کلاف‌های مماس و کلاف‌های برداری آشنا می‌شویم. سپس به کمک این مفاهیم در فصل سوم، به این نتیجه می‌رسیم که وجود و یکتایی انتقال موازی برای هر خمینه‌ی هموار M و التصاق ∇ در TM روی خم $\gamma : I \to M$ که در آن $t_0 \in I$ و بردار $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ را داریم ، وابسته به وجود، یکتایی و همواری معادلات دیفرانسیل معمولی خطی است. بنابراین، انتقال موازی v در طول γ خوش‌تعریف است.

در بخش کاربردها، حرکت آونگ فوکو را روی کره‌ی استاندارد فضای اقلیدسی مطالعه می‌کنیم. از آن برای توصیف حرکت وضعی زمین به این ترتیب استفاده می‌کنیم که زمین را جسمی ساکن در نظر می‌گیریم و به جای آن فرض می‌کنیم

آونگ هر ۲٤ ساعت یکبار روی زمین انتقال می‌یابد.

سپس از انتقال موازی برای شرح پدیده‌ای به نام چرخش توماس–ویگنر روی یک فضای هذلولی استفاده می‌کنیم. چرخش توماس–ویگنر مربوط به زاویه‌ای است که توسط محور یک ژیروسکوپ بدون گشتاور دوران می‌یابد.

فهرست مطالب

پیشگفتار

هدف از انجام این پروژه، آشنایی با بنیادی‌ترین مفاهیم فیزیک ریاضیاتی و فراهم آوردن زمینه‌ای برای ورود به فرمالیسم ریاضی نسبیت و نظریه‌ی کوانتوم بود. بنابراین با پیشنهاد استاد راهنما، تمرکز اصلی بر منابع E8G·kF و EmqkUF و یادگیری پیش‌نیازهای لازم برای درک کامل آن‌ها، قرار داده شد. به این ترتیب، در بخش اول مقدمات ریاضی مفهوم کلیدی انتقال موازی را بررسی می‌کنیم و در بخش دوم، دو کاربرد آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

بخش اول

فرمالیسم ریاضی

فصل ۱
بردارها و کلاف‌های مماس

یکی از ایده‌های مرکزی حساب و دیفرانسیل تقریب خطی است. در فضاهای اقلیدسی برای تقریب خطی تابعی از یک متغیر، از خط مماس بر آن و برای تقریب یک رویه در $\mathbb{R}^3$ از صفحه مماس بر آن استفاده می کنیم. در این بخش هدف ما معرفی فضای مماس بر خمینه‌ها در یک نقطه است.

۱.۱ تعاریف عمومی

تعریف ۱.۱ فضای مماس هندسی $\mathbb{R}^n$ در نقطه $a \in \mathbb{R}^n$ را با $\mathbb{R}^n_a$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v); v \in \mathbb{R}^n\}$$

هم چنین یک بردار مماس هندسی در $\mathbb{R}^n$ در نقطه‌ی $a \in \mathbb{R}^n$، عضوی از $\mathbb{R}^n_a$ است. برای راحتی این بردار را می توان با نمادهای (a, v) ، v_a و $v|_a$ نیز نشان داد.

از تعریف بالا به راحتی می توان نتیجه گرفت که $\mathbb{R}^n_a$ یک فضای برداری حقیقی است زیرا برای $v_a, w_a \in \mathbb{R}^n_a$ داریم:

$$v_a + w_a = (v + w)_a, c(v_a) = (cv)_a$$

بردارهای $e_i|_a, i = 1, ..., n$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n_a$ می سازند در واقع $\mathbb{R}^n_a$ همان $\mathbb{R}^n$ است. از اندیس a تنها به این دلیل استفاده می‌کنیم که فضاهای مماس هندسی در $\mathbb{R}^n_a, \mathbb{R}^n_b$ با هم متمایزند. یک بردار مماس هندسی به ما امکان محاسبه مشتق های جهت دار از توابع را می‌دهد برای مثال، هر بردار مماس هندسی $v_n \in \mathbb{R}^n_a$ نگاشت $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ را ممکن می‌سازد که مشتق جهت دار در جهت v در نقطه a است:

$$D_v|_a f = D_v f(a) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(a + tv)$$

این عملگر روی $\mathbb{R}$ خطی است و در قاعده حاصلضرب صدق می‌کند:

$$D_v|_a(fg) = f(a)D_v|_a g + g(a)D_v|_a f$$

اگر بر اساس پایه‌ی استاندارد $v_a = v^i e_i|_a$، آنگاه بر اساس قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$D_v|_a f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

که منظور از سمت راست عبارت جمع روی $i = 1, ...n$ است.
برای مثال، اگر $v_a = e_j|a$ آنگاه

$$D_v|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^j}(a)$$

پس می‌توانیم تعریف زیر را دقیق بیان کنیم.

تعریف ۲.۱ اگر $a \in \mathbb{R}^n$ ، نگاشت $w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ را مشتق در نقطه a می‌نامیم اگر روی $\mathbb{R}$ خطی باشد و در رابطه زیر صدق کند:

$$w(fg) = f(a)wg + g(a)wf$$

از $T_a\mathbb{R}^n$ برای نشان دادن همه مشتق های $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ در نقطه a استفاده می‌کنیم. $T_a\mathbb{R}^n$ یک فضای برداری است چون داریم:

$$(w_1 + w_2)f = w_1 f + w_2 f$$

$$(cw)f = c(wf)$$

.

لم ۱.۱ (ویژگی های مشتق‌گیری) فرض کنیم $a \in \mathbb{R}^n$، $w \in T_a\mathbb{R}^n$، $f,g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

۱. f یک تابع ثابت باشد، آنگاه $wf = 0$

۲. اگر $f(a) = g(a) = 0$، آنگاه $w(fg) = 0$

برهان. کافیست گزاره اول را برای تابع $f_1(x) \equiv 1$، ثابت کنیم آنگاه برای $f(x) \equiv c$ بر اساس خطی بودن داریم $wf = w(cf_1) = cwf_1 = 0$.
برای $f_1(x) \equiv 1$، قاعده ضربی نتیجه می‌دهد:

$$wf_1 = w(f_1f_1) = f_1(a)wf_1 + f_1(a)wf_1 = 2wf_1 \Rightarrow wf_1 = 0$$

به طور مشابه گزاره دوم از قاعده زنجیره ای نتیجه می‌شود:

$$w(fg) = f(a)wg + g(a)wf = 0 + 0 = 0$$

گزاره بعدی نشان می‌دهد که مشتقات a با بردارهای مماس هندسی در تناظر یک‌به‌یک اند.

گزاره ۱.۱ فرض کنیم $a \in \mathbb{R}^n$
(a) برای هر بردار مماس هندسی $v_a \in \mathbb{R}^n$ نگاشت $D_v|_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ یک مشتق گیری در a است.
(b) نگاشت $D_v|_a \mapsto v_a$ یک یکریختی از $\mathbb{R}^n_a$ به $T_a\mathbb{R}^n$ است.
برای اثبات به کتاب Ed00o¨F مراجعه شود.

نتیجه ۱.۱ برای هر $a \in \mathbb{R}^n$، n مشتق $\frac{\partial}{\partial x^1}|_a, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}|_a$ که براساس $\frac{\partial}{\partial x^i}|_a f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ تعریف می‌شوند یک پایه برای $T_a\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهند. پس $T_a\mathbb{R}^n$، n–بُعدی است.

برهان. با توجه به گزاره قبلی و $\frac{\partial}{\partial x^i}|_a = D_{e^i}|_a$ نتیجه می‌شود.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم M یک خمینه هموار مرزدار یا بدون مرز و p نقطه ای از M است. یک نگاشت خطی $V : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ را یک مشتق‌گیری در p می‌نامیم اگر برای هر $f, g \in C^\infty(M)$ در عبارت زیر صدق کند:

$$V(fg) = f(p)Vg + g(p)Vf$$

مجموعه همه مشتق های $C^\infty(M)$ در p را که یک فضای برداری است فضای مماس به M در p می‌نامیم و با T_pM نشان می‌دهیم. هر عضو T_pM را یک بردار مماس بر p می‌نامیم.

لم ۲.۱ (ویژگی های بردار مماس بر خمینه ها) فرض کنیم M ، یک خمینه هموار مرزدار یا بدون مرز است، $p \in M$ ، $v \in T_pM$ و $f, g \in C^\infty(M)$:

۱. اگر f یک تابع ثابت باشد، آنگاه $Vf = 0$.

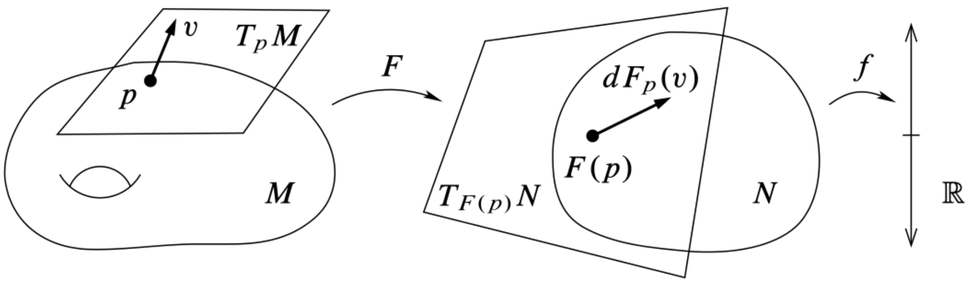
۲. اگر $f(p) = g(p) = 0$، آنگاه $V(fg) = 0$.

برای مجسم کردن بردارهای مماس در $\mathbb{R}^n$ باید بردارهای مماس بر M را مانند پیکان هایی مماس بر M در نظر بگیریم که ابتدای آن ها در نقطه داده شده بر M مماس اند.

۲.۱ دیفرانسیل‌های یک نگاشت هموار

مشتق کل یک نگاشت بین فضاهای اقلیدسی که در قالب ماتریس ژاکوبیان نشان داده می‌شود، یک نگاشت خطی است. در خمینه ها یک نگاشت خطی مشابهی وجود دارد اما تعریف یک نگاشت خطی بین خمینه ها بی‌معناست. به جای آن یک نگاشت خطی بین فضاهای مماس تعریف می‌کنیم.

تعریف ٤.۱ اگر M, N خمینه های هموار مرزدار یا بدون مرز باشند و $F : M \to N$ یک نگاشت هموار باشد، برای هر $p \in M$ نگاشت زیر را دیفرانسیل



شکل ۱.۱: دیفرانسیل

F در p می‌نامیم.

$$dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$$

برای هر $v \in T_pM$ ، $dF_p(v)$ مشتق‌گیری در F_p روی $f \in C^\infty(N)$ است که بر اساس قانون زیر عمل می‌کند:

$$dF_p(v)(f) = v(foF)$$

تذکر ۱.۱ توجه کنیم که اگر $f \in C^\infty(N)$ ، آنگاه $foF \in C^\infty(M)$. پس $v(foF)$ معنی‌دار است. عملگر $dF_p(v) : C^\infty(N) \to \mathbb{R}$ خطی است زیرا v خطی است و مشتق‌گیری در F_p است. چون برای هر $f, g \in C^\infty(N)$ داریم:

$$\begin{aligned} dF_p(v)(fg) &= v((fg)oF) = v((foF)(goF)) \\ &= foF(p)v(goF) + goF(p)v(foF) \\ &= f(F(p))dF_p(v)(g) + g(F(p))dF_p(v)(f). \end{aligned}$$

گزاره ۲.۱ (ویژگی‌های دیفرانسیل‌ها) فرض کنیم M ، N و P خمینه‌های هموار مرزدار یا بدون مرز باشند، همچنین $F : M \to N$ و $G : N \to P$ نگاشت‌های هموارند و $p \in M$ ، آنگاه:

۱. $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ خطی است.

۲. $d(GoP)_p = d_{G_{F(p)}} odF_p : T_pM \to T_{GoF(p)}P$.

۳. $d(Id_M)_p = Id_{T_p}M : T_pM \to T_pM$.

٤. اگر F یک وابرریختی باشد، آنگاه $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ یک یکریختی است و $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

می‌خواهیم دیفرانسیل‌ها را به کار بگیریم تا از چارت‌های مختصات برای به هم ربط دادن فضای مماس یک نقطه روی یک خمینه و فضای اقلیدسی استفاده کنیم. برای این کار ابتدا لازم است نشان دهیم بردارهای مماس، موضعی عمل می‌کنند.

گزاره ۳.۱ فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموار مرزدار یا بدون مرز ، $p \in M$ و $v \in T_pM$ هستند. اگر $f, g \in C^\infty M$، روی همسایگی‌ای از p با هم برابر باشند، آنگاه $vf = vg$.

برهان. فرض کنیم $h = f - g$ ، پس h یک تابع هموار است که در یک همسایگی p مقدارش صفر است. فرض کنیم $\Psi \in C^\infty(M)$ یک تابع است که در تکیه‌گاه h ، مقدارش ۱ است یعنی در نقاط ناصفر h ، $\Psi \equiv 1$. پس $\Psi h = h$. چون $h(p) = \Psi(p) = 0$ در نتیجه باتوجه به ویژگی بردارهای مماس بر خمینه‌ها، $vh = v(\Psi h) = 0$ و از خطی بودن نتیجه می‌شود: $vf = vg$.

۳.۱ کلاف مماس

در فصل‌های بعدی نیاز داریم مجموعه‌ای داشته باشیم که شامل همه‌ی بردارهای مماس بر همه‌ی نقاط یک خمینه است. هدفمان در این بخش شناختن این مجموعه است.

تعریف ۵.۱ در هر خمینه‌ی هموار مرزدار یا بدون مرز M ، اجتماع مجزای همه‌ی فضاهای مماس در همه‌ی نقاط M را کلاف مماس بر M می‌نامیم و با TM نشان می‌دهیم و یعنی برای $p \neq q$ که $T_p \cap T_q = \emptyset$ داریم:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

معمولاً هر عضو این اجتماع را با زوج مرتب (p,v) نشان می‌دهیم که در آن $p \in M$ و $v \in T_pM$.

روی کلاف مماس می‌توان یک نگاشت تصویری تعریف کرد که هر بردار در T_pM را به نقطه‌ای که به آن مماس است می‌برد. یعنی داریم:

$$\pi : TM \to M, \pi(p,v) = p$$

.

مثال ۱.۱ در حالت $M = \mathbf{R}^n$ داریم:

$$T\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{a\in\mathbb{R}^n} T_a\mathbb{R}^n \cong \bigsqcup_{a\in\mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n_a = \bigsqcup_{a\in\mathbb{R}^n} \{a\} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

یک خمینه‌ی هموار می‌تواند مترهای متفاوتی داشته باشد. در اینجا می‌خواهیم روی کلاف‌های مماس، متر ریمانی تعریف کنیم. از متر ریمانی برای به دست آوردن فواصل روی خمینه‌ها استفاده می‌شود. متر ریمان یکی از مهمترین ایده‌های ریمان است که فضا و متر را از یکدیگر متمایز می‌سازد.

تعریف ۶.۱ یک متر ریمانی، به هر $p \in M$ ، یک ضرب داخلی معین مثبت $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ را نسبت می‌دهد که نرم آن یعنی $|.|_p : T_pM \to \mathbb{R}$ به صورت $|v|_p = \sqrt{g_p(v,v)}$ تعریف می‌شود. خمینه‌ی هموار M که متر آن g است را خمینه‌ی ریمان می‌نامیم و با (M,g) نشان می‌دهیم.

فصل ۲

کلاف‌های برداری

با مفهوم میدان‌های برداری به عنوان نگاشت‌هایی پیوسته از U به $\mathbb{R}^n$ که $U \subseteq \mathbb{R}^n$ آشنا هستیم. در این بخش می‌خواهیم این مفهوم را به خمینه‌های هموار توسیع دهیم.

۱.۲ میدان‌های برداری روی خمینه‌ها

تعریف ۱.۲ اگر $\pi : M \to N$ یک نگاشت پیوسته باشد، یک مقطع از π ، یک وارون راست پیوسته برای π است؛ یعنی نگاشت پیوسته‌ی $\sigma : N \to M$ که

$$\pi o \sigma = Id_N$$

تعریف ۲.۲ اگر M یک خمینه هموار با مرز یا بدون مرز باشد، یک میدان برداری روی M یک مقطع از نگاشت $\pi : TM \to M$ است. به طور دقیق تر، یک میدان برداری یک نگاشت پیوسته $X : M \to TM$ است که ویژگی زیر را دارد:

$$\pi o X = Id_M.$$

این نگاشت را به صورت $p \to Xp$ نیز نشان می‌دهیم. به طور معادل برای هر $p \to X$، $X_p \to T_pM$.

شهودی که از میدان های برداری داریم باید شبیه شهود ما در فضای اقلیدسی باشد: پیکان هایی که به هر نقطه از M مماس هستند و به طور پیوسته تغییر می‌کنند.

تعریف ۳.۲ اگر تعریف میدان برداری شرط پیوستگی را برداریم، نگاشت $X : M \to TM$ را یک میدان برداری ناهموار روی M می‌نامیم.

تعریف ۴.۲ اگر X یک میدان برداری روی خمینه‌ی M باشد، تکیه گاه X را بستار مجموعه $\{p \in M : X_p \neq 0\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۲ فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموار n –بعدی است. اگر $X : M \to TM$ یک میدان برداری ناهموار باشد و $U(x^i)$ یک چارت مختصات هموار M باشد، می‌توانیم مقدار X در هر نقطه‌ی $p \in U$ را بر اساس بردارهای پایه ی مختصات به صورت زیر بنوسیم:

$$Xp = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

بدین ترتیب n تابع $X^i : U \to \mathbb{R}$ تعریف شده اند. آن ها را توابع مولفه X در چارت داده شده می‌نامیم.

گزاره ۱.۲ (محک همواری میدان های برداری) فرض کنیم M یک خمینه هموار مرزد یا بدون مرز باشد و فرض کنیم $X : M \to TM$ یک میدان برداری هموار باشد. اگر $U(X^i)$ یک چارت مختصات هموار روی M باشد، آنگاه تحدید X به U هموار است اگر و تنها اگر توابع مولفه‌اش نسبت به این چارت هموار باشند.

برهان. اگر (x^i, v^i) مختصات طبیعی روی $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$ باشد که چارت آن $(U, (x^i))$ است بر اساس تعریف مختصات طبیعی، نمایش مختصات $X : M \to TM$ روی U عبارت است از

$$X(u) = (x^1, ..., x^n, X^1(x), ..., X^n(x))$$

که X^i i–امین مولفه‌ی تابع X در مختصات x^i است. این نتیجه می‌دهد که همواری X در U معادل با همواری توابع مولفه‌اش است.

مثال ۱.۲ (میدان های برداری مختصات) اگر $(U,(x^i))$ هر چارت هموار روی M باشد، نگاشت $p \to \frac{\partial}{x^i}|_p$ یک میدان برداری روی U تعریف می‌کند که i–امین مختصات میدان برداری نام دارد با $\frac{\partial}{\partial x^i}$ تشان داده می‌شود. این نگاشت هموار است زیرا توابع مولفه‌اش ثابت اند.

۲.۲ کلاف‌های برداری

تعریف ۶.۲ برای عدد مثبت حقیقی k، یک کلاف‌برداری هموار از مرتبه‌ی k یک زوج از خمینه های هموار E و H ، مرزدار یا بدون مرز، همراه با نگاشت هموار پوشای $\pi : E \to M$ است که در ویژگی های زیر صدق می کنند:

۱. برای هر $p \in M$ ، مجموعه $Ep = \pi^{-1}(p)$ دارای ساختار یک فضای برداری حقیقی k–بعدی است.

۲. برای هر $p \in M$ ، یک همسایگی U از p و یک وابرریختی
$\phi :\ \pi^{-1}(U) \to U \times R^k$ وجود دارد به طوریکه $\pi_U o\phi = \pi$ ، که در آن
$\pi_U : U\times\mathbb{R}^k \to U$ نگاشت تصویری به عامل اولش است و برای هر $\phi, q \in U$
به یک یکریختی خطی از E_q به $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$ تحدید می‌شود.

تعریف ۷.۲ فضای M را پایه کلاف، E را فضای کل و π را تصویر آن می‌نامیم.

تعریف ۸.۲ هر مجموعه $E_p = \pi^{-1}(p)$ ، فیبر E روی p نام دارد و هر وابرریختی $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ که در بالا معرفی شد، یک بدیهی‌سازی موضعی هموار نام دارد.

فصل ۳
انتقال موازی

برای مطالعه‌ی انتقال موازی نیاز داریم شتاب روی یک خمینه را تعریف کنیم. از طرفی شتاب روی هر خمینه وابسته به مفهوم جدیدی به نام التصاق است. التصاق‌ها مجموعه‌ای از قوانین مستقل از مختصات برای تعیین مشتق‌های جهت‌دار در میدان‌های برداری هستند. در این بخش به معرفی دقیق این مفاهیم می‌پردازیم.

۱.۳ مسئله‌ی مشتق‌گیری میدان‌های برداری

برای درک اینکه نیاز به عملگر مشتق‌گیری جدیدی داریم، ابتدا خم‌های داخل $\mathbb{R}^n$ را درنظر بگیریم. فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه و $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ یک خم هموار است که در مختصات استاندارد به صورت $\gamma(t) = (\gamma'(t), ..., \gamma^n(t))$ نوشته شده است. در چنین خمی برای هر $t \in I$، سرعت $\gamma'(t)$ و شتاب $\gamma''(t)$ خوش‌تعریف هستند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\gamma'(t) = \dot{\gamma}^1(t)\frac{\partial}{\partial x^1}|_{\gamma}(t) + ... + \dot{\gamma}^n(t)\frac{\partial}{\partial x^n}|_{\gamma}(t)$$
$$\gamma''(t) = \ddot{\gamma}^1(t)\frac{\partial}{\partial x^1}|_{\gamma}(t) + ... + \ddot{\gamma}^n(t)\frac{\partial}{\partial x^n}|_{\gamma}(t)$$

خم γ در $\mathbb{R}^n$ یک خط راست است اگر و تنها اگر نمایشی داشته باشد که در آن $\gamma''(t) \equiv 0$. بنابراین، با توجه به تعاریف بالا، می‌توانیم مشتق‌های جهت‌دار میدان‌های برداری روی $\mathbb{R}^n$ را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۳ اگر $Y \in \mathsf{X}(\mathbb{R}^n)$ یک میدان برداری و $v \in T_p\mathbb{R}^n$ یک بردار باشد،

مشتق جهت‌دار اقلیدسی Y در جهت v را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{\nabla}_v Y = v(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1}|_p + ... + v(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n}|_p$$

که در آن برای هر i ، $v(Y^i)$ از اعمال بردار v به تابع Y^i به‌دست می‌آید:

$$v(Y^i) = v^1\frac{\partial Y^i(p)}{\partial x^1} + ... + v^n\frac{\partial Y^i(p)}{\partial x^n}$$

تذکر ۱.۳ اگر X میدان برداری دیگری روی $\mathbb{R}^n$ باشد، میدان برداری جدید $\overline{\nabla}_X Y$ به دست خواهد آمد:

$$\overline{\nabla}_X Y = X(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1}|_p + ... + X(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n}|_p$$

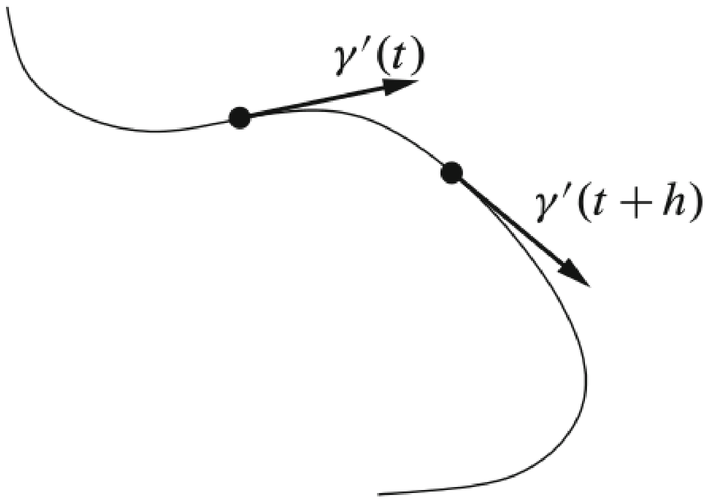
تعریف ۲.۳ با فرضیات بالا، اگر شتاب اقلیدسی $\gamma''(t)$ را به دست‌آوریم و سپس تصویر مماس $\pi^T : T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n \to T_{\gamma(t)}M$ را روی آن اعمال کنیم؛ بردار $\gamma''(t)^T = \pi^T(\gamma''(t))$ مماس بر M به‌دست می‌آید که شتاب مماس بر γ نام دارد.

حال این سوال مطرح است که اگر Y یک میدان برداری هموار روی خمینه‌ی M باشد، Y در جهت‌بردار $v \in T_pM$ چقدر روی M تغیر می‌کند؟
برای مثال اگر این سوال را در $\mathbb{R}^n$ درنظر بگیریم، ممکن است میدان برداری Y ناچار باشد طوری تغیر کند که به M مماس بماند.

تعریف ۳.۳ اگر Y یک میدان برداری هموار روی خمینه‌ی M و $v \in T_pM$ باشد، Y را به میدان برداری هموار $\tilde{Y}$ روی یک زیرمجموعه‌ی باز $\mathbb{R}^n$ بسط می‌دهیم. به این ترتیب، مشتق جهت‌دار مماس بر Y در جهت v به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_v^T Y = \pi^T(\overline{\nabla}_v \tilde{Y})$$

می‌خواهیم مفهوم شتاب را نیز روی یک خمینه‌ی دلخواه تعریف کنیم. برخلاف سرعت، شتاب هیچ تعبیر مستقل از مختصات ندارد.
مسئله این است که اگر $\gamma(t)$ یک خم روی خمینه‌ی M باشد، برای تعریف $\gamma''(t)$



شکل ۱.۳: $\gamma'(t)$ و $\gamma'(t+h)$ در فضاهای برداری متفاوتی قرار دارند.

نیاز است از $\gamma'(t)$ نسبت به t مشتق گرفته شود یعنی لازم است حدی حساب شود که در آن تفاضل بردارهای $\gamma'(t+h)$ و $\gamma'(t)$ وجود دارد. اما این دو بردار در فضاهای مختلف، به ترتیب $T_{\gamma(t+h)}M$ و $T_{\gamma(t)}M$، قرار دارند. تعریف شتاب در حالات خاص خم‌های هموار در $\mathbb{R}^n$ در مختصات استاندارد، درست کار می‌کند زیرا هر فضای مماس با خود بردار مماس مشخص می‌شود. در یک خمینه‌ی هموار دلخواه چنین حالتی وجود ندارد.

۲.۳ التصاق‌ها

در حالت کلی، برای تفسیر شتاب یک منحنی در یک خمینه‌ی دلخواه، نیاز به روشی مستقل از مختصات داریم تا بتوانیم مشتق میدان‌های برداری را در طول خم‌ها به دست آوریم. برای این کار، به طور شهودی، نیاز داریم فضاهای مماس را به یکدیگر وصل کنیم. این جاست که از مفهومی به نام التصاق استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴.۳ فرض کنیم $\pi : E \to M$ یک کلاف برداری مماس روی خمینه‌ی هموار مرزدار یا بدون مرز M باشد، و فرض کنیم $\Gamma(E)$ نشان دهنده‌ی فضای

مقطع‌های هموار E است. یک التصاق در E نگاشت زیر است:

$$\nabla : \mathsf{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

می‌نویسیم $(X,Y) \to \nabla_X Y$، که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

(i) $\nabla_X Y$ روی $C^\infty(M)$ در X خطی است: برای $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ و $X_1, X_2 \in \mathsf{X}(M)$،

$$\nabla_{f_1X_1+f_2X_2}Y = f_1\nabla_{X_1}Y + f_2\nabla_{X_2}$$

(ii) $\nabla_X Y$ روی $\mathbb{R}$ در Y خطی است: برای $a_1, a_2 \in R$ و $Y_1, Y_2 \in T(E)$،

$$\nabla_X(a_1Y_1 + a_2Y_2) = a_1\nabla_X Y_1 + a_2\nabla_X Y_2$$

(iii) ∇ در قانون حاصلضرب زیر صدق می‌کند:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \quad f \in C^\infty(M)$$

$\nabla_X Y$ مشتق همورد Y در جهت X است.

۳.۳ میدان‌های برداری در طول خم‌ها

در این بخش می‌خواهیم سوالی را که علت تعریف التصاق‌ها بود را پاسخ دهیم: چگونه می‌توانیم مشتق یک میدان برداری را در طول یک خم تعریف کنیم؟

تعریف ۵.۳ فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموار مرزدار یا بدون مرز باشد، اگر خم هموار $\gamma : I \to M$ را داشته باشیم، یک میدان برداری در طول γ، نگاشت پیوسته‌ی $V : I \to TM$ است ؛ که برای هر $t \in I$ ، $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$. اگر نگاشت V یک نگاشت هموار باشد ، آن را یک میدان برداری هموار در طول γ می‌نامیم .

تعریف ۶.۳ فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموار، $\gamma : I \to M$ یک خم هموار و $\tilde{V}$ یک میدان برداری هموار روی زیر مجموعه‌ی بازی از M است که شامل تصویر

شکل ۲.۳: از سمت راست: میدان برداری گسترش‌پذیر و میدان برداری امتدادناپذیر

γ است. نگاشت $V : I \to TM$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که برای هر $t \in I$ ، $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$. از آنجا که V برابر با $\tilde{V} o \gamma$ است، هموار خواهد بود. یک میدان برداری هموار در طول γ را گسترش‌پذیر می‌گوییم اگر میدان برداری هموار $\tilde{V}$ با شرایط بالا، روی یک همسایگی تصویر γ وجود داشته باشد.

تذکر ۲.۳ هر خمی لزوماً گسترش‌پذیر نیست. برای مثال اگر $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ولی $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ آنگاه حتی اگر یک‌به‌یک باشد، سرعت آن گسترش‌پذیر نیست.

قضیه ۱.۳ (مشتق همورد در طول یک خم) فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموار مرزدار با بدون مرز و ∇ یک التصاق در TM باشد. برای هر خم هموار $\gamma : I \to M$ ، التصاق گفته شده، عملگر یکتای

$$D_t : \mathsf{X}(\gamma) \to \mathsf{X}(\gamma)$$

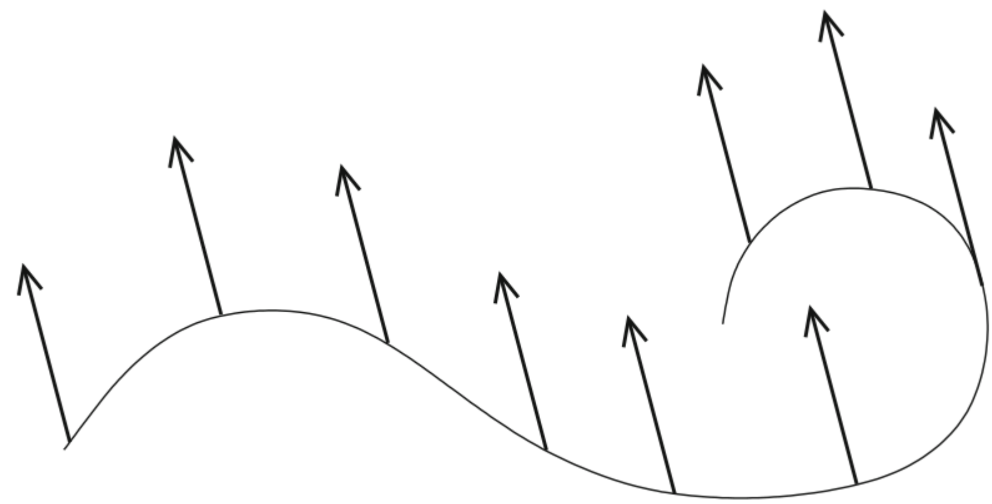
را مشخص می‌کند که مشتق همورد در طول γ نام دارد. این مشتق ویژگی‌های زیر را دارد:

(i) خطی بودن روی $\mathbb{R}$:

برای $a, b \in \mathbb{R}$: $D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW$

(ii) قانون حاصلضربی :

برای $f \in C^\infty(I)$: $D_t(fV) = f'V + fD_tV$



شکل ۳.۳: یک میدان برداری موازی در طول یک خم

(iii) اگر $V \in \mathsf{X}(\gamma)$ گسترش‌پذیر باشد، آنگاه برای هر توسیع $\tilde{V}$ از V داریم :

$$D_t V(t) = \nabla_{\gamma'(t)} \tilde{V}$$

۴.۳ انتقال موازی

تعریف ۷.۳ فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموار و ∇ یک التصاق در TM باشد. میدان برداری V در طول خم هموار γ را موازی با γ می‌نامیم اگر $D_t V \equiv 0$.

نکته‌ی اساسی درمورد بردارهای موازی در طول یک خم این است که هر بردار مماس بر هر نقطه‌ی روی خم را می‌توان به طور یکتا به یک میدان موازی در طول کل خم توسیع داد. البته این یک ادّعاست که نیاز به اثبات دارد. برای این کار لازم است نشان دهیم معادله‌ی مربوط به موازی بودن جواب یکتایی دارد.

فرض کنیم خم $\gamma(t) = (\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t))$ را داریم. از Ed00oPF می‌دانیم میدان برداری V موازی است اگر و تنها اگر برای $k = 1, ..., n$، $\dot{V}^k(t) = -V^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))$.

پس یک دستگاه معادله دیفرانسیل درجه اول داریم که ضرایب آن از یک میدان برداری هستند.

قضیه ۲.۳ (وجود، یکتایی و همواری معادلات دیفرانسیل معمولی خطی)

فرض کنیم $I \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه‌ی باز است، و برای $1 \leq j,k \leq n$ فرض کنیم $A_j^k : I \to \mathbb{R}$ توابع هموارانـد. برای هر $a_0 \in I$ و برای هر بردار اوّلیه‌ی $(c^1, ..., c^n) \in \mathbb{R}^n$ مسئله‌ی مقدار اوّلیه‌ی خطی

$$\dot{V}^k(t) = A_j^k(t)V^j(t)$$

$$V^k(t) = c^k$$

یک جواب یکتا روی کل بازه‌ی I دارد.

برای بررسی برهان قضیه به Ed00oPF مراجعه می‌کنیم.

قضیه ۳.۳ (وجود و یکتایی انتقال موازی) فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموار مرزدار یا بدون مرز است، و ∇ یک التصاق در TM است. برای خم هموار $I \to M$: γ، $t_0 \in I$ و بردار $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ یک میدان برداری موازی یکتا در طول γ وجود دارد به طوریکه $V(t_0) = v$.

برهان. ابتدا فرض کنیم $\gamma(I)$ در یک چارت مختصات تکی قرار دارد. در این صورت V در طول γ موازی است اگر و تنها اگر مولفه‌هایش در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی خطی $k = 1, ..., n$ ، $\dot{V}^k(t) = -V^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$ صدق کند. قضیه‌ی قبلی وجود چنین جوابی را نتیجه می‌دهد.
حال فرض کنیم $\gamma(t)$ با تنها یک چارت پوشش داده نشود. β را نشان دهنده‌ی سوپریمم برای هر $b > t_0$ درنظر بگیریم به‌طوریکه یک انتقال موازی یکتا روی بازه‌ی $[t_0, b]$ وجود دارد. (برای حالت $t < t_0$ استدلال مشابه است.) می‌دانیم $\beta > t_0$، زیرا برای b که به‌اندازه‌ی کافی نزدیک به t_0 ، $\gamma([t_0, b])$ در یک چارت مختصات تکی قرار دارد. آنگاه یک انتقال موازی یکتای V روی $[t_0, \beta)$ وجود دارد. اگر β برابر با $sup(I)$ باشد، حکم ثابت شده است. درغیراین صورت، برای یک $\delta > 0$ مختصات هموار روی یک مجموعه‌ی باز شامل $\gamma(\beta - \delta, \beta + \delta)$ انتخاب کنیم. آنگاه یک میدان برداری یکتای ₮ روی $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ وجود دارد که در شرط اولیه‌ی $₮(\beta - \delta/2) = V(\beta - \delta/2)$. بر اساس یکتایی، V و ₮ در دامنه‌ی

مشترکشان برابرند $(\tilde{V} = V)$. بنابراین ، $\tilde{V}$ یک توسیع موازی از V در ادامه‌ی β است که یک تناقض است.

میدان برداری که وجود و یکتایی آن را ثابت کردیم؛ انتقال موازی v در طول γ نام دارد. برای هر $t_0, t_1 \in I$، نگاشت $P^{\gamma}_{tot_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ نگاشت انتقال موازی نام دارد. برای هر $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ ، $P^{\gamma}_{tot_1} = V(t_1)$ ، V انتقال موازی v در طول γ است. این نگاشت خطی است، زیرا معادله‌ی موازی بودن خطی است. درواقع، یکریختی نیز هست زیرا $P^{\gamma}_{tot_1}$ وارون دارد.

نگاشت انتقال موازی روشی است که توسط آن یک التصاق، صفحه‌های مماس را به‌هم وصل می‌کند. قضیه‌ی بعدی و نتیجه‌اش نشان می‌دهند که انتقال موازی مشتق هموردا در طول خم‌ها و در نتیجه خود التصاق را مشخص می‌کند.

تعریف ۸.۳ برای هر پایه‌ی $(b_1, ..., b_n)$ در $T_{\gamma(t_0)}M$، می‌توانیم بردارهای b_i را در طول γ به طور موازی انتقال دهیم. بنابراین میدان‌های برداری موازی j–تایی $(E_1, ..., E_n)$ را در طول γ به دست می‌آوریم. چون هر نگاشت انتقال موازی یک یکریختی است، بردارهای $(E_i(t))$ یک پایه برای $T_{\gamma(t)}M$ در هر نقطه‌ی $\gamma(t)$ ، تشکیل می‌دهند. چنین j–تایی‌هایی از میدان‌های برداری در طول یک قاب موازی در طول γ نام دارد.

قضیه ٤.٣ (انتقال موازی مشتق‌گیری هموردا را تعیین می‌کند) فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموردا مرزدار یا بدون مرز است و ∇ یک التصاق در TM است. فرض کنیم $\gamma : I \to M$ یک خم هموار و V یک میدان برداری هموار در طول γ است. برای هر $t_0 \in I$ ، $D_tV(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{P^{\gamma}_{t_1 t_0}V(t_1) - V(t_0)}{t_1 - t_0}$.

نتیجه ۱.۳ (انتقال موازی التصاق را تعیین می‌کند) فرض کنیم M یک خمینه‌ی هموار مرزدار یا بدون مرز و ∇ یک التصاق در TM است. اگر X و Y میدان‌های برداری هموار روی M باشند، برای هر $p \in M$ ،

$$\nabla_X Y|_p = \lim_{h \to 0} \frac{P^{\gamma}_{h_0} V_{(h)} - Y_p}{h}$$

$\gamma : I \to M$ یک خم هموار است و $\gamma(0) = p$ و $\gamma'(0) = X_p$.

برهان. اگر $P \subseteq M$ و γ خمی هموار باشد که $\gamma(0) = p$ و $\gamma'(0) = X_p$ ، فرض کنیم $V(t)$ نشان‌دهنده‌ی میدان برداری در طول γ باشد که توسط Y تعیین می‌شود، پس $V(t) = Y_{\gamma}(t)$. با توجه به قانون حاصلضربی، $\nabla_X Y|_p$ برابر با $D_t V(0)$ است و حکم از قضیه نتیجه می‌شود.

تعریف ۹.۳ یک بردار هموار روی خمینه‌ی M را موازی گوییم اگر با هر خم هموار در M موازی باشد.

بخش دوم

کاربردها

در این بخش کاربردهای انتقال موازی را بررسی می‌کنیم. برای این کار ابتدا در دو فصل آتی، مقدمات لازم برای بیان حالت خاص انتقال موازی در $\mathbb{R}^3$ را پیاده‌سازی می‌کنیم. سپس به کمک ابزارهای به دست آمده، طرزکارکرد آونگ فوکو و یک پدیده در نسبیت خاص، به نام دوران توماس–ویگنر، را بیان می‌کنیم. همچنین این بخش شامل پیوستی برای آشنایی با مفاهیم مقدماتی نسبیت خاص است که در فصل آخر به کار می‌روند.

فصل ٤
انتقال موازی در $\mathbb{R}^3$

۱.٤ خم‌های پارامترسازی‌شده توسط طول کمان

فرض کنیم $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ یک خم پارامترسازی شده توسط طول کمان s است. از آنجا که بردار مماس $\alpha'(s)$ طولش یک است، نرم مشتق دوم یعنی $|\alpha''(s)|$ تندی تغیر زاویه‌ای است که بردارهای مماس در همسایگی s با بردار مماس بر s می‌سازند. بنابراین $|\alpha''(s)|$ نشان می‌دهد که خم در یک همسایگی s ، با چه سرعتی از خط مماس بر s دور می‌شود.

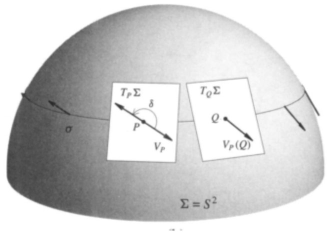
تعریف ۱.٤ فرض کنیم $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ یک خم پارامترسازی شده توسط طول کمان $s \in I$ باشد. $|\alpha''(s)| = k(s)$ را خمیدگی α در s می‌نامیم.

قضیه ۱.٤ هر خط راست است گر و تنها اگر خمیدگی آن صفر باشد.

برهان. اگر α یک خط راست باشد، $\alpha(s) = us + v$ ، که u و v بردارهای ثابت اند $(|u| = 1)$ ، آنگاه $k \equiv 0$. بر عکس، اگر $k = |\alpha''(s)| = 0$ ، آنگاه با انتگرال‌گیری $\alpha(s) = us + v$ و بنابراین یک خط راست است.

گزاره ۱.٤ خمیدگی با تغیر جهت تغیر نمی‌کند.

برهان. با تغیر جهت‌گیری، بردار مماس جهتش را تغیر می‌دهد؛ یعنی اگر



شکل ۱.٤: انتقال موازی در طول دایره‌ای به عرض جغرافیایی $\frac{\pi}{6}$، در این حالت زاویه‌ی هولونومی $\sigma = \pi$ است.

$\beta(s) = \alpha(s)$ آنگاه

$$\frac{d\beta}{d(-s)}(-s) = -\frac{d\alpha}{ds}(s)$$

بنابراین، $\alpha''(s)$ و در نتیجه خمیدگی با تغیر جهت تغیر نمی‌کند.

۲.٤ مفهوم انتقال موازی در $\mathbb{R}^3$

فرض کنیم دو بردار V_P و V_Q در نقاط P و Q به رویه S هستند. می‌خواهیم V_P را طوری به بردار $V_P(Q)$ مماس به رویه‌ی S در نقطه‌ی Q و موازی با V_P انتقال دهیم؛ که بتوانیم $V_P(Q)$ و V_Q را در یک صفحه مماس به Q (یعنی T_QS) مقایسه کنیم.

موازی بودن در $\mathbb{R}^3$ حالت خاصی از فرم کلی‌ای است که در بخش‌های قبلی معرفی کردیم؛ می‌گوییم میدان برداری $V(t)$ روی خم $\sigma(t)$ موازی است اگر $V(t)$ ثابت باشد. بدین معنا که برای هر t داشته باشیم: $\frac{dV}{dt}(t) = 0$. از طرفی، در رویه‌ی S ، می‌گوییم میدان برداری $V(t)$ در طول خم $\sigma(t)$ ، موازی است اگر تصویر عمودی $\frac{dv}{dt}(t)$ روی صفحه‌ی مماس بر S در $\sigma(t)$ برای هر t صفر باشد. این باعث می‌شود که ساکنان سطح رویه، تغیری در میدان برداری V در طول σ نبینند.

تذکر ۱.٤ انتقال موازی یک بردار بر طول یک خم در یک رویه، برداری را حاصل می‌کند که به طور کلی با بردار اوَلیه متفاوت است. به این پدیده هولونومی می‌گویند.

فصل ۵
آونگ فوکو

در سال ۱۸۵۱ فوکو، فیزیکدان فرانسوی، آونگی را ساخت که شامل یک توپ سنگین آهنی روی یک سیم به طول حدوداً ٦١ متر بود تا دوران زمین را نشان دهد. فوکو بررسی کرد که دوران زمین باعث دوران صفحه‌ی نوسان آونگ در طول زمان می‌شود. به طوریکه در نهایت آونگ بعد از زمان $T = \frac{24}{sinv_0}$ ساعت (که v_0 نشان دهنده‌ی عرض جغرافیایی مکانی است که آزمایش انجام می‌شود) به جهت اوّلیه‌ی خود بازمی‌گردد.

۱.۵ کره

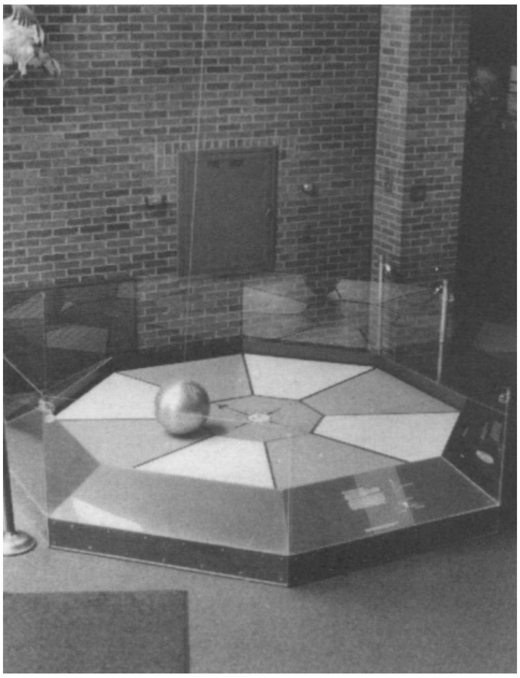
قدم اول ما برای بررسی آونگ فوکو، فهمیدن هندسه کره‌اش است؛ یک کره با شعاع R (که آن را با S^2 نمایش می دهیم) را در نظر بگیرید با نمایش مختصاتی [۱]

$$x(u, v) = (R\ cosu\ cosv, R\ sinu\ cosv, R\ sinv)$$

که $0 \leq u \leq 2\pi$ ، $\frac{-\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ و منظور از نمایش مختصاتی یک دستگاه مختصات روی کره، مانند دستگاه مختصات کروی (ρ, θ, ϕ) با شعاع ثابت $\rho = R$ است.
البته توجه کنیم که نمایش مختصاتی ما با مختصات کروی متفاوت است، چون در آن v نشان دهنده عرض جغرافیای روی کره، یعنی زاویه‌ی بالای خط استوا و نه پایین قطب شمال است.

---

۱ patch



شکل ۱.۵: آونگ فوکو

قطعه x شامل دو خانواده خاص از خم هاست:

۱. طول‌های جغرافیایی $\beta(v) = x(u_0, v)$ که با قرار دادن u به یک مقدار ثابت به دست می آید.

۲. عرض های جغرافیایی $\alpha(u) = x(u, v_0)$ که با قرار دادن v به یک مقدار ثابت به دست می‌آید.

از آنجا که این خم ها در R^3 قرار دارند، بردارهای مماس α' و β' با مشتق گرفتن از هر مولفه عبارات آن ها به دست می آیند. برای بردارهای عرض جغرافیایی و طول جغرافیایی به ترتیب داریم:

$$\alpha' = (-R \sin u \cos v_0, R \cos u \cos v_0, 0)$$

$$|\alpha'| = \sqrt{R^2 \sin^2 u \cos^2 v_0 + R^2 \cos^2 u \cos^2 v_0} = R\cos v$$

$$\beta' = (-R \cos u_0 \sin v, -R \sin u_0 \sin v, R \cos v)$$

$$|\beta'| = \sqrt{R^2 \cos^2 u_0 \sin^2 v + R^2 \sin^2 u_0 \sin^2 v + R^2 \cos^2 v} = R$$

توجه داشته باشید که ضرب داخلی $\alpha'.\beta'$ صفر است، پس α' و β' برای هر u و v بر هم عمودند.

به طور خاص، α' و β' یک پایه برای صفحه مماس TpS^2 که در آن $p = x(u_0, v_0)$ ، هستن. یعنی هر بردار مماس w بر $x(u,t)$ به طور یکتا به صورت $w = A\alpha' + B\beta'$ برای اعداد حقیقی A, B نوشته می‌شود.

این پایه برای صفحه مماس می‌تواند به یک پایه‌ی R^3 به طوری توسیع داده شود که یک بردار عمودی بر هر روی α', β' یعنی ضرب خارجی $\alpha' \times \beta'$ را هم در پایه نظر بگیریم.

در واقع، اگر بردارهای یکه در جهت α ، β' و $\alpha' \times \beta'$ را از تقسیم این بردارها بر طولشان در نظر بگیریم؛ بردارها در پایه یکه‌ی ما عبارت خواهند بود از:

$$E_1 = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$E_2 = \frac{\beta'}{|\beta'|} = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v)$$

$$U = \frac{\alpha' \times \beta'}{|\alpha' \times \beta'|} = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$$

پایه $\{E_1, E_2, U\}$ چارچوبی برای مقایسه‌ی هندسه R^3 با هندسه‌ای که از دیدگاه یک ساکن دو بعدی کره دیده می شود. چون ادراک چنین فردی محدود به فضای دو بعدی توسعه یافته توسط E_1, E_2 است؛ هر رویداد یا شئ در R^3 توسط ساکن کره تنها از طریق تصویرش روی صفحه مماس دیده می شود. به طور خاص، هر بردار ω در R^3 را می توان به طور یکتا به صورت $\omega = aE_1 + bE_2 + cU$ نوشت اما ساکن کره تنها $aE_1 + bE_2$ را می بیند. دیدگاهی که اینجا توصیف شد، برای پیدا کردن شباهت های بین هندسه اقلیدسی و هندسه خم مفید است. برای مثال، در R^3 می‌دانیم که خطوطی که می توانند برای p, v ثابت به فرم $\gamma(t) = \rho + tv$ پارامتری شوند، کوتاه‌ترین مسیر بین نقاط اند. علاوه بر این، از پارامتری سازی واضح است که خطوط با بردارهای شتاب صفر، مشخص می‌شوند. به طور مشابه، کوتاه ترین مسیرها(ژئودریک ها) با بردارهای با شتاب صفر روی کره شخص می‌شوند.

۲.۵ بردارهای موازی روی کره

گفتن اینکه دو بردار مماس روی کره در صفحات مماس مختلف با هم موازی اند، به چه معنا است؟

این قطعاً به این معنا نیست که به طور کلی دو بردار با هم در R^3 موازی اند. برای مثال یک دایره با عرض جغرافیایی v_0 را روی کره S^2 در نظر بگیریم.

$$\alpha(u) = (R \cos u \cos v_0, R \sin u \cos v_0, R \sin v_0)$$

در $\mathbb{R}^3$ به راحتی می توان دید که $\alpha'(0)$ عبارت است از:

$$\alpha'(0) = -R \sin v_0 \cos v_0 \ E_2(\frac{\pi}{2}, v_0) + R \cos^2 v_0 \ U(\frac{\pi}{2}, v_0)$$

$$= -R \sin v_0 \cos v_0 (0, -\sin v_0, \cos v_0) + R \cos^2 v_0 (0, \cos v_0, \sin v_0)$$

$$= (0, R \sin^2 v_0 \cos v_0 + R \cos^2 v_0 \cos v_0, -R \sin v_0 \cos^2 v_0 + R \sin v_0 \cos^2 v_0)$$

$$= (0, R \cos v_0, 0)$$

بر اساس پایه $\{E_1, E_2, U\}$ در $\alpha(\frac{\pi}{2})$ ، مولفه‌ی ناصفر نشان می‌دهد که هیچ برداری از صفحه‌ی مماس در $\alpha(\frac{\pi}{2})$ با $\alpha'(0)$ در $\mathbb{R}^3$ موازی نیست.

یک روش برای مقایسه‌ی بردارها در طول خم $\gamma(t)$ در $\mathbb{R}^3$ این است که با یک بردار مماس مانند v_0 در $\gamma(0)$ شروع کنیم و یک میدان از بردارهای مماس $v(t)$ در $\gamma(t)$ که نسبت به t مشتق پذیرند بسازیم. میزان تغییر بردارها در طول γ می تواند به صورت $\frac{d}{dt}v(t)$ محاسبه شود. می‌توانیم بگوییم یک میدان برداری V در طول γ موازی است اگر برای هر t ، $\frac{d}{dt}V(t) = 0$.

ما می‌توانیم این ایده را با یک روش ساده به میدان برداری $V(u)$ مماس بر طول دایره عرض جغرافیایی $\alpha(u)$ در S^2 توسعه دهیم.بدین روش که بگوییم V در طول α موازی است اگر $\frac{d}{du}V(u)$ هیچ مولفه $E_1(u)$ یا $E_2(u)$ نداشته باشد. این یعنی برای هر u ، $\frac{d}{du}V(u) = C(u)U(u)$ یا به طور مشابه، یعنی تصویر $\frac{d}{du}V(u)$ روی صفحه

مماس بر $\alpha(u)$ ، $\frac{d}{du}V(u)$ را به صفر تصویر می کند. می‌توانیم به این موضوع این گونه فکر کنیم که مانند این است که ساکنان کره تغییری در بردارها در طول α نمی بینند. برای بازگشت به دایره عرض جغرافیاییمان، فرض کنیم $V(u)$ یک میدان بردار موازی در طول عرض جغرافیایی $\alpha(u)$ باشد.
آنگاه می‌توانیم بنویسیم $V(u) = A(u)\ E_1(u) + B(u)\ E_2(u)$. در نتیجه داریم:

لم ۱.۵ V طول ثابت دارد.

برهان. چون V موازی است، $\frac{d}{du}V(u) = C(u)\ U(u)$ و بنابراین،

$$\frac{d}{du}(V(u).V(u)) = C(u)\ V(u).V(u) = 0$$

از آنجا که $U.V$ ثابت است، $|V|$ هم ثابت است.

از عبارتمان برای $V(u)$ می‌بینیم که باید داشته باشیم $A(u)^2 + B(u)^2 = |V|^2 = L^2$ که L در آن یک ثابت است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$A(u) = L\ \cos\theta(u), B(u) = L\ \sin\theta(u)$$

که در آن $\theta(u)$ زاویه بین $V(u)$ و $E_1(u)$ است، پس داریم:

$$V(u) = L\ \cos\theta(u)E_1(u) + L\ \sin\theta(u)\ E_2(u)$$

از این عبارت واضح است که برای محاسبه $\frac{d}{du}\ V(u)$ ابتدا باید $\frac{d}{du}E_1(u), \frac{d}{du}E_2(u)$ را محاسبه کنیم. ما این کار را بر حسب هر مولفه انجام می دهیم.

$$\frac{d}{du}E_1(-\cos u, \sin u, 0)$$
$$\frac{d}{du}E_2 = (\sin u\ \sin v_0, -\cos u \sin v_0, 0)$$

در نتیجه داریم:

گزاره ۱.۵

$$\frac{d}{du}E_1 = \sin v_0\ E_2 - \cos v_0 U$$

$$\frac{d}{du}\ E_2 = -\sin v_0 E_1$$

تذکر ۱.۵ توجه داشته باشید که با توجه به گزاره، هیچ کدام از E_1 یا E_2 در طول α موازی نیستند.

قضیه ۱.۵ فرض کنیم v_0 یک بردار موازی در $\alpha(0)$ باشد ، آنگاه میدان برداری V در طول α وجود دارد که $V(0) = v_0$.

برهان. عبارت بالا برای $v(u)$ نشان می دهد که میدان برداری موازی v بر اساس زاویه $\theta(u)$ تعیین می‌شود. از شرط این که V موازی است برای تعیین دقیق $\theta(u)$ استفاده می‌کنیم. بر اساس قاعده‌ی حاصلضربی و زنجیری داریم:

$$\frac{d}{du}V(u) = -\sin\theta\frac{d\theta}{du}\ E_1 + \cos\theta\frac{d}{du}\ E_1 + \cos\theta\frac{d\theta}{du}\ E_2 + \sin\theta\frac{d}{du}\ E_2$$

با توجه به محاسباتمان از مشتق های E_1, E_2 در طول α داریم:

$$\frac{d}{du}V(u) = -\sin\theta[\sin v_0 + \frac{d\theta}{du}]E_1 + \cos\theta[\sin v_0 + \frac{d\theta}{du}]E_2 - \cos\theta\ \cos v_0\ U$$

چون یک V موازی نمی تواند مولفه های E_1 یا E_2 داشته باشد و از آنجا که $\sin\theta, \cos\theta$ نمی توانند همزمان صفر باشند، باید داشته باشیم $\frac{d\theta}{du} = -\sin v_0$ یا

$$\theta(u) = \theta(0) - \int \sin v_0\ du = \theta - u\ \sin v_0$$

پس این فرمول θ را تعریف می کند و در نتیجه آن، میدان برداری موازی V را تعریف می‌کند.

۳.۵ آونگ فوکو

برای اینکه آونگ فوکو را از دیدگاه هندسی بررسی کنیم؛ فرض کنیم زمین نمی‌چرخد. به جای آن آونگ در عرض جغرافیایی V_0 قرار دارد و هر ۲۴ ساعت یکبار با سرعت ثابت روی دایره‌ی عرض جغرافیایی حرکت می‌کند؛ که این معادل با حرکت اصلی است. نخ بلند آونگ و حرکت آرام دور دایره‌ی عرض جغرافیایی دو نتیجه خواهد

۱. نخ بلند باعث میشود آونگ تنها مقدار کمی نوسان کند. بنابراین، میتوانیم هر بردار رفت یا برگشت آن را یک بردار مماس بر کره فرض کنیم. با جهت‌دهی یکسان بردارها، میدان برداری صفحه ی جهت های نوسان آونگ به دست می آید. در هر زمان t یک بردار جهت نوسان $V(t)$ وجود دارد و همه ی این بردارها را می‌توان در طول دایره‌ی عرض جغرافیایی $\alpha(u)$ قرارداد؛ به طوریکه به هر لحظه ی زمان t ، نقطه ی یکتایی نسبت داده می‌شود که حرکت آونگ در طول $\alpha(u)$ را توصیف می‌کند. بنابراین برای نشان دادن میدان برداری صفحه ی نوسان از $V(u)$ استفاده می‌کنیم.

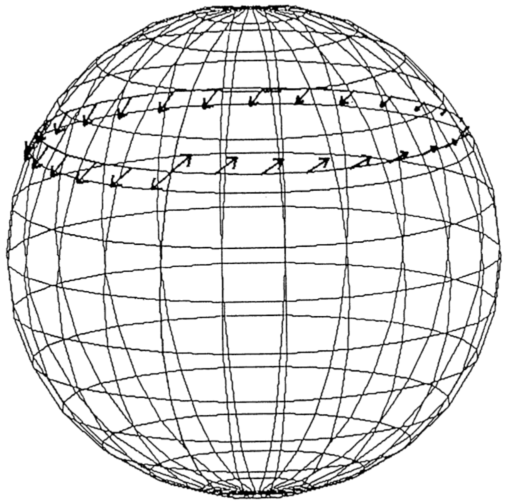
۲. چون به آرامی دور دایره ی عرض جغرافیایی حرکت می‌کنیم؛ اثر نیروی مرکزگرا روی آونگ را نسبت به نیروی به سمت پایین mg ، می‌توان نادیده گرفت. این یعنی تنها نیرویی که آونگ احساس می‌کند در جهت عمودی U است. بنابراین، به صفحه ی نوسان عمودی آونگ هیچ نیروی عمودی وارد نمی‌شود؛ بنابراین در نظر یک ساکن دو بعدی کره، ساکن به نظر می رسد.یعنی ، تصویر آن در صفحه‌ی مماس Ts^2 به صورت

$$\textsf{proj}_{TS^2}\frac{dV(u)}{du}=0$$

است که در آن، با توجه به پارامتر سازی انجام شده: مشتق همورد به مشتق عادی تبدیل می شود.

قضیه ۲.۵ میدان برداری نسبت داده شده به آونگ فوکو (V) ، در طول دایره عرض جغرافیایی موازی است.

این قضیه با توجه به توضیحات قبلی نتیجه می‌شود. واضح است که زمانی که آونگ فوکو را یک بار دور دایره عرض جغرافیایی α انتقال می‌دهیم، هولونومی میدان برداری موازی V را $-2\pi\textsf{sin}V_0$ دور می‌زند. سرعت زاویه ای این بردار



شکل ۲.۵: یک میدان برداری موازی روی کره

دوران $w = \frac{2\pi \sin V_0}{24\ hours}$ خواهد بود.

معادل بودن مدلمان با حالات فیزیکی قضیه ی زیر را نتیجه می‌دهد:

قضیه ۳.۵ دوره ی پیشروی آونگ فوکو عبارت است از:

$$\frac{2\pi\ rads}{w} = \frac{24}{\sin V_0} hours$$

نتیجه ۱.۵ کره ی زمین در طول دایره های عرض جغرافیایی دوران می‌کند.

فصل ۶

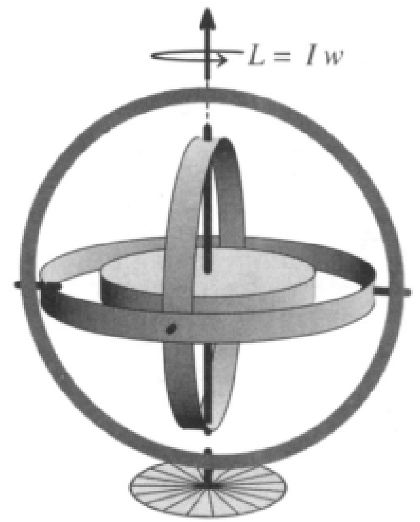
دوران توماس-ویگنر

چرخش توماس مربوط به تغیر جهت محور چرخش یک ژیروسکوپ بدون گشتاور است. یک ژیروسکوپ بدون گشتاور دستگاهی است که بر اساس پایداری تکانه زاویه‌ای، جهتش را حفظ می‌کند. شامل یک دیسک چرخان است که محور آن آزادانه می‌تواند هر جهت‌گیری‌ای داشته باشد؛ این کار با استفاده از قرار دادن یک دیسک روی سه طوقه ، به نام گیمبال [۱] ممکن می‌شود. در نتیجه، گشتاور M روی دیسک چرخان نسبت به مرکز جرمش صفر است. معادله‌ای که رفتار دیسک نسبت به زمان را نشان می‌دهد، $M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(Iw)}{dt}$ است که L و I در آن به ترتیب، تکانه‌ی زاویه‌ای و جرم زاویه‌ای دیسک هستند و w سرعت زاویه‌ای را نشان می‌دهد. به طور خاص، اگر فرض کنیم ژیروسکوپ حول یک مسیر دایره‌ای می‌چرخد، مکان اوَلیه و نهایی محور چرخش آن بعد از یک دور کامل یکسان است.
این نتیجه‌ی مکانیک نیوتنی در نسبیت خاص درست نیست. در این حالت، محور چرخش یک ژیروسکوپ بدون گشتاور، بعد ار یک چرخش کامل دور دایره با سرعت ثابت v ، به اندازه‌ی زاویه‌ی σ می‌چرخد.

$$\sigma = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right)$$

---

۱ gimball



شکل ۱.۶: ژیروسکوپ بدون گشتاور

۱.۶ فضای سرعت‌های نسبی

در این بخش فرض شده است، خواننده با مطالب موجود در پیوست آشنایی دارد.

فضای مینکوفسکی R_1^4 (R^4 با متر لورنتر) را در نظر بگیرید. در مختصات استاندارد (x_1, x_2, x_3, x_0) داریم: $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2$. می‌دانیم اگر $X = (x_1, x_2, x_3, x_0)$ و $Y = (y_1, y_2, y_3, y_0)$:

$|X|^2 = X.X$ و $X.Y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_0y_0$. در اینجا همه ی تبدیلاتی که فاصله را حفظ می‌کنند، تبدیلات لورنتر هستند.

فرض کنیم $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_0(t))$ موقعیت یک ذره در زمان t در یک مرجع لخت باشد. خط جهان این ذره را با $X(t) = (x(t), ct)$ نشان می دهیم که c در آن سرعت نور و آن را معادل با ۱ در نظر می گیریم. توجه داشته باشیم که سرعت ذره عبارتست از:

$v = |\frac{dX}{dt}| < c = 1$ و بنابراین $\frac{dX}{dt}$ زمان‌گون است یعنی:

$$|\frac{dX}{dt}|^2 = |\frac{dX}{dt}.\frac{dX}{dt}| < 0$$

τ زمان‌ویژه‌ی پارامتر طول کمان خط جهانی است یعنی پارامتری که در آن $|\frac{dX}{d\tau}|=-1$ برای این پارامتر داریم:

$$-1=|\frac{dX}{d\tau}|^2=|(\frac{dx}{d\tau},\frac{dt}{d\tau})|^2=(|\frac{dx}{dt}|^2-1)(\frac{dt}{d\tau})^2=(v^2-1)(\frac{dt}{d\tau})$$

و درنتیجه:

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

این کسر را عامل گاما می‌نامیم و معمولا با γ_v نشان میدهیم.

از عامل گاما میبینیم که τ زمانی است که توسط یک ساعت ساکن نسبت به ذره اندازه گیری می‌شود. زیرا در حالتی که $v=0$ آنگاه. $\frac{dt}{d\tau}=1$ و بنابراین $t=\tau+a$ که a یک عدد ثابت است.

سرعت فضا-زمان ، بردار سرعت فضا-زمان

$$V=(V_1,V_2,V_3,V_0)=\frac{d\chi}{d\tau}$$

است که با توجه به تعریف زمان‌ویژه در $|V|^2=V_1^2+V_2^2+V_3^2-V_0^2=-1$ صدق می‌کند.

برای ساده سازی، تنها دو بعد مکانی را بررسی میکنیم. به این ترتیب فضا-زمان به R_1^3 یعنی R^3 همراه با متر لورنتر کاهش می یابد. در این حالت، معادله ی زیر هذلولی گون در صفحه ی H را نشان می‌دهد:

$$V_1^2+V_2^2-V_0^2=-1$$

با در نظر گرفتم متر لورنتز در R^3 ، H دقیقا مجموعه ی $\{V\in R^3 : |V|^2=-1\}$ است.

در اینجا فقط هذلولی گون صفحه ی بالایی $V_0>0$ را در نظر میگیریم و آن را با H^+ نشان میدهیم و متر لورنتر را روی آن در نظر می‌گیریم.مختصات شبه کره‌ی

R^3 یعنی (ρ, χ, φ) به صورت زیر به دست می آید.

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = \rho \sinh\chi \cos\varphi \\ V_2 = \rho \sinh\chi \sin\varphi \\ V_0 = \rho \cosh\chi \end{array}\right\}.$$

که در آن $\rho \geq 0$ و $\chi \geq 0$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

در این مختصات زمانی که ρ مقداری ثابت دار شبه کره‌ای با شعاع موهومی ρ داریم.به طور خاص، $\rho = 1$ و (χ, φ) مختصات H^+ هستند.

در مختصات شبه کروی R^3 متر لورنتر به صورت زیر است:

$$ds^2 = -d\rho^2 + \rho^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\varphi^2)$$

و متر ریمانی که روی هذلولی گون $\rho = 1$ القا میشود به صورت زیر است:

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi d\varphi^2$$

خمیدگی هذلولی‌گون با این متر ثابت و برابر با -1 است. پس صفحه بالایی H^+ هذلولی‌گون مدلی از فضای هذلولی دو بعدی است.
برای اینکه رابطه‌ی پارامتر حرکت یعنی v و پارامترهندسی یعنی χ را به دست آوریم، به سرعت فضا-زمان $V = \frac{d\chi}{d\tau}$ بر اساس χ توجه کنیم.

$$V = (\sinh\chi \cos\varphi, \sinh\chi \sin\varphi, \cosh\chi)$$

و براساس v داریم:

$$V = \frac{dX}{dt}\gamma_v = (v\cos\varphi, v\sin\varphi, 1)\gamma_v$$

پس $\sinh\chi = v\gamma_v$ و $\cosh\chi = \gamma_v$ در نتیجه: $\tanh\chi = v$.

۲.۶ انتقال مثبت در H^+

مختصات شبه کروی (χ, φ) در H^+ را در نظر بگیریم. خم‌هایی که φ در آن‌ها ثابت است را طول‌های جغرافیایی و χ در آن‌ها ثابت است را عرض‌های جغرافیایی می‌نامیم. با مشتق‌گیری از

$$V = (\textsf{sinh}\chi \textsf{cos}\varphi, \textsf{sinh}\chi \textsf{sin}\varphi, \textsf{cosh}\chi)$$

بردارهای مماس به این خم‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$V_\chi(\chi, \varphi) = (\textsf{cosh}\chi \textsf{cos}\varphi, \textsf{cosh}\chi \textsf{sin}\varphi, \textsf{sinh}\chi)$$

$$V_\varphi(\chi, \varphi) = (-\textsf{sinh}\chi \textsf{sin}\varphi, \textsf{sinh}\chi \textsf{cos}\varphi, 0)$$

در متر ریمانی القا شده روی H^+ ، $|V_\chi| = 1$ و $|V_\varphi| = \textsf{sinh}\chi$. $e_1 = V_\chi$ و $e_2 = \frac{V_\varphi}{|V_\varphi|} = (-\textsf{sin}\varphi, \textsf{cos}\phi, 0)$ یک پایه‌ی متعامد یکه روی فضای مماس به H^+ در هر نقطه تعریف می‌کند. اگر قرار دهیم $e_3 = V$ ، آنگاه $\{e_1, e_2, e_3\}$ یک پایه‌ی متعامد مثبت بر $\mathbb{R}^3$ در متر لورنتز است.

تذکر ۱.۶ صفحه‌ی مماس بر H^+ در نقطه‌ی V ، زیر فضای $\mathbb{R}^3$ و عمود بر V است. این مشابه این است که کره‌ی عادی در فضای $\mathbb{R}^3$ با متر اقلیدسی قرار گیرد.

تعریف ۱.۶ یک میدان برداری $S(u)$ که در طول خم $\sigma(u)$ در H^+ تعریف شده است و در هر نقطه‌ی مماس به هذلولی‌گون است را می‌گوییم در طول σ موازی است اگر مشتق $\frac{dS}{du}(u)$ ، مولفه‌ای در جهت e_3 داشته باشد. به بیان دیگر:

$$\frac{dS}{du}(u) = C(u)e_3(u)$$

گزاره ۱.۶ یک میدان برداری موازی در طول یک خم در فضای هذلولی‌گون H^+ طول ثابتی دارد.

برهان. فرض کنیم $S(u)$ یک میدان برداری در طول خم $\sigma(u)$ در هذلولی‌گون است.

آنگاه چون $\frac{dS}{du}(u) = C(u)e_3(u)$ داریم:

$$\frac{d}{du}(S.S) = 2\frac{dS}{du}.S = 2C(u)e_3(u).S = 0$$

حالتی که σ یک دایره‌ی عرض از مبدأ یک هذلولی‌گون است را در نظر بگیریم. یعنی در مختصات شبه کروی χ ثابت است. فرض کنیم $S(\varphi)$ یک میدان برداری موازی در طول σ باشد. از آنجا که $|S(\varphi)|$ یک ثابت است، می‌توانیم فرض کنیم $|S| = 1$ و زاویه‌ی بین S و دایره‌ی عرض از مبدأ را با $\theta(\varphi)$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$S(\varphi) = \sin\theta(\varphi)e_1(\varphi) + \cos\theta(\varphi)e_2(\varphi)$$

می‌خواهیم تغیرات $\theta(\varphi)$ را بررسی کنیم. با مشتق گرفتن رابطه‌ی بالا داریم:

$$\frac{dS}{d\varphi} = \cos\theta(\varphi)\frac{d\theta}{d\varphi}e_1(\varphi) + \sin\theta(\varphi)\frac{de_1}{d\varphi} - \sin\theta(\varphi)\frac{d\theta}{d\varphi}e_2(\varphi) + \cos\theta(\varphi)\frac{de_2}{d\varphi}$$

از طرفی دیگر داریم:

$$\frac{de_1}{d\varphi} = (-\cosh\chi\sin\varphi, \cosh\chi\cos\varphi, 0) = \cosh\chi e_2(\varphi)$$

$$\frac{de_2}{d\varphi} = (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0) = -\cosh\chi e_1(\varphi) + \sinh\chi e_3(\varphi)$$

. در نتیجه داریم:

$$\frac{dS}{d\varphi} = \cos\theta(\varphi)(\frac{d\theta}{d\varphi} + \cosh\chi)e_1(\varphi) - \sin\theta(\varphi)(\frac{d\theta}{d\varphi} + \cosh\chi)e_2(\varphi)$$
$$+ \sin\theta(\varphi)\sinh\chi e_3(\varphi)$$

برای اینکه $S(\varphi)$ در طول دایره‌ی عرض جغرافیایی $\sigma(\varphi)$ موازی باشد، باید مولفه‌های e_1 و e_2 در $\frac{dS}{d\varphi}$ صفر باشند. این نتیجه می‌دهد:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = -\cosh\chi$$

بنابراین

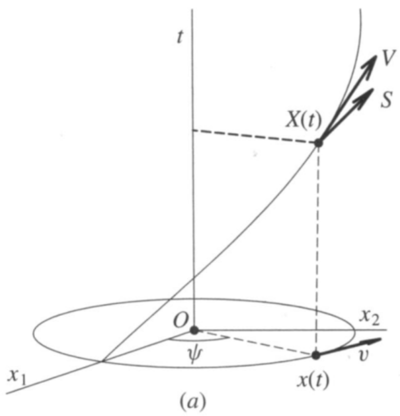
$$\theta(\varphi) = \theta(0) - \varphi\cosh\chi$$

پس گزاره‌ی زیر برقرار است:

گزاره ۲.۶ فرض کنیم $S(0) = \sin\theta(0)e_1(0) + \cos\theta(0)e_2(0)$ یک بردار مماس بر هذلولی‌گون $H+$ در نقطه‌ی $(\chi, \varphi = 0)$ باشد، آنگاه انتقال موازی $S(0)$ در طول دایره‌ی عرض جغرافیایی با χ ثابت، توسط $S(\varphi) = \sin\theta(\varphi)e_1(\varphi) + \cos\theta(\varphi)e_2(\varphi)$ به دست می‌آید که در آن $\theta(\varphi) = \theta(0) - \varphi\cosh\chi$.

۳.۶ دوران توماس–ویگنر

فرض کنیم یک فضاپیما با سرعت ثابت $v = \tanh\chi$ نسبت به مرجع لخت در مداری دایره‌ای با شعاع R در حال حرکت است.
فرض کنیم $x(t) = (R\cos\psi(t), R\sin\psi(t))$ بردار موقعیت مکانی آن در مرجع مرکزی $\{O, x_1, x_2\}$ باشد؛ $\psi(t) = \frac{v}{R}(t)$ زاویه‌ی بین این بردار و محور x_1 است.
خط جهانی آن در فضای مینکوفسکی یک مارپیچ است.



شکل ۲.۶: مدار دایره‌ای، $x(t)$ ، ذره (فضاپیما) و خط جهانی آن

موقعیت فضا–زمان آن $X = (x(t), t)$ است و سرعت فضا–زمان آن توسط رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{dX}{d\tau} = \frac{dX}{dt}\frac{dt}{d\tau} = (-R\dot{\psi}\sin\psi, R\dot{\psi}\cos\psi, 1)\gamma_v$$

$$= (-v\gamma_v\sin\psi, v\gamma_v\cos\psi, \gamma_v)$$

$$= (-\sinh\chi\sin\psi, \sinh\chi\cos\psi, \cosh\chi)$$

حال فرض کنیم که فضاپیما یک ژیروسکوپ بدون گشتاور را حمل می‌کند. فرض کنیم S بردار نرمال محور چرخش ژیرسکوپ در مرجع ساکن لحظه‌ای فضاپیماست. در این مرجع، بردار فضا-زمان با $S = (\mathsf{S}, 0)$ مشخص می‌شود. بنابراین $|S|^2 = |\mathsf{S}|^2 = 1$. به طور کلی، S در مرجع‌های دیگر کاملاً مکانی نیست.

علاوه بر این، در مرجع ساکن لحظه‌ای فضاپیما، سرعت فضاپیما با $V = (0, 1)$ داده می‌شود. پس در این مرجع $S.V = 0$ در نتیجه با توجه به پایداری متر لورنتز تحت تبدیل لورنتز، این رابطه برقرار باقی می‌ماند.

از طرف دیگر، از آنجا که گشتاور وجود ندارد، محور چرخش ژیروسکوپ، هیچ چرخش مکانی ندارد. این بدین معناست که $\frac{dS}{dt}$ مولفه‌ی مکانی در مرجع ساکن لحظه‌ای ندارد؛ یا به طور معادل $\frac{dS}{d\tau}$ در جهت $V = (0, 1)$ است. پس $\frac{dS}{dt}$ در هر مرجعی در جهت V است. با حرکت فضاپیما با سرعت ثابت $v = \mathsf{tanh}\chi$ در یک مدار دایره‌ای ، V در جهان‌نمای مارپیچی حرکت می‌کند و یک دایره با عرض جغرافیایی ثابت χ را در فضای سرعت‌های H^+ توصیف می‌کند. بنابراین، چون S بر V عمود است، S در صفحه‌های مماس به H^+ در طول این دایره قرار دارد. پس S یک میدان برداری مماس به H^+ در طول دایره‌ی با عرض جغرافیایی ثابت χ است. S در طول این دایره‌ی عرض جغرافیایی موازی است. زیرا $\frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau}$ در جهت V است. استدلال مشابهی برای $\frac{dS}{d\varphi}$ وجود دارد.

بنابراین، همزمان که فضاپیما زاویه‌ی φ را در مدار دایره‌ای خود دوران می‌کند ، نقطه‌ی V در فضای همه‌ی سرعت‌ها با زاویه‌ی یکسان φ در دایره‌ای که χ آن در H^+ ثابت است ($\mathsf{tanh}\chi = v$) دوران می‌کند. آنگاه، با حرکت φ از ۰ به 2π ، زاویه‌ای که S نسبت به مکان اوّلیه‌اش دوران می‌کند، $\sigma(2\pi) = 2\pi(1 - \mathsf{cosh}\chi)$ است.

در نتیجه ثابت کرده‌ایم:

گزاره ۳.۶ در یک دور کامل در دایره ، زاویه‌ای که توسط محور یک ژیروسکوپ

بدون گشتاور دوران می‌یابد عبارت است از:

$$\sigma(2\pi) = 2\pi(1 - \cosh\chi) = 2\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}})$$

این پدیده دوران توماس–ویگنر و $\sigma(2\pi)$ زاویه‌ی توماس–ویگنر نام دارد.

پیوست: مقدمه‌ای بر نسبیت خاص

فیزیک نیوتنی و نسبیت خاص تنها در یکی از اصول اوّلیه‌شان با یکدیگر تفاوت دارند. اما همین موضوع باعث می‌شود قوانینی که با استفاده از آن دنیا را توصیف می کنند بسیار متفاوت باشد. سوالِ " از تو کدام دورتر است: یک توپ که یک متر از دست راستت فاصله دارد یا یک توپ که یک دقیقه ی دیگر در دستت خواهد بود؟" جوابی در فیزیک نیوتنی ندارد، زیرا قانونی برای تفاوت قائل شدن بین فاصله زمانی و فاصله مکانی وجود ندارد. در نسبیت، فضا و زمان در فضا–زمان ترکیب می‌شوند و هر عضو فضا–زمان یک رویداد نام دارد. "توپی که الان یک متر از دستت دورتر است" دو رویداد را نشان می دهد: یک رویداد "جایی که تو قرار داری" و رویداد دیگر "توپی که یک دقیقه دیگر در مکان دست تو قرار دارد" .

در فیزیک نیوتنی تنها یک ساعت و یک دستگاه مختصات وجود دارد. در حالیکه در نسبیت، هر نقطه در فضا مختصات خودش را دارد که ممکن است سرعت تغییر آن با همسایه هایش متفاوت باشد.

در نسبیت، نور در هندسه ی فضا–زمان قرار دارد. به این صورت که سرعت نور در اندازه گیری هر نقطه در فضا یکسان است و سرعت نور حد بالای سرعتی است هر ذره فیزیکی می‌تواند داشته باشد. در فیزیک نیوتنی هیچ حد بالایی روی سرعت یک ذره وجود ندارد.

در فیزیک نیوتنی، زمان در فضای اقلیدسی سه–بعدی به عنوان یک پارامتر در نظرگرفته می شود. در صورتی که، نسبیت از متر لورنتز (متر مینکوفسکی) استفاده می کند تا فضا و زمان را در فضا–زمان به یکدیگر پیوند دهد و یک فضای

مینکوفسکی چهار-بعدی بسازد.

نسبیت خاص شامل این فرض است که گرانش در همه ی جهت ها یکنواخت است؛ یا به طور مشابه ، فضا-زمان تخت است. از این فرض در بسیاری از محاسبات استفاده می کنیم. برای مثال محاسباتی که شامل یک خم هموارند را می توانیم با محاسبه روی یک فضا در همسایگی کوچکی (مثل شیب یک خم) جایگزین کنیم. نسبیت خاص دارای دو اصل موضوعی است:

۱. اصل نسبیت (گالیله): هیچ آزمایشی نمی تواند سرعت مطلق یک ناظر را اندازه گیری کند. نتایج هر آزمایش که توسط یک ناظر انجام می شود و به سرعت ناظر نسبت به سایر ناظرین که در آزمایش شرکت ندارند، بستگی ندارد.

۲. جهانی بودن سرعت نور(انیشتین): سرعت نور نسبت به هر ناظر بدون شتاب $3 \times 10^8 m/s$ است (صرف نظر از حرکت منبع نور نسبت به ناظر).

فضای مینکوفسکی

ساختار فضا-زمان را با فضای $\mathbb{R}^4_1$ مینکوفسکی نشان می‌دهیم. ما در فضای چهار بعدی مینکوفسکی هستیم اما حواس ما فکر می‌کنند در فضای اقلیدسی سه بعدی قرار داریم و زمان یک پارامتر است. در فضای اقلیدسی ، فاصله‌ی بین دو نقطه توسط قضیه‌ی فیثاغورث، که در متر اقلیدسی است، محاسبه می شود. ما در نسبیت از متر مینکوفسکی برای بدست آوردن فاصله دو نقطه(یا رویداد) در فضا-زمان استفاده می کنیم.
در نسبیت مولفه های بردارها را با بالا نویس نشان می دهیم و اندیس‌گذاری را از صفر شروع می‌کنیم. بنابراین در $\mathbb{R}^4$ $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. در حالت اقلیدسی R^4 طول یک بردار توسط ضرب داخلی اقلیدسی به صورت زیر به دست می آید:

$$||x|| = \sqrt{x.x} = \sqrt{(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

طول یک بردار در فضا–زمان $\mathbb{R}^4_1$ ضرب داخلی لورنتز $<,>$ را بر کار می‌گیرد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< x.y >= -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

به طور مشابه بردار x در $\mathbb{R}^4$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||x|| = \sqrt{(| < x,x > |)} = \sqrt{(-x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

$$= | - (x^0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$= | - (x^0)^2 + |\vec{x}|^2|^{\frac{1}{2}}$$

دلیل اینکه مجذور مولفه‌ی اول کسر می‌شود، ثابت نگه داشتن سرعت نور برای ناظران مختلف است.

مثال ١.٦ فرض کنیم دو ناظر، یک پرتوی نور را اندازه می‌گیرند. یک ناظر پرتو را در فاصله $|\vec{u}|$ و زمان t ، دیگری پرتو را در فاصله $|\vec{\zeta}|$ و زمان τ اندازه می‌گیرد. پس سرعت نور در هر دو معادله زیر صدق می کند:

$$|\vec{u}| = (ct)^2$$

$$\vec{\zeta} = (c\tau)^2$$

و بنابراین

$$0 = -(ct)^2 + |\vec{x}| = -(c\tau)^2 + |\zeta|^2$$

اگر $x = (ct, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$ مسیر حرکت نور باشد آنگاه $||x|| = 0$. پ یک x ناصفر می تواند طول صفر داشته باشد.

دستگاه‌های مختصات و فضا-زمان

یک رویداد را زمان و مکان خاصی تعریف می کنیم، برای مثال جایی که الان نشسته اید. فضا-زمان مجموعه ای از همه رویدادها و در واقع یک خمینه است.
دو اصل موضوعی نسبیت خاص معادل این است که دستگاه مختصات به خمینه‌ی فضا-زمان ساختار موضعی فضای برداری $\mathbb{R}^4_1$ را نسبت می‌دهد.به این ترتیب می‌توانیم از رویدادهای موجود در همسایگی ها صحبت کنیم. به طور دقیق تر، برای رویداد q در فضا-زمان و دستگاه مختصات x ، مختصات فضا-زمان مینکوفسکی q به صورت زیر نشان داده می شود.

$$xq = (x^0q, x^1q, x^2q, x^3q) = (x^0q, \vec{q}) \ \in \mathbb{R}^4_1$$

که در آن u^0q نشان دهنده زمانی است که q اتفاق می‌افتد و $\vec{q} = (x^1q, x^2q, x^3q)$ مختصات مکان q است. در واقع x یک تابع است که روی یک نقطه‌ی q در خمینه اعمال می شود. توجه کنیم که این ساخت ضروری است زیرا هر ناظر دستگاه مختصات خود را دارد. فاصیله‌ی فضا-زمان در رویداد p و q در فضای مینکوفسکی طول برداری است که آن ها را به یکدیگر متصل می‌کند.

$$pq = ||\vec{pq}||$$

$$= | < xq - xp, xq - xp > |^{\frac{1}{2}}$$
$$= | - (x^0q - x^0p)^2 + \sum_{i=1}^{3} (x^iq - x^ip)^2|^{\frac{1}{2}}$$
$$= | - (x^0q - x^0p)^2 + |\vec{q} - \vec{p}||^{\frac{1}{2}}$$

در فضای مختصات مینکوفسکی از واحدهای هندسی، سرعت نور یعنی c و ثابت گرانش یعنی G ، استفاده می‌کنیم و آن ها را برابر یک قرار می‌دهیم. به این ترتیب مختصات فضا و زمان توسط c و G بدون بعد خواهند بود. برای مثال، یک ثانیه را یک نور-ثانیه یا زمانی که طول می کشد تا نور 3×10^{10} سانتی متر را طی کند، تعبیر می کنیم.

$$c = 3 \times (10)^{10} \ \frac{cm}{sec}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{gsec^2}$$

سرعت نور سانتی متر را به ثانیه و ثابت گرانش رابطه آن ها را با گرم مشخص می کند . به این ترتیب، همه‌ی اندازه گیری ها را در واحدهای مختلف می‌توانیم بیان کنیم. حال می خواهیم سوالی که در ابتدا بیان شد را پاسخ دهیم.: ”کدام دورتر است؟: توپی که یک متر از دست راستت فاصله دارد، یا توپی که یک دقیقه دیگر در دستت خواهد بود؟” با استفاده از $c = 1'7960'279'040 \frac{m}{min}$ داریم:

توپی که الان یک متر فاصله دارد:

$$\sqrt{|-0^2 + 1^2|} = 1\ m$$

توپی که یک دقیقه دیگر در دست تو است:

$$\sqrt{|-c^2 + 0^2|} = 1.8 \times 10^{10} m = 1\ min$$

یا در واحد دقیقه داریم:

توپی که الان یک متر فاصله دارد:

$$\sqrt{|-0^2 + (\frac{1}{c})^2|} \approx 1.7 \times 10^{-11}\ min$$

توپی که یک دقیقه دیگر در دست تو است:

$$\sqrt{|-1^2 + 0^2|} = 1\ min$$

اندازه گیری فاصله

در فضای اقلیدسی، فاصله را با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث به دست می آوریم. اینکه از چه دستگاه مختصاتی استفاده می‌کنیم تا زمانی که به توان با استفاده از یک تبدیل گالیله آن‌ها را به یکدیگر تبدیل کرد، اهمیتی ندارد. در واقع تعریف یک تبدیل گالیله، تبدیلی از مختصات است که فاصله را حفظ می کند.

در فضا-زمان، هر رویداد مولفه‌ی زمان نیز دارد و برای به دست آوردن فاصله از

قضیه فیثاغورث هذلولی استفاده می‌شود. این قضیه به صورت زیر است:
$d=$ فاصله ، $x=$ اختلاف بعد زمانی و $y=$ فاصله‌ی مکانی

$$d^2 = x^2 - y^2$$

مانند حالت فضای اقلیدسی، فاصله در دستگاه مختصات تا زمانی که از تبدیلات مناسبی استفاده کنیم، ثابت می‌ماند. تبدیلاتی فاصله را در فضا–زمان ثابت نگه‌می‌دارند، تبدیلات لورنتز نام دارند. در تبدیلات گالیله با جابه‌جایی نقطه‌ی q حول دایره‌ای به مرکز نقطه p فاصله p و q تغییری نمی‌کند. در تبدیل لورنتز نیز اگر q نقطه ای روی یک هذلولی به مرکز p باشد درهر دستگاه مختصات x ، فاصله‌ی p و q عبارت است از:

$$pq^2 = -(xq^0 - xp^0)^2 + |\vec{q} - \vec{p}|^2$$

هر تبدیل دستگاه مختصات که فاصله را حفظ می‌کند، q را روی این هذلولی نگه می‌دارد. از آنجا که سرعت نور ثابت است، نور جایی قرار دارد که $pq = 0$ بدین ترتیب سرعت ثابت نور برای همه‌ی دستگاه‌های مختصات، به تبدیلات لورنتز مربوط می شود. اگر p و q رویدادهایی در یک پرتوی نور باشند، هر تغییر دستگاه مختصات، q را روی مخروطی قرار می دهد که p مرکز آن است و فاصله pq صفر می ماند.

بردارها در فضا–زمان

در حالیکه در فضای اقلیدسی مجموعه‌ی $\{q : ||\vec{pq}|| = r\}$ یک کره به شعاع r ایجاد می‌کند، در $\mathbb{R}^4_1$ یکی ار سه نوع هذلولی گون است:

۱. مخروط

۲. دو صفحه

۳. یک صفحه

یکی از نتایج تعریف طول در $\mathbb{R}^4_1$ با متر لورنتز، این است که بردارهای نا صفر می‌توانند طول صفر داشته باشند برای مثال بردار $(1,1,0,0)$ را در نظر بگیریم.

$$||(1,1,0,0)|| = | < (1,1,0,0),(1,1,0,0) > |^{\frac{1}{2}}$$

$$= |-(1-1)^2 + (1-1)^2 + 0^2 + 0^2|^{\frac{1}{2}} = 0$$

بردارهای که طولشان صفر است، یک مخروط به مرکز نمودار فضا-زمان می‌سازند. این بردارها را نور گونه می‌نامیم و بردارهای سرعت نور هست. این مخروط ، مخروط نوری نام دارد.

بردارهای سرعتی که سرعت یک ذره فیزیکی هستند، زمان گونه نام دارند و طولشان کمتر از صفر است. این بردارها اگر ذره ها در مخروط زمان یکدیگر باشند ، می‌توانند بین دو ذره فیزیکی در زمان های مختلف حرکت کنند.

بردارهای زمان گونه $||\vec{oq}|| = r$ یک هذلولی‌گون از دو صفحه می دهند. صفحه‌ی بالایی، بردارهای اشاره گر به آینده نام دارند. بردار های $\vec{oq}$ که $< \vec{oq}, \vec{oq} > > 0$ زمان‌گون نام دارند. بردارهای $||\vec{oq}|| = r$ یک هذلولی‌گون از یک صفحه را تشکیل می‌دهند.

کتاب‌نامه

E8G·kF i_0®0 8e9hn 9jL G9}en G}_9LnJ p9}9ee0e ¦}9j qn}§ 9jL ¦\nh9]¯_Xj0} |n§9§_njJ ¦\0 8h0}_H9j g9§\0h9§_H9e gnj§\e´J -neu oo£J inuU rg9´J ©··ksJ qqu V¨k]VV£u

EKn¢£F gu pu Kn G9}hnJ K_¸0}0j§_9e W0nh0§}´ nT G«}®0 9jL ~«}T9H0 J p}0j§_H0 [9eeJ NjXe0°nnL Ge_¸ J i`J ok¢£u

Ed00ooF `n\j gu d00J^j§}nL«H§_nj §n ¦nqnenX_H9e g9j_TneL J ©0LuJ W}9L«9§0 ¦0²§ _j g9§\0h9§_H J ~q}_jX0} ^j§0}j9§_nj9e p«@e_ _jX¡ ©·oou

Ed00o¨F `n\j gu d00J^j§}nL«H§_nj §n ~hnn§\ g9j_TneL J ©0LuJ W}9L«9§0 ¦0²§ _j g9§\0h9§_H J ~q}_jX0} ^j§0}j9§_nj9e p«@e_ _jX¡ ©·o¨u

Ed00oPF `n\j gu d00J^j§}nL«H§_nj §n |_0h9jj_9j h9j_TneL J ©0LuJ W}9L«9§0 ¦0²§ _j g9§\0h9§_H J ~q}_jX0} ^j§0}j9§_nj9e p«@e_ _jX¡ ©·oPu

Emq}kUF `umq}09J W0nh0§}´ 9jL Sn«H9«e§ p0jL«e«hJ ¦\0 8h0}_H9j g9§\0h9§_H9e gnj§\e´ o·© rokkUs UoU]U©©u

E~H\o¨F ?0}j9}L Su ~H\«§¶J 8 S_} § Gn«} 0 _j W0j0}9e |0e9§_®_§´J ©0Lu J G9h@}_LX0 ª j_®0} _§´ p}0 ¡©·o¨u

Eµ_0·PF ¯_ee_9h µ_0h0}J 8 W0nh0§}_H ^j§}nL«H§_nj §n ~q9H0§_h0 9jL ~q0H_9e |0e9] §_®_§´J ©··Pu

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف	
اشاره‌گر به آینده	S«§«}O pn_j§_jX
التصاق	Gnj jOH§_nj
انتقال موازی	p9}9eeeOe ¦}9j qn}§
ب	
بردار	-OH§n}
پ	
پایه	?9 _
پیشروی	p}OHO _nj
پیوستگی	Gnj§_j«_§´
ت	
تکیه‌گاه	~«qqn}§
توپولوژی حاصلضربی	p}nL«H§ ¦nqnenX´
چ	

چارت G\9}§

چارچوب مرجع لخت ^j0}§_9e |OTO}0jHO S}9h0

خ

خط جهانی ¯n}eLe_j0

خم G«}®0

خمینه‌ی توپولوژیک ¦nqnenX_H9e g9j_TneL

خمینه‌ی هموار ~hnn§\ g9j_TneL

د

دیفرانسیل K_¸0}0j§_9e

ر

رویداد N®0j§

رویه ~«}T9HO

ز

زمان‌گون ¦_h0e_c0

زمان ویژه p}nq0} ¦_h0

ض

ضرب داخلی ^jj0} p}nL«H§

ط

طوق؛ طوقه dnnq

ف

فضای توپولوژیک ¦nqnenX_H9e ~q9HO

فضای مماس ¦9jX0j§ ~q9HO

فضای مینکوفسکی g_jcn° c_ ~q9HO

ق

قابل قبول 8Lh_ _@e0

قاعده حاصلضربی p}nL«H§ |«eO

ک

کراندار ?n«jLOL

کلاف ?«jLeO

کلاف برداری -OH§n} ?«jLeO

کلاف مماس ¦9jXOj§ ?«jLeO

گ

گسترش‌پذیر؛ قابل گسترش N²§OjL_@eO

م

متر ریمانی |_Oh9jj_9j gO§}_H

مرز ?n«jL9}´

مشتق هموردا Gn®9}_9j§ KO}_®9§_®O

معمولی m}L_j9}´

مقطع ~OH§_nj

مماس ¦9jXOj§

مماس هندسی WOnhO§}_H ¦9jXOj§

میدان برداری -OH§n} S_OeL

ن

ناهموار |n«X\

نمایش مختصاتی؛ پارامتری‌سازی p9§H\

و

وابرریختی؛ وابرسانی K_¸Onhn}q_ h

ه

هذلولی [´qO}@ne9

هذلولی‌گون [´qO}@nen_L

Gn j ®O}XO j HO	همگرایی
WOn h O§}_H9e	هندسی
[nen j n h ´	هولونومی

^j §\0 *Applications* q9}§J °0 §«L´ §\0 hn®0h0j§ nT §\0 Sn«H9«e§ q0j] L«e«h nj §\0 §9jL9}L 0«He_L09j q\0}0u ª _jX §_ hn®0h0j§J °0 0²qe9_j §\0 }n§9§_nj nT §\0 qe9j0§ N9}§\ 9}n«jL _§ n°j 9²_ J °_§\ §\0 9 «hq§_nj §\9§ §\0 09}§\ _ 9 §9§_H n@a0H§J 9jL _j §09LJ §\0 q0jL«] e«h °_jX njH0 nj §\0 09}§\ 0®0}´ ©V \n«} u

^j 9LL_§_njJ °0 « 0 q9}9ee0e §}9j qn}§ §n L0 H}_@0 9 q\0jnh0jnj H9ee0L §\0 ¦\nh9]¯_Xj0} }n§9§_njJ nj 9 \´q0}@ne_H q9H0u ¦\nh9]¯_Xj0} }n§9§_nj _ }0e9§0L §n §\0 9jXe0 §\0 q_j 9²_ nT 9 §n}x«0]T}00 X´}n Hnq0 }n§9§0 u

8@ §}9H§

dO§ « «qqn 0 °0 °9j§ §n hn®O 9 ®OH§n} 9enjX 9 H«}®O nj 9 q\O}Ou ^§ _ HeO9} §\9§ _j §\O @OX_jj_jXJ §\O ®OH§n} _ nj 9 qe9jO §9jXOj§ §n §\O q\O}Ou [n°O®O}J §\O L_ qe9HOhOj§ }O «e§ _j §\O ®OH§n} @O_jX nj 9jn§\O} qe9jOJ §9jXOj§ §n §\O q\O}Ou [O}OJ °O LO»jO 9 jO° HnjHOq§ nT q9}9eeOe_ h _j °_H\ §\O ®OH§n} »OeL $V(t)$ 9enjX §\O H«}®O σ _ H9eeOL q9}9eeOe _T $\frac{dV(t)}{dt} = O$u ^j n§\O} °n}L J 9j´njO §9jL_jX nj §\O «}T9HO §9jXOj§ §n §\O H«}®O σ OO jn H\9jXO _j §\O ®OH§n} »OeL $V(t)$u ¯O °_ee XOjO}9e_¶O §_ LO»j_§_nj nT q9}9eeOe §}9j qn}§u

^T °O 9 «hO 9 Hn®9}_9j§ LO}_®9§_®O n} 9 HnjjOH§_nj _ LO»jOL nj §\O §9jXOj§ @«jLeO nT 9 hnn§\ h9j_TneL 9enjX 9 H«}®OJ « _jX §_ Hnj] jOH§_nj °O H9j §}9j qn}§ ®OH§n} nj §\O h9j_TneL 9enjX §\O H«}®O «H\ §\9§ §\O´ §9´ q9}9eeOe °_§\ }O qOH§ §n §\O HnjjOH§_nju

^j §\O »} § 9jL OHnjL H\9q§O} J °O °_ee @O 9Hx«9_j§OL °_§\ §9jXOj§ @«jLeO 9jL ®OH§n} @«jLeO u ¦\Oj « _jX §\O O HnjHOq§ J _j §\O §_}L H\9q§O}J °O HnjHe«LO §\9§ §\O O²_ §OjHO 9jL «j_x«OjO nT q9}9eeOe §}9j qn}§ Tn} O®O}´ hnn§\ h9j_TneL M 9jL §\O HnjjOH§_nj ∇ _j ¦ g nj §\O H«}®O $\gamma : I \to M$ «H\ $t_0 \in I$ 9jL §\O ®OH§n} $v \in T_{\gamma(t_0)}M$J _ LOqOjLOj§ nj §\O O²_ §OjHOJ «j_x«OjO J 9jL hnn§\jO nT n}L_j9}´ L_¸O}Oj§_9e Ox«9§_nj u ¦\O}OTn}OJ q9}9eeOe §}9j qn}§ nT v 9enjX γ _ °Oee]LO»jOLu

GneeOXO nT ~H_0jHO

~H\nne nT g9§\0h9§_H J ~§9§_ §_H 9jL Gnhq«§0} ~H_0jHO

¦\O WOn hO§}_H GnjHOq§ nT p9}9eeOe ¦}9j qn}§ 9enjX G«}®O °_§\ nhO p\´ _H9e ^j§O}q}O§9§_nj

8«§\n}

p0X9\ gn\9h h9L_qn«} i9 }9@9L_

~«q0}®_ n}

K}u g9\L_ b\9a0\ ~9e0\9j_

?9H\0en} nT g9§\0h9§_H

8«X« § ©·©o