

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

مقدمه‌ای از بهینه‌سازی پیوسته در پردازش تصویر

نگارنده: آرین تابش

استاد راهنما: دکتر علی رضا حسینی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی

در رشته ریاضیات و کاربردها

مرداد ۱۴۰۰

چکیده

تعداد زیادی از مسائلی که در زمینه تصویربرداری وجود دارد، توسط روش‌های بهینه‌سازی پیوسته مرتفع می‌گردند. هدف این پروژه توصیفی پیشرفته از این روش‌ها برای رفع چنین مشکلات و ارائه مدل‌های موثر است. ما تأکید ویژه‌ای بر طرح‌های بهینه‌سازی مرتبه اول داریم که می‌توانند در مسائل ناهموار و مقیاس بزرگ مورد استفاده قرار گیرد و مسائل تصویربرداری را حل کنند. در این پروژه الگوریتم‌های مختلف در مسائل غیرهموار در تصویربرداری، مانند Denoising (دی‌نویز کردن) و Deblurring (رفع تاری تصویر) را بررسی و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. علاوه بر این، برنامه‌های الگوریتم‌هایی را برای مشکلات پیشرفته‌تر، مانند تصویربرداری شدت مغناطیسی و تخمین جریان نوری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

سپاسگزاری

به نام خدایی که مرا در این راه همراه بود
در ابتدای این متن بر خودم لازم می‌دانم از حمایت‌ها، تلاش‌ها و راهنمایی‌های استاد عزیزم دکتر
حسینی صمیمانه تشکر کنم که بدون کمک‌ها و راهنمایی‌های ایشان، طی این مسیر، میسر نبود،
همچنین از پدر و مادرم تشکر می‌کنم که در طول تحصیل همواره پشتیبان و همراه من بودند و همواره
بنده را تشویق نمودند و مایه دلگرمی من بودند،
برادرم که الگو و کمک من در دوران تحصیل و تکمیل این پروژه بود،
و یک تشکر بزرگ از دوستی که کاش بود و این لحظه را می‌دید،
و در آخر از تمامی دوستانم که کمک‌های بی‌شائبه‌ای و بدون چشم‌داشتی به اینجانب کردند.

پیشگفتار

هدف از این پروژه، توصیف و مطالعه یک شاخه از بهینه‌سازی پیوسته است که به مسائل در علم تصویربرداری، به ویژه بازسازی تصویر، مسائل معکوس در تصویربرداری و برخی از کاربردهای طبقه بندی ساده می‌پردازد. بسیاری از این مشکلات را می‌توان با استفاده از «انرژی»، «هزینه» یا «هدف» مدل سازی کرد که بیانگر چقدر خوب (یا بد!) بودن یک راه حل است و باید به حداقل برسد.

این مسائل اغلب دارای چند ویژگی مشخص هستند. یکی از آنها اندازه است، که می‌تواند بزرگ باشد. (برای مسائلی مانند بازسازی تصویر سه بعدی یا پردازش فیلم، به طور معمول حداکثر در حدود یک میلیارد متغیر را شامل می‌شود.) مورد دیگر این واقعیت است که در بسیاری از مسائل، داده ها در یک شبکه دو یا سه بعدی ساخته می‌شوند و به صورت محلی با هم تعامل دارند. یک ویژگی اساسی و بسیار تکرار شده این است که بسیاری از مسائل محدودیت‌های غیرهموار (معمولاً محدب)، مربوط به مفاهیم پراکندگی و استحکام هستند.

این ویژگی ها الگوریتم های عددی مورد استفاده برای حل این مسائل را کاملاً تحت تأثیر قرار داده اند. به دلیل اندازه بزرگ آنها و ناهموازی، روشهای مرتبه بالاتر مانند روش نیوتن، یا روشهای متکی به روشهای دقیق جستجوی خطی، معمولاً موثر نیستند، گرچه برخی از نویسندگان روشهای شبه نیوتن را برای مسائل غیرهموار پیشنهاد داده و با موفقیت اجرا کرده‌اند (ایتو و کونیش ۱۹۹۰، چان، گولوب و مولت ۱۹۹۹).

از این رو، این مسائل، معمولاً با روشهای نزول مرتبه اول برطرف می‌شوند. برای مقابله با ناهموازی، تحت شرایطی می‌توان به روشهای بهینه‌سازی هموار روی آورد و یا مسئله را به زیرمسائل کوچکتری تقسیم کرد که قابل حل باشند و همچنین این مسائل تفکیک شده به گونه ای ترکیب شوند که مشکل اولیه را حل کنند. این آخرین ایده اکنون به عنوان «تقسیم پروگزیمال» شناخته می‌شود که اگرچه به ایده هایی از دهه های ۱۹۵۰ تا ۱۹۷۰ متکی است (داگلاس و راجفورد ۱۹۵۶، گلوینسکی و مارروکو ۱۹۷۵)، اما موضوعی بسیار فعال در ده سال گذشته در پردازش تصویر و سیگنال بوده است.

از این رو، ما عمدتاً بر روی روش تقسیم پروگنوزیمال در مسائل محدب تمرکز خواهیم کرد. ما چندین مسئله مهم در تصویربرداری را معرفی خواهیم کرد و به تفصیل روش‌های ساده مرتبه اول را برای حل این مسائل به طور عملی شرح می‌دهیم و توضیح می‌دهیم که بهترین راه برای اجرای این روش‌ها و همچنین نحوه استفاده از ترفندهای افزایش سرعت برای بهبود نرخ همگرایی آن‌ها چیست. ساختار این گزارش به شرح زیر است. در بخش ۱ مسائل معمول و ساده در تصویربرداری را شرح خواهیم داد و در بخش ۲ پس از معرفی کوتاه مفاهیم اساسی تحدب، روش‌هایی را که در حال حاضر برای حل این مسائل استفاده می‌شوند، شرح خواهیم داد. در این پروژه عمدتاً بر روی دو خانواده از روش‌ها (که مفید بودن آنها به ساختار مسئله بستگی دارد) تمرکز خواهد شد: روش‌های نزول مرتبه اول و روش‌های نقطه زینی.

سپس، در بخش ۳ یک سری از مسائل عملی را مرور خواهیم کرد و هر بار توضیح می‌دهیم کدام روش‌ها می‌توانند مورد استفاده قرار می‌گیرد (به همراه ارائه جزئیات پیاده‌سازی‌ها).

در بخش بعدی، مثال‌هایی از مسائل اصلی بهینه‌سازی که در این مقاله حل خواهد شد را توصیف می‌کنیم.

فهرست مطالب

۱	مسائل بهینه‌سازی در تصویربرداری	فصل اول
۲ نمایش‌های پراکنده	۱.۱
۴ سه مثال مقدماتی برای ترمیم تصویر	۲.۱
۸	مفاهیم اساسی تحدب و روش‌های (الگوریتم‌های) مورد استفاده	فصل دوم
۸ مفاهیم اساسی تحدب و نمادگذاری	۱.۲
۱۰ روش‌های مبتنی بر گرادیان و نقطهٔ زینی	۲.۲
۲۶ روش‌های بهینه‌سازی غیرمحدب	۳.۲
۲۸	کاربرد	فصل سوم
۲۸ تغییرات کلی	۱.۳
۳۱ تغییرات کلی تعمیم‌یافته	۲.۳
۳۲ تغییرات کلی، مسائل خطی معکوس را منظم می‌کند	۳.۳
۳۳ جریان نوری	۴.۳
۳۶	نتیجه‌گیری	فصل چهارم
۳۷	کتاب‌نامه	

فصل اول

مسائل بهینه‌سازی در تصویربرداری

در ابتدا می‌خواهیم مشکلات ناشی از مدل‌های کلاسیک در پردازش تصویر و یادگیری ماشین در مسائل بهینه‌سازی را به خواننده نشان دهیم. سپس مدل‌های بیشتری را در بخش ۵ شرح داده خواهد شد. از جمله مهمترین ویژگیهای تصاویر، لبه‌ها و بافت‌هاست. از این‌رو، ویژگی مهم مدل‌ها در پردازش تصویر، توانایی حفظ هویت دقیق لبه‌های تصویر است. هدف دیگر اکثر مدل‌ها استحکام است، یعنی راه حل یک مدل باید در حضور نویز و سیگنال‌های اضافه، پایدار باشد. در عمل این بدان معنی است که مدل‌های موفق نباید هموار (قابل تغییر) باشند. در واقع، یک رویکرد موفق به این مسائل اینست که توابع خطا بر اساس توابع نرم باید به حداقل برسد. روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک در بهینه‌سازی غیرخطی، مانند روش‌های گرادیان، روش‌های نیوتن یا شبه نیوتن، نمی‌توانند برای مشکلات در مقیاس بزرگ اعمال شوند. از این‌رو به روش‌های تخصصی نیاز است که بتواند به طور موثر به راه‌حل‌های کارا منجر شود.

۱.۱ نمایش‌های پراکنده

یک کشف مهم در سال‌های اخیر مشاهده این است که بسیاری از سیگنال‌های دنیای واقعی را می‌توان از طریق نمایش پراکنده در یک مبنای مناسب مدل‌سازی کرد. علاوه بر این، نمایش پراکنده سیگنال مناسب است، زیرا نشان دهنده مقاومت خاصی در حضور نویز است. با توجه به یک سیگنال ورودی $b \in R^m$ ، یک نمایش پراکنده $A = (a_{i,j})_{i,j} \in R^{m \times n}$ متشکل از n بردار ستونی $(a_{i,j})_{i=1}^m$ را می‌توان با حل مسئله بهینه‌سازی زیر پیدا کرد:

$$\min f(x) \quad \text{Such that } Ax = b \quad (1.1)$$

که در آن $x \in R^n$ بردار ضریب ناشناخته است. این مدل معمولاً با نام «پیگیری پایه» (Donoho و Chen، ۱۹۹۴) شناخته شده است. از آنجا که هر ستون A می‌تواند به عنوان یک اتم مبنای تفسیر شود، محدودیت برابری $Ax = b$ این واقعیت را توصیف می‌کند که سیگنال b باید به عنوان یک ترکیب خطی پراکنده از آن اتم‌ها نشان داده شود. تابع $f(x)$ یک تابع القاکننده پراکندگی مانند $f(x) = \|x\|_1 := \sum_i |x_i|$ (در ساده‌ترین حالت) است. این ایده به عنوان پراکندگی گروهی شناخته می‌شود و به طور گسترده‌ای در تجزیه و تحلیل داده‌ها استفاده می‌شود که شامل استفاده از نرم است.

یک فرمول کلی‌تر که امکان ایجاد نویز در سیگنال مشاهده شده b را نیز فراهم می‌کند، با مسئله بهینه‌سازی زیر ارائه می‌شود، که با نام «Lasso» مشهور شده است:

$$\min \|x\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (2.1)$$

که $\lambda > 0$ پارامتری است که می‌تواند با سطح نویز b سازگار شود. پارامتر λ همچنین می‌تواند به عنوان یک ضریب لاگرانژ برای محدودیت $\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \leq \sigma^2$ تفسیر شود، جاییکه σ تخمین سطح نویز است. این ارتباط نزدیک بین (۱.۲) و (۲.۲) را نشان می‌دهد. رویکرد Lasso همچنین می‌تواند به عنوان مدلی تفسیر شود که سعی می‌کند سیگنال داده شده b را فقط با استفاده از تعداد کمی از اتم‌های پایه ترکیب کند. با انتقال عملگر خطی A از شرط برازش داده به شرط تنظیم، مسئله مشابهی حاصل می‌شود که آن:

$$\min \|Bx\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|x - b\|_2^2 \quad (3.1)$$

که در آن B یک عملگر خطی است. اگر A وارون پذیر باشد و $B = A^{-1}$ یک تغییر متغیر ساده نشان می دهد که این دو مسئله یکسان هستند. با این حال، موارد جالب تر مربوط به B برای زمانیست که وارون ناپذیر می باشد و این دو مسئله می توانند خصوصیات بسیار متفاوتی داشته باشند. در اینجا، عملگر خطی B را می توان به عنوان یک عملگر تجزیه و تحلیل سیگنال تفسیر کرد. تأثیرگذارترین مدل تصویربرداری با استفاده از چنین تنظیم کننده های تجزیه و تحلیل پراکنده، تنظیم کننده «تغییرات کل» (TOTAL VARIATION) است. در اینجا، ما مدل ROF (رودین، اوشر و فاطمی ۱۹۹۲، چمبول و شیرها ۱۹۹۷) که مبتنی بر تغییرات کل، برای دی نویز کردن تصویر است را شرح می دهیم. یک تصویر دیجیتال $u \in R^{m \times n}$ به اندازه $m \times n$ پیکسل را در نظر بگیرید. یک روش ساده و استاندارد برای ایجاد تغییرات کلی، استفاده از یک طرح اختلاف محدود است که بر روی پیکسل های تصویر عمل می کند. یک عملگر گرادیان گسسته $D : R^{m \times n} \rightarrow R^{m \times n \times 2}$ را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$(Du)_{i,j,1} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{if } 1 \leq i < m \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (۴.۱)$$

$$(Du)_{i,j,2} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{if } 1 \leq j < n \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (۵.۱)$$

ما همچنین به عملگر نرم $\|D\|$ نیاز خواهیم داشت، که:

$$\|D\| \leq \sqrt{8} \quad (۶.۱)$$

مدل گسسته ROF سپس توسط عبارت زیر تعریف می شود:

$$\min_u \lambda \|Du\|_{p,1} + \frac{1}{2} \|u - u^*\|_2^2 \quad (۷.۱)$$

که در آن u^* تصویر نویزدار داده شده است، و تغییرات کلی گسسته توسط عبارت زیر تعریف می شود:

$$\|Du\|_{p,1} = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} |(Du)_{i,j}|_p = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} ((Du)_{i,j,1}^p + (Du)_{i,j,2}^p)^{1/p} \quad (۸.۱)$$

برای مثال می توان از پارامتر p ، برای تحقق تغییر کل واگرایی ($p = 1$) یا همگرایی ($p = 2$) استفاده کرد.

در بسیاری از مسائل عملی، استفاده از یک عملگر خطی اضافی در شرط برازش داده ضروری است. چنین مدلی معمولاً به فرم زیر است:

$$\min_u \lambda \|Du\|_{p,1} + \frac{1}{2} \|Au - u^*\|_2^2 \quad (9.1)$$

جاییکه $A: R^{m \times n} \rightarrow R^{k \times l}$ یک عملگر خطی و $u^* \in R^{k \times l}$ اطلاعاتی داده شده است و l و k بستگی به هر کاربرد خاص متفاوتند. به عنوان مثال عبارت بالا می تواند تصویربرداری تشدید مغناطیسی (MRI) را مدل سازی و رفع اشکال (deblurring) کند، جاییکه A هسته تاری و عملگر خطی معمولاً ترکیبی از تبدیل فوریه و حساسیت های سیم پیچ است.

شرط برازش داده های درجه دوم مدل ROF به طور مخصوص برای نویز متوسط صفر گوسی است. به منظور استفاده از مدل در انواع دیگر نویز، شرایط مختلفی از برازش داده پیشنهاد شده است. وقتی نویز تکانشی (impulsive) است، یک روش ساده اما کارآمد این است که شرط درجه بندی داده را با شرط l_1 داده جایگزین کنید. مدل بدست آمده، مدل $TV-l_1$ نامیده می شود، که توسط عبارت زیر تعریف می شود:

$$\min_u \lambda \|Du\|_{p,1} + \|u - u^*\|_1 \quad (10.1)$$

این مدل دارای بسیاری از ویژگی های خوب مانند مقاومت در برابر نویز است اما به این دلیل که مدل $TV-l_1$ کاملاً ناهموار است، بنابراین به حداقل رساندن آن بسیار دشوارتر است.

۲.۱ سه مثال مقدماتی برای ترمیم تصویر

مثال ۱ (مدل ROF) در مثال اول ما با استفاده از مدل ROF (۷.۱) در حضور نویز گوسی، خنثی سازی تصویر استاندارد را در نظر می گیریم. شکل ۱.۱ نتیجه تغییر شکل بر اساس تغییرات کلی با استفاده از مدل ROF را نشان می دهد.

شکل ۱.۱(آ) تصویر ورودی اصلی را با اندازه 270×360 پیکسل و مقادیر شدت در محدوده $[0, 1]$ شکل ۱.۱(ب) نوع نویزدار آن را نشان می دهد که با افزودن نویز گاوسی با انحراف معیار $\sigma = 0.1$ بدست آمده است.

شکل ۱.۱(ج) نتیجه به دست آمده با به حداقل رساندن مدل ROF با استفاده از روش FISTA را نشان می دهد. ما از تغییرات کلی همگرا استفاده کردیم ($p = 2$) و پارامتر تنظیم را

$\lambda = 0.1$ تنظیم کردیم. مشاهده کنید که مدل ROF با حفظ لبه های اصلی تصویر، نویز را با موفقیت از تصویر حذف می کند. همچنین می توان مشاهده کرد که مدل ROF در بازسازی مناطق بافتی چندان موفق نیست. روشهای پیشرفته دی نویز کردن معمولاً به طور کلی تکه ها را دی نویز می کنند و امکان نمایش بهتر بافتها را فراهم می سازند.



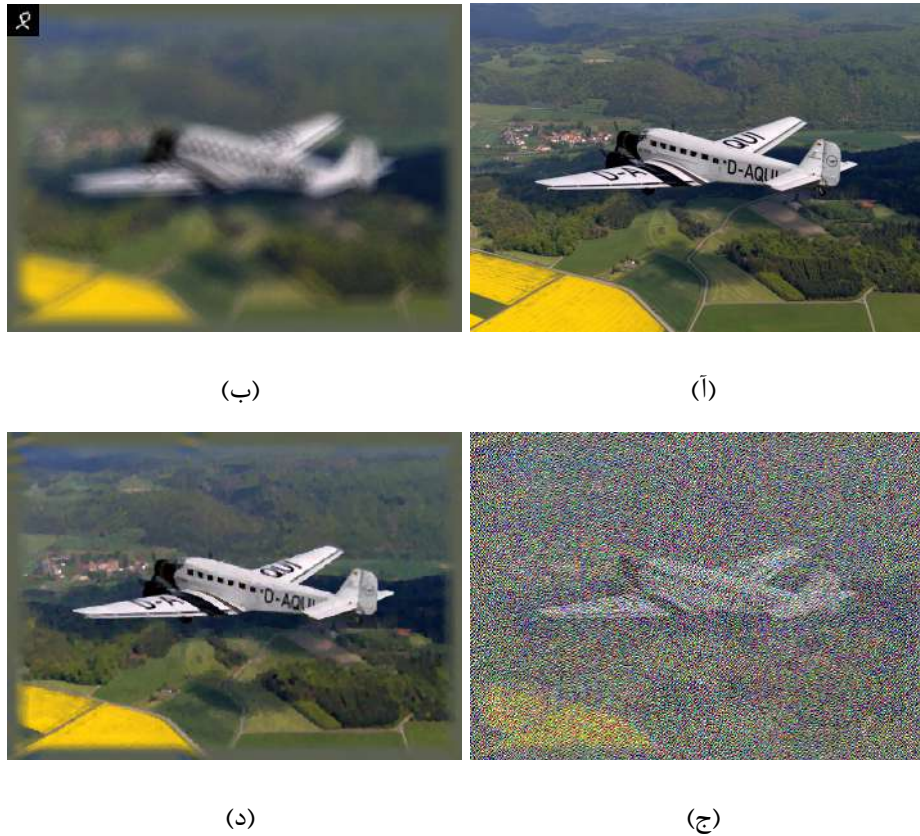
(ج)

(ب)

(آ)

شکل ۱.۱

مثال ۲ (رفع اشکال تغییرات کلی) در مثال دوم فرض می کنیم که تصویر تار مشاهده شده u^* با ترکیب تصویر ناشناخته u با یک هسته تاری دو بعدی a با اندازه $k \times l$ پیکسل بدست آمده است. ما می توانیم با به حداقل رساندن مدل (۹.۱) با استفاده از $Au = a^*u$ ، تصویر داده شده را «رفع اشکال» deblur کنیم. اگر در (۹.۱)، $\lambda = 0$ را انتخاب کنیم، آنگاه برخلاف اینکه تصویر اصلی u^* اصلاً نویز ندارد، کاملاً واضح است که نویز با فرایند «deconvolution» تقویت می شود و کیفیت فرایند را خراب می کند. شکل ۲.۱ نمونه ای از رفع اشکال تصویر با هسته تاری شناخته شده را نشان می دهد.

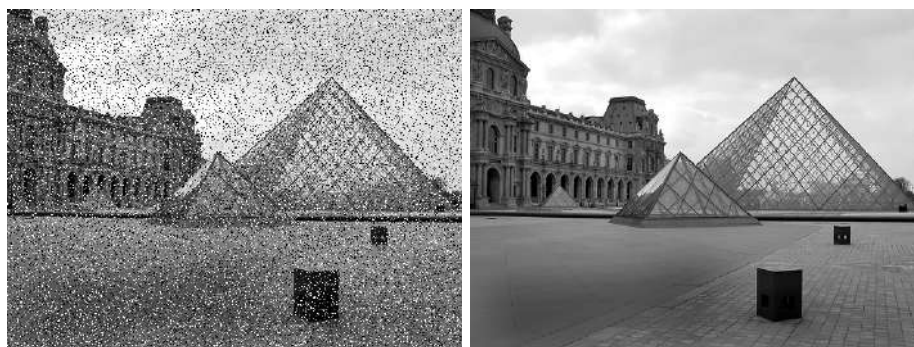


شکل ۲.۱

شکل ۲.۱ (آ) تصویر اصلی را با اندازه 438×317 پیکسل و مقادیر شدت در محدوده $[0, 1]$.
 شکل ۲.۱ (ب) تصویر تار را همراه با هسته تاری با اندازه 31×31 پیکسل نشان می دهد. تصویر تار با افزودن نویز متوسط صفر گوسی با انحراف معیار 0.01 بیشتر تخریب شده است.
 شکل ۲.۱ (ج) تصویر رفع اشکال شده را با استفاده از هیچ تنظمی $\lambda = 0$ نشان می دهد.
 شکل ۲.۱ (د) تصویر رفع اشکال شده را با استفاده از رفع اشکال تغییرات کلی تنظیم شده نشان می دهد. پارامتر تنظیم روی $\lambda = 5 \times 10^{-4}$ تنظیم شد. مشاهده کنید که پارامتر تنظیم برای کاهش نویز در رفع اشکال تصویر ضروری است. این مثال خاص با استفاده از روش PDHG محاسبه شده است. توجه داشته باشید که وقتی هسته تاری نیز ناشناخته باشد، مشکل غیر محذب می شود و بنابراین رفع اشکال آن بسیار پیچیده تر می شود.

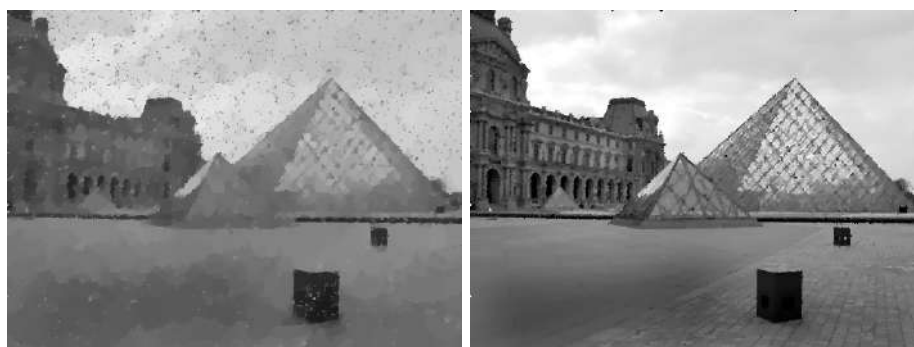
مثال ۳ (مدل $TV-l_1$) در مثال سوم ترمیم تصویر را در حضور نویز نمک و فلفل در نظر می گیریم. برای این منظور ما از مدل $TV-l_1$ (۱۰.۱) استفاده می کنیم. شکل ۳.۱ مثالی را نشان می دهد که در آن مدل $TV-l_1$ می تواند تصویری با اندازه 500×375 پیکسل را که با افزودن

20% نویز "نمک و فلفل" تخریب شده است (شکل ۳.۱(ب)) دی‌نویز کند. مقادیر شدت تصویر ورودی دوباره در محدوده [۰.۱] است. برای مقایسه، ما همچنین نتایج مدل ROF را برای این مثال نشان می‌دهیم. برای مدل $TV-l_1$ پارامتر تنظیم روی $\lambda = 0.6$ تنظیم شده است (شکل ۳.۱(ج)). برای شکل ۳.۱(د)، پارامتر تنظیم مدل ROF بر روی $\lambda = 0.25$ تنظیم شد. دیده می‌شود که نتایج مدل ROF کاملاً ضعیف‌تر است. این مثال نیز با استفاده از روش PDHG محاسبه شد.



(ب)

(ا)



ROF (د)

$TV-l_1$ (ج)

شکل ۳.۱

فصل دوم

مفاهیم اساسی تحدب و روش‌های (الگوریتم‌های) مورد استفاده

۱.۲ مفاهیم اساسی تحدب و نمادگذاری

در ابتدا برخی مفاهیم اساسی تحدب را یادآوری می‌کنیم و نحوه‌ی علامت‌گذاری این پروژه را معرفی می‌کنیم.

در سراسر این پروژه X و Y فضاهای هیلبرتی هستند که به نرم $\langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2} = \|\cdot\|$ مجهز شده‌اند. در پردازش تصاویر دو بعدی u این تصویر را به صورت ضرب دکارتی $m \times n$ پیکسل در نظر گرفته و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$u = (u_{1,1}, \dots, u_{m,n}) \in R^{m \times n} \quad (1.2)$$

تعریف: همچنین نرم p روی تصویر u را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |u|^p \right)^{1/p} \quad (2.2)$$

تعریف: تابع حقیقی مقدار $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ را محدب (convex) گوئیم اگر و تنها اگر اپی‌گرافش (epigraph) که به صورت زیر است، محدب باشد:

$$epi f = \{(x, \lambda) \in X \times R : \lambda \geq f(x)\} \quad (3.2)$$

و یا معادلاً، نامعادله زیر برای هر $x, y \in X$ و $t \in [0, 1]$ برقرار باشد:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (4.2)$$

و اکیداً محدب است هرگاه در همه جا $x \neq y$ و $0 < t < 1$ باشد. و همچنین پراپر (proper) است هرگاه به ازای هر x تابع $f(x)$ دقیقاً $-\infty$ و $+\infty$ نشود.

تعریف: تابع f را نیم‌پیوسته پایینی گوئیم اگر برای هر $x \in X$ اگر $x_n \rightarrow x$ آنگاه:

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad (5.2)$$

یک مثال بدیهی ولی مهم «تابع مشخصه» است که برای مجموعه C به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ +\infty & \text{else} \end{cases} \quad (6.2)$$

تعریف: فرض کنید تابع پیوسته، حقیقی مقدار و نیم‌پیوسته پایینی باشد. زیر‌گرادیان (subgradient) این تابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial f(x) := \{p \in X : f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle \forall y \in X\} \quad (7.2)$$

در این صورت $x \in X$ کمینه‌کننده سراسری f است اگر و تنها اگر $0 \in \partial f(x)$. تعریف: تابع f محدب قوی یا « μ -محدب» است برای $x, y \in X$ و $p \in \partial f$ داشته باشیم:

$$f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x \rangle + \frac{\mu}{2} \|y - x\|^2 \quad (8.2)$$

تعریف: برای هر تابع $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ تابع مزدوج وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^*(y) = \sup_{x \in X} \langle y, x \rangle - f(x) \quad (9.2)$$

نتیجه: از تعریف بالا می‌توان به نتیجه بسیار مهم زیر رسید:

$$y \in \partial f(x) \leftrightarrow x \in \partial f^*(y) \leftrightarrow f(x) + f^*(y) = \langle y, x \rangle \quad (10.2)$$

که این حقیقت را به ما می‌گوید که ∂g و $\partial^* g$ وارون یکدیگرند. تعریف: عملگر صفرکننده proximity operator تابع محدب به صورت زیر تعریف می‌شود: اگر تابع f محدب، پراپر و نیم‌پیوسته پایینی باشد آنگاه برای هر x یک کمینه‌کننده یکتا \hat{y} برای مسئله محدب قوی

$$f(y) + \frac{1}{2\tau} \|y - x\|^2 \quad (11.2)$$

وجود دارد که برای هر y به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(y) + \frac{1}{2\tau} \|y - x\|^2 \geq f(\hat{y}) + \frac{1}{2\tau} \|\hat{y} - x\|^2 + \frac{1}{2\tau} \|y - \hat{y}\|^2 \quad (12.2)$$

به همین منظور نمادگذاری زیر را خواهیم داشت:

$$\hat{y} = \text{prox}_{\tau f}(x) \quad (13.2)$$

یا به طور معادل، می‌توانیم قراردسیم:

$$\hat{y} = (I + \tau \partial f)^{-1} x \quad (14.2)$$

۲.۲ روش‌های مبتنی بر گرادیان و نقطه زینی

در ادامه این بخش، به روش‌های گرادیان و نقاط زینی خواهیم پرداخت و برای هر روش توضیح خواهیم داد که هر کدام از این روش‌ها به چه شکلی عمل خواهند کرد. اولین خانواده از روشهایی که توصیف خواهیم کرد، روشهای نزولی گرادیان مرتبه اول است. شاید معرفی چنین ابزارهای ساده و کلاسیکی که ممکن است منسوخ شده باشند، کمی عجیب به نظر برسد. با این حال، همانطور که در مقدمه ذکر شد، کارآمدترین راه برای مقابله با بسیاری از مسائل ساده در تصویربرداری، استفاده از نسخه‌های مفصل از طرح‌های نزول شیب ساده است.

الگوریتم ۱ روش کاهش گرادیان با طول گام ثابت GD :

نقطه ابتدایی $x^0 \in X$ را انتخاب کنید. برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$x^{k+1} = x^k - \tau \nabla f(x^k) \quad (۱۵.۲)$$

ما با توصیف روش‌های نزولی گرادیان شروع می‌کنیم، و خواهیم دید که این روش‌ها برای حل مسائل ساده مانند Lasso یا ROF دوگانه مناسب هستند.

حال فرض کنید می‌خواهیم تابع محدب و مشتق‌پذیر f را کمینه کنیم:

$$\min_{x \in X} f(x) \quad (۱۶.۲)$$

ساده‌ترین روش برای حل این مسئله، اجرای روش کاهش گرادیان با اندازه گام ثابت $\tau > 0$ است. (به الگوریتم ۱ مراجعه کنید.)

اساسی‌ترین مشکلاتی که برای این روش وجود دارد، این است که ممکن است تابع f به اندازه کافی هموار نباشد و یا طول گام τ به اندازه‌ای زیاد و یا کم باشد که الگوریتم را دچار نوسان کند به طوری که این روش یا همگرا نباشد و یا با تعداد دفعات تکرار بسیار زیادی، همچنان فاصله محسوسی از نقطه کمینه داشته باشد. برای مثال اگر $f(x) = \frac{x^2}{2}$ آنگاه به وضوح $x^{k+1} = (1 - \tau)x^k$ که بیان می‌کند این دنباله زمانی همگراست که $\tau < 2$. به بیانی دیگر بسط تیلور تصریح می‌کند:

$$f(x - \tau \nabla f(x)) \leq f(x) - (1 - \frac{\tau L}{2}) \|\nabla f(x)\|^2 \quad (۱۷.۲)$$

که L ثابت لیبشیتز برای $\nabla f(x)$ است. بنابراین اگر $\tau < 2/L$ آنگاه $f(x^k)$ دنباله‌ای اکیدا نزولیست. حال اگر تابع f به شکلی باشد که ∇f لیبشیتز نبود دیگر نمی‌توان به راحتی از الگوریتم ۱ استفاده کرد چون شرط همگرایی روش کاهش گرادیان به خطر می‌افتد.

تعریف: پس به سراغ تعمیمی از این الگوریتم به اسم روش «کاهش گرادیان ضمنی» implicit

gradient method می‌رویم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x^{k+1} = x^k - \tau \nabla f(x^{k+1}) \quad (۱۸.۲)$$

حال تنها ابهام باقی مانده نحوه اجرای این تکرار است. بدین منظور تابع f_τ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم و به این نکته توجه خواهیم کرد که تعریف زیر برای همگرایی به نقطه کمینه، نیازی به هموار بودن ندارد که مزیتی بزرگ به حساب می‌آید:

$$f_\tau(\bar{x}) := \min_{x \in X} f(x) + \frac{\|x - \bar{x}\|^2}{2\tau} \quad (۱۹.۲)$$

پس گرادیان تابع فوق در نقطه \bar{x} به صورت زیر است:

$$\nabla f_\tau(\bar{x}) = \frac{\bar{x} - \text{prox}_{\tau f}(\bar{x})}{\tau} \rightarrow \text{prox}_{\tau f}(\bar{x}) = \bar{x} - \tau \nabla f_\tau(\bar{x}) \quad (۲۰.۲)$$

در نتیجه روش کاهش گرادیان ضمنی را می‌توان به صورت زیر یازنویسی کرد:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\tau f}(x^k) = (I + \tau \partial f)^{-1}(x^k) = x^k - \tau \nabla f_\tau(x^k) \quad (۲۱.۲)$$

که به وضوح نشان می‌دهد هر دو تابع f و f_τ دارای کمینه‌کننده‌های یکسانی هستند.

قضیه ۱ فرض کنید $x^0 \in X$ و $\tau \leq 1/L$ و x^k دنباله‌ای باشد که در الگوریتم ۱ تعریف شده است. آنگاه نه تنها $(x^k)_k$ به نقطه کمینه x^* همگراست بلکه مقدار $f(x^k)$ نیز با نرخ زیر کاهش می‌یابد (همگرا می‌شود):

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\tau k} \|x^* - x^0\|^2 \quad (۲۲.۲)$$

الگوریتم ۲ روش زیرگرادیان SGM :

$x^0 \in X$ و h_k را به طوری که $\sum_k h_k = +\infty$ و $\sum_k h_k^2 < +\infty$ باشد، انتخاب کنید. به ازای هر $k \geq 0$ و هر $g_k \in \partial f(x_k)$ دلخواه

$$x^{k+1} = x^k - h_k \frac{g_k}{\|g_k\|} \quad (۲۳.۲)$$

راهی دیگر برای پیاده‌سازی روش گرادیان مرتبه اول برای توابع غیرهموار محدب، روش زیرگرادیان است که به شکل بالا تعریف می‌شود، مضافاً بر اینکه الگوریتم فوق اجازه انتخاب دلخواه تابع g از تمام زیرگرادیان‌های $f(x_k)$ را به ما می‌دهد.

همچنین باید به این نکته اشاره کرد که در حالت کلی، این روش، عملکردی ضعیف دارد به این دلیل که نرخ همگرایی پایینی دارد که برای بهترین تابع هدف در تکرار k ام برابر $O(1/\sqrt{k})$ است. شرط همگرایی این روش، این است f باید M لیپشیتز باشد (حداقل در نزدیکی نقطه بهینه)، که در متناهی بعد، محدودیت چندانی ایجاد نمی‌کند، زیرا f در داخل دامنه خود همیشه به صورت محلی لیپشیتز می‌باشد.

نرخ همگرایی این روش در تکرار k ام به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x_k^0) - f(x^*) \leq M \frac{C + \|x_0 - x^*\|^2}{2C\sqrt{k+1}} \quad (24.2)$$

یک سوال مهم که در اینجا مطرح می‌شود این است که بهترین نرخ همگرایی ممکن برای یک روش مرتبه اول مسئله بهینه‌سازی محدب، چیست. البته، پاسخ سوال قبل به ویژگی‌های تابع هدفی که قرار است کمینه بشود بستگی دارد. برای جواب از این ایده بهره می‌بریم که تکرار x_k محدود به فضای زیر است:

$$x^k \in x^0 + \text{span}\{\nabla f(x^0), \nabla f(x^1), \dots, \nabla f(x^{k-1})\} \quad (25.2)$$

در حالی که x^0 نقطه دلخواه اولیه است.

قضیه ۲ برای هر $x^0 \in R^n$ و $L > 0$ تابع محدب پیوسته مشتق‌پذیر f به همراه ∇f پیوسته L -لیپشیتز است وجود دارد به طوری که برای هر روش مرتبه اول که در شرایط بالا قرار می‌گیرد، داریم: (x^* کمینه مقدار تابع f)

$$f(x^k) - f(x^*) \geq \frac{L\|x^0 - x^*\|^2}{8(k+1)^2} \quad (26.2)$$

الگوریتم ۳ روش کاهش گرادیان تسریع شده (AGD):

$k \geq 0$ برای هر $t_0 = 0$ قرار دهید و $x^{-1} = x^0 = y^0 \in X$ را انتخاب کنید و $\tau \leq 1/L$

داریم:

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2} \quad (27.2)$$

$$y^k = x^k + \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}(x^k - x^{k-1}) \quad (28.2)$$

$$x^{k+1} = y^k - \tau \nabla f(y^k) \quad (29.2)$$

اجازه دهید به روش کاهش گرادیان (GD) برگردیم. به نظر می رسد که نرخ‌های همگرایی گفته شده در قضیه ۱ این بخش بهینه نیستند، به این معنا که می توان کران‌های کوچکتر را بدست آورد که تقریباً با کران‌های پایین ارائه شده در بخش قبلی مطابقت دارند. به همین دلیل در جهت حل این مشکل به الگوریتم ۳ برخوایم خورد که تحت عنوان کاهش گرادیان تسریع شده است که به صورت بالا تعریف می شود. در قضیه زیر خواهیم دید نرخ همگرایی این روش نسبت به الگوریتم ۱ بسیار بهتر است.

قضیه ۳ فرض کنید $\{x_k\}$ دنباله‌ای باشد که توسط روش کاهش گرادیان تسریع شده به دست می آید. حال اگر x^* کمینه کننده تابع f باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$f(x^k) - f(x^*) \leq \frac{2}{\tau(k+1)^2} \|x^0 - x^*\|^2 \quad (30.2)$$

این مقدار به وضوح از نرخ همگرایی در قضیه ۱ بهتر است و در واقع، هنگام مقایسه با حد پایین در قضیه ۲، بهینه است.

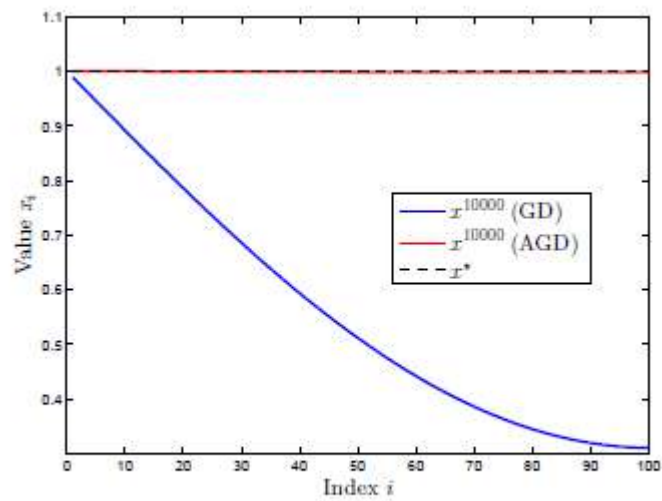
مثال ۱ تابع زیر را برای هر $x \in R^n$ در نظر بگیرید.

$$f(x) = \frac{L - \mu}{8} \left((x_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^p (x_i - x_{i-1})^2 \right) + \frac{\mu}{2} \|x\|^2 \quad (31.2)$$

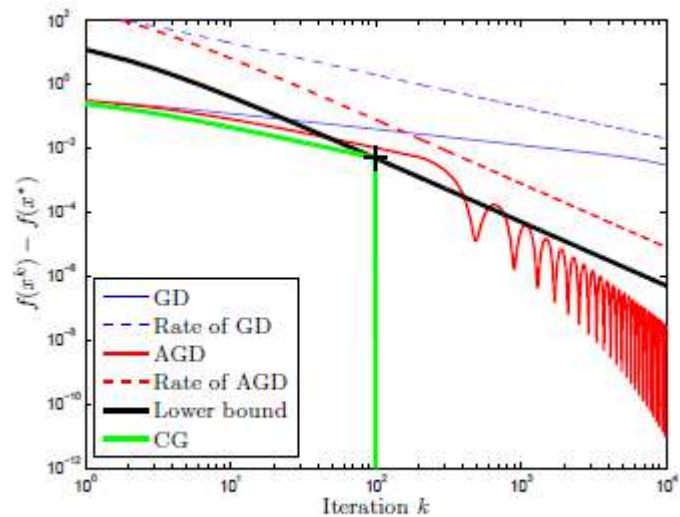
در شرایطی که $l > 0$ و $\mu \geq 0$ و $1 \leq p \leq n$ و تابع بالا از نقطه $x^0 = 0$ شروع به کمینه شدن می کند.

در این مثال، عملکرد روش‌های مختلف گرادیان را برای تابع $f(x)$ نشان خواهیم داد، در شرایطی که $p = n = 100$ است.

در شکل ۱.۲ سرعت همگرایی روش کاهش گرادیان (GD)، روش کاهش گرادیان تسریع شده (AGD) و روش مزدوج گرادیان (CG) را به همراه کران پایین برای بهینه‌سازی هموار که در قضیه محاسبه شد، نشان می‌دهیم:



(a)



(b)

شکل ۱.۲

دو شکل بالا مقایسه‌ای بین روش‌های گرادیان تسریع شده و تسریع نشده را نشان می‌دهد.

شکل اول مقایسه‌ای بین روش GD و AGD بعد از ۱۰۰۰۰ تکرار.

شکل دوم نرخ همگرایی روش‌های GD و AGD و CG را برای تابع بالا به همراه کران پایین برای بهینه‌سازی هموار نشان می‌دهد. همچنین باید متذکر شویم روش CG دقیقاً در تکرار ۱۹۹ام به کران پایین می‌رسد.

نتایج نشان می‌دهد روش AGD به طرز چشمگیری سریع‌تر از روش GD است. همچنین برای مقایسه، روش CG را نیز که برای بهینه‌سازی درجه دوم است، به شکل اضافه کردیم.

حال به سراغ حل کلاسی از مسائل می‌رویم که شامل جمع یک تابع محدب و یک تابع درجه ۲ است. فرض کنید می‌خواهیم تابعی به شکل زیر را حل کنیم که g تابعی محدب است.

$$\min_{x \in \mathbb{X}} f(x) := \frac{1}{2} \|Kx - x^*\|^2 + g(x) \quad (32.2)$$

حال فرض کنید متریک M را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$M = \frac{1}{\tau} I - K^*K \quad (33.2)$$

حال منظم‌سازی موریو یوشیدا برای تابع f تحت متریک M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_m(\bar{x}) := \min_x \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|_M^2 + \frac{1}{2} \|Kx - x^*\|^2 + g(x) \quad (34.2)$$

و نقطه $\hat{x} = \text{prox}_f^M(\bar{x})$ که با حل عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{x} = (I + \tau \partial g)^{-1} (\bar{x} - \tau K^*(K\bar{x} - x^*)) \quad (35.2)$$

که معادلاً به صورت زیر نیز می‌تواند نوشته شود:

$$\hat{x} = \text{prox}_{\tau g} \left(\bar{x} - \tau \nabla \left(\frac{1}{2} \|K \cdot - x^*\|^2 \right) (\bar{x}) \right) \quad (36.2)$$

که ترکیبی از یک مرحله کاهش گرادیان ضمنی ”رو به عقب” برای g و یک مرحله کاهش گرادیان ”رو به جلو” برای قسمت هموار $\frac{1}{2} \|K \cdot - x^*\|^2$ از تعریف تابع است.

الگوریتم ۴ روش روبه جلو-روبه عقب با طول گام ثابت (FB):

$x \in X$ را انتخاب کنید.

برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$x^{k+1} = T_\tau x^k = \text{prox}_{\tau g}(x^k - \tau \nabla f(x^k)) \quad (37.2)$$

حال در این جا می خواهیم حالت کلی تری از مسئله قبل را بیان کنیم. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x \in X} F(x) := f(x) + g(x) \quad (38.2)$$

در حالی که g مانند قبل تابعی نیم پیوسته پایینی و محدب و تابع f ، محدب با گرادیان لپشیتز باشد. ایده روش کاهش روبه جلو-روبه عقب، از ترکیب کاهش قسمت هموار f با کاهش ضمنی g است و همچنین عملگر زیر را تعریف می کنیم:

$$\bar{x} \rightarrow \hat{x} = T_\tau \bar{x} := \text{prox}_{\tau g}(\bar{x} - \tau \nabla f(\bar{x})) = (I + \tau \partial g)^{-1}(\bar{x} - \tau \nabla f(\bar{x})) \quad (39.2)$$

ضرورت تعریف عملگر بالا اینست که برای نقطه ثابت $\bar{x} = \hat{x}$ شرایط $0 \in \nabla f(\bar{x}) + \partial g(\bar{x})$ را که نشان دهنده کمینه بودن \hat{x} است را به وضوح می دهد.

قضیه ۴ فرض کنید $x^0 \in X$ و $\tau \leq 1/L$ و x^k دنباله ای باشد که در الگوریتم ۴ تعریف شده است. آنگاه نه تنها x^k به نقطه کمینه x^* همگراست بلکه نرخ همگرایی زیر را خواهیم داشت:

$$F(x^k) - F(x^*) \leq \frac{1}{2\tau K} \|x^* - x^0\|^2 \quad (40.2)$$

به علاوه اگر f و g محدب قوی با پارامترهای μ_f و μ_g باشد به طوریکه $\mu = \mu_f + \mu_g > 0$ خواهیم داشت:

$$F(x^k) - F(x^*) + \frac{1 + \tau\mu_g}{2\tau} \|x^k - x^*\|^2 \leq \omega^k \frac{1 + \tau\mu_g}{2\tau} \|x^0 - x^*\|^2 \quad (41.2)$$

در حالی که $\omega = 1 - \tau\mu_f / (1 + \tau\mu_g)$ در این صورت این رویکرد باعث مقاومت بیشتر روش در مقابل اختلال ها خواهد شد.

حال در شرایطی که $\mu = \mu_f + \mu_g = 0$ ، الگوریتمی کلی تر تحت عنوان FISTA خواهیم داشت که به شرح زیر است:

الگوریتم ۵ FISTA:

فرض کنید $0 < \tau < 1/L$ داده شده باشد. قرار دهید $q = \tau\mu/(1 + \tau\mu_g)$ و $x^{-1} = x^0 \in X$. $t_0 \in R$ را انتخاب کنید به طوری که $0 \leq t_0 \leq 1/\sqrt{q}$. برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$y^k = x^k + \beta_k(x^k - x^{k-1}) \quad (42.2)$$

$$x^{k+1} = T_\tau y^k = \text{prog}_{\tau g}(y^k - \tau \nabla f(y^k)) \quad (43.2)$$

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2} \geq \frac{k+1}{2} \quad (44.2)$$

$$\beta_k = \frac{t_k - 1}{t_{k+1}} \quad (45.2)$$

یکی از تعمیم‌های روش کاهش پروگزیمال، جایگزین کردن فاصله‌های دیگر بین x و y به جای $\frac{1}{2\tau}\|y - x\|^2$ در تابع تعریف عملگر پروگزیمال است که می‌تواند منجر به شرایط بهتری در بهینه‌سازی شود.

یکی از این دلایل این است که عملگر صفرکننده توابع به راحتی در فاصله مربع اقلیدسی قابل محاسبه نیست ولی در بعضی از متریک‌های غیرخطی بسیار راحت محاسبه می‌شود.

روش کاهش آینه (mirror) توسط (nemirovski and yudin (1983) به عنوان ابزاری برای بهینه‌سازی در فضای باناخ معرفی شد. این روش نیازمند تعریف تابعی کمکی محدب φ که گرادینش

نگاشتی بین فضای X و دوگانش X' باشد. ایده اصلی این روش، جایگزین کردن عبارت زیر به جای تکرار روش GD است:

$$\nabla\varphi(x^{k+1}) = \nabla\varphi(x^k) - \tau\nabla f(x^k) \quad (46.2)$$

و اگر φ -فاصله برگمن را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$D_\varphi(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \nabla\varphi(y), x - y \rangle \quad (47.2)$$

آنگاه به سادگی خواهیم دید که این برابر تعریف x^{k+1} به عنوان نقطه کمینه‌کننده عبارت زیر است.

$$\min_x \frac{1}{\tau} D_\varphi(x, x^k) + f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle \quad (48.2)$$

که می‌توان با کمینه کردن تقریب خطی f در x^k ، نقطه x^{k+1} را پیدا کرد.

در ادامه این بخش، به طور خلاصه تکنیک‌های اصلی بهینه‌سازی برای تعیین نقاط زینی را که معمولاً برای حل مسائل تصویربرداری استفاده می‌شوند، شرح خواهیم داد. هدف این رویکردها، مانند قبل، تقسیم یک مسئله پیچیده به زیرمسائل کوچکتر است که حل آنها ساده‌تر است، اگرچه بسته به ساختار و خصوصیات توابع، یک فرم ممکن است از شکل دیگر مناسب‌تر باشد. ما بیشتر روی یک نوع الگوریتم تمرکز خواهیم کرد که به الگوریتم «اولیه-دوگانه» یا «ADMM» معروف است.

مسئله‌ای که در نظر خواهیم گرفت موسوم به شکل استاندارد است:

$$\min_{x \in X} f(Kx) + g(x) \quad (49.2)$$

جاییکه f و g توابعی محدب و نیم پیوسته پایینی و $K : X \rightarrow Y$ عملگر خطی کراندار باشد. حال اگر f هموار باشد، روش FB راهکاری کارآمد برای حل مسئله است. در دیگر شرایط باید به روش‌هایی دیگر رجوع کنیم.

ایده اصلی این روش نوشتن مسئله به شکل نقطه زینی به صورت زیر است:

$$\max_y \min_x \langle y, Kx \rangle - f^*(y) + g(x) \quad (50.2)$$

و به صورت متناوب از کاهش متغیر x و افزایش متغیر دوگان y بهره خواهیم جست:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\tau g}(x^k - \tau K^* y^k) \quad (51.2)$$

$$y^{k+1} = \text{prox}_{\sigma f^*}(y^k - \sigma K x^{k+1}) \quad (52.2)$$

باید این نکته را متذکر شد که همگرایی این روش خیلی روشن نیست ولی برای اینگونه از مسائل بسیار کاراست به خصوص زمانی که با ترفند تسریع کننده کاهشی τ و افزایشی σ ترکیب شود. این روش موسوم به الگوریتم PDHG است که شمای کلی آنرا در زیر می بینیم:

الگوریتم ۶ ورودی: نقطه اولیه و دوگان (x^0, y^0) و طول گام های $\tau, \sigma > 0$.
 برای هر $k \geq 0$ نقطه (x^{k+1}, y^{k+1}) را به شکل زیر میابیم:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\tau g}(x^k - \tau K^* y^k) \quad (53.2)$$

$$y^{k+1} = \text{prox}_{\tau f^*}(y^k - \sigma K(2x^{k+1} - x^k)) \quad (54.2)$$

اثبات همگرایی این روش در (Esser, Zhang and Chan (2010) و همچنین نرخ همگرایی این روش Nemirovski (2004) گفته شده است. $\mathcal{O}(1/K)$ است که در

حال این روش را می توان به شکلی کلی تر تعمیم داد. فرض کنید می خواهیم تابع زیر را کمینه کنیم

$$\min_{x \in X} f(Kx) + g(x) + h(x) \quad (55.2)$$

در شرایطی که f و g توابعی محدب و نیم پیوسته پایینی و K عملگر خطی کراندار و تابع h محدب با گرادسانی L_h -لیپشیتز است.

ایده روشی که خواهیم گفت، جایگزین کردن روش FB به جای گام کاهشی است. یعنی:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\tau g}(x^k - (\tau K^* y^k + \tau \nabla h(x^k))) \quad (56.2)$$

که الگوریتم زیر را به ما می دهد:

الگوریتم ۷ شکل کلی روش تکرار اولیه-دوگان:

ورودی: نقطه پیشین $(\bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y})$ و طول گام‌های $\tau, \sigma > 0$.

خروجی: نقطه جدید $(\hat{x}, \hat{y}) = PD_{\tau, \sigma}(\bar{x}, \bar{y}, \tilde{x}, \tilde{y})$ که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{x} = \text{prox}_{\tau g}(\bar{x} - \tau(\nabla h(\bar{x}) + K^* \tilde{y})) \quad (57.2)$$

$$\hat{y} = \text{prox}_{\sigma f^*}(\bar{y} + \sigma K \tilde{x}) \quad (58.2)$$

قضیه ۵ فرض کنید $\tau, \sigma > 0$ و $(x^0, y^0) \in X \times Y$ داده شده باشد. به‌ازای هر $k \geq 0$ قرار دهید:

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = PD_{\tau, \sigma}(x^k, y^k, 2x^{k+1} - x^k, y^k) \quad (59.2)$$

حال فرض کنید:

$$\left(\frac{1}{\tau} - L_h\right) \frac{1}{\sigma} \geq \|K\|^2 \quad (60.2)$$

آنگاه برای هر $(x, y) \in X \times Y$ خواهیم داشت:

$$L(X^k, y) - L(x, Y^k) \leq \frac{\frac{1}{\tau} \|x - x^0\|^2 + \frac{1}{\sigma} \|y - y^0\|^2}{k} \quad (61.2)$$

جایی که L عملگر لاگرانژ است و

$$X^k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x^i \quad (62.2)$$

$$Y^k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y^i \quad (63.2)$$

که با فرض‌های بالا، نقطه (x^k, y^k) به‌طور ضعیف در بعد متناهی، به نقطه زینی همگرا می‌شود.

یکی از مهمترین ویژگی‌های روش اولیه-دوگان این است که می‌توان برای توابعی که نظم بیشتری

دارند، خاصیت «تسریع شدن» را اضافه کرد.

در اولین مورد فرض کنید تابع $g + h$ (یا f^*) محدب قوی باشد. به‌وضوح مشخص است که

f^*, μ_f -محدب قوی است. آنگاه $f(Kx)$ گرادیان $(\|K\|^2/\mu_f)$ -لیپشیتز دارد و نرخ همگرایی مانند

گذشته $\mathcal{O}(1/k^2)$ است. حال فرض کنید تابع g ، μ_g -محدب و تابع h ، μ_h -محدب باشد. در این حالت می‌توانیم همواره $h(x)$ را با $h(x) - \mu_h \|x\|^2/2$ و $g(x)$ را با $g(x) + \mu_h \|x\|^2/2$ جایگذاری کنیم. با این فرضیات به سراغ روش اولیه-دوگان تسریع شده می‌رویم:

الگوریتم ۸ روش اولیه-دوگان تسریع شده ۱:

برای $\tau_0 = 1/(2L_h)$ و $\sigma_0 = L_h/L^2$ و $\theta_0 = 0$ و $x^{-1} = x^0 \in X$ و $y^0 \in Y$ را انتخاب کنید. برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = PD_{\tau_k, \sigma_k}(x^k, y^k, x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}), y^{k+1}) \quad (۶۴.۲)$$

$$\theta_{k+1} = 1/\sqrt{1 + \mu_g \tau_k}, \quad \tau_{k+1} = \theta_{k+1} \tau_k, \quad \sigma_{k+1} = \sigma_k / \theta_{k+1} \quad (۶۵.۲)$$

قضیه ۶ فرض کنید $(x^k, y^k)_{k \geq 0}$ تکراری به دست آمده آمده از الگوریتم ۸ باشد. برای هر $k \geq 1$ تعریف کنید:

$$t_k = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_0} \quad (۶۶.۲)$$

$$T_k = \sum_{i=1}^k t_i \quad (۶۷.۲)$$

و نقطه میانگین

$$(X^k, Y^k) = \frac{1}{T_k} \sum_{i=1}^k t_i (x^i, y^i) \quad (۶۸.۲)$$

آنگاه برای هر $k \geq 1$ و $(x, y) \in X \times Y$ داریم:

$$T_k ((L(X^k, y) - L(x, Y^k)) + \frac{t_{k+1}^2}{2\tau_0} \|x^0 - x\|^2) \leq \frac{1}{2\tau_0} \|x^0 - x\|^2 + \frac{1}{2\sigma_0} \|y^0 - y\|^2 \quad (۶۹.۲)$$

پس می‌توان دریافت نرخ همگرایی این روش برابر $1/T_k = \mathcal{O}(1/k^2)$ است.

حال فرض کنید f^* نیز محدب قوی با $\mu_{f^*} = 1/L_f$ باشد. آنگاه انتخاب مناسبی برای σ و τ و

θ می‌تواند منجر به افزایش بازده نرخ همگرایی شود که این انتخاب‌ها عبارتند از:

$$\alpha = \frac{\mu_{f^*}(\mu_g + L_h)}{2L^2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\mu_g L^2}{\mu_{f^*}(\mu_g + L_h)^2}} - 1 \right) \in (0, 1) \quad (70.2)$$

$$\tau = \frac{\alpha}{\mu_g(1 - \alpha)} \quad (71.2)$$

$$\sigma = \frac{\alpha}{\mu_{f^*}(1 - \alpha)} \quad (72.2)$$

$$\theta = 1 - \alpha \quad (73.2)$$

الگوریتم ۹ روش اولیه-دوگان تسریع شده ۲:

فرض کنید $\theta^{-1} = 1 + \mu_g \tau = 1 + \mu_{f^*} \sigma$ و $\theta L^2 \sigma \tau \leq 1 - L_h \tau$ و $x^{-1} = x^0 \in X$ و $y^0 \in Y$ را انتخاب کنید.

برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = PD_{\tau, \sigma}(x^k, y^k, x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}), y^{k+1}) \quad (74.2)$$

قضیه ۷ فرض کنید $(x^k, y^k)_{k \geq 0}$ تکراری به دست آمده آمده از الگوریتم ۸ باشد. برای هر $k \geq 1$ تعریف کنید:

$$t_k = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_0} \quad (75.2)$$

$$T_k = \sum_{i=1}^k \theta^{-i+1} \quad (76.2)$$

و نقطه میانگین

$$(X^k, Y^k) = \frac{1}{2T_k} \sum_{i=1}^k \theta^{-i+1} (x^i, y^i) \quad (77.2)$$

آنگاه برای هر $k \geq 1$ و $(x, y) \in X \times Y$ داریم:

$$L(X^k, y) - L(x, Y^k) \leq \frac{1}{T_k} \left(\frac{1}{2\tau} \|x^0 - x\|^2 + \frac{1}{2\sigma} \|y^0 - y\|^2 \right) \quad (78.2)$$

و مشاهده می‌شود که $1/T_k = \mathcal{O}(\theta^k)$ که نشان‌دهنده خطی بودن نرخ همگرایی است.

شاید یکی از قدیمی‌ترین و بحث برانگیزترین روش‌های موجود در حل مسائل غیرهموار محدب، روش جهت متناوب ضرب‌کننده‌ها یا "ADMM" باشد که توسط Glowinski and Marroco (1975) پیشنهاد شده است. در شکل استاندارد این روش، هدف الگوریتم ADMM حل مسائلی به شکل زیر است:

$$\min_{Ax+By=b} f(x) + g(y) \quad (۷۹.۲)$$

ایده این است که یک ضریب لاگرانژ z را به منظور حل بهینه‌سازی به روش نقطه‌زینی "لاگرانژ افزایش‌یافته" تعریف کنیم در شرایطی که: $\gamma \geq 0$ به طوری که:

$$\min_{x,y} \sup_z f(x) + g(y) + \langle z, b - Ax - By \rangle + \frac{\gamma}{2} \|b - Ax - By\|^2 \quad (۸۰.۲)$$

در این حالت واضح است که عبارت درجه آخر شرایط بهینگی و یا مقدار نقطه زینی را تغییر نمی‌دهد، ولی باعث پایا شدن تکرار می‌شود که این امر با کمینه کردن x و y برای z ثابت رخ داده و مسئله را حل پذیر می‌کند.

الگوریتم ۱۰ ADMM:

y^0 و z^0 و $\gamma > 0$ را انتخاب کنید.

برای هر $k \geq 0$ داریم:

با کمینه کردن عبارت زیر x^{k+1} را پیدا کنید.

$$x \rightarrow f(x) + \langle z^k, Ax \rangle + \frac{\gamma}{2} \|b - Ax - By^k\|^2 \quad (۸۱.۲)$$

با کمینه کردن عبارت زیر y^{k+1} را پیدا کنید.

$$y \rightarrow g(y) + \langle z^k, By \rangle + \frac{\gamma}{2} \|b - Ax^{k+1} - By\|^2 \quad (۸۲.۲)$$

و به روزرسانی

$$z^{k+1} = z^k + \gamma (b - Ax^{k+1} - By^{k+1}) \quad (۸۳.۲)$$

در عمل، ساده‌ترین راه برای حل کردن این مدل از مسائل، استفاده از الگوریتم اوزاوا است. این الگوریتم ما را مجبور می‌کند تا مسئله را در (x, y) با z ثابت، کمینه کنیم که این کار نیز می‌تواند مسئله‌ای به وجود آورد که به سختی همان مسئله اول است. پس این راه نیز منطقی به نظر نمی‌آید، پس نیاز به روشی کلی‌تر و منطقی‌تر داریم. ایده‌ای که در الگوریتم ۱۰ پیشنهاد و تجزیه و تحلیل شد به وضوح شامل کمینه شدن x و y قبل از به‌روزرسانی z است.

یک الگوریتم مرتبط با این روش، الگوریتم "AMA" است که در اولین قدم تابع درجه دوم را کمینه می‌کند. این خاصیت می‌تواند یک ویژگی بسیار جالب برای توابع هدف محدب قوی است. در خیلی از مقالات به همگرایی این روش اشاره شده است که از مجال این پروژه خارج است پس به همگرایی این روش نخواهیم پرداخت ولی نرخ همگرایی این روش را بیان خواهیم کرد که این نرخ کمتر است از $\mathcal{O}(1/k)$.

حال می‌خواهیم الگوریتم دیگری از روش تقسیم را معرفی کنیم که با الگوریتم‌های ADMM و PDHG در یک کلاس قرار دارد. واضح است که اگر بخواهیم از روش PDHG برای تابعی به شکل $\min_{x \in X} f(Kx) + g(x)$ استفاده کنیم، به طوری که $K = Id$ آنگاه دنباله تکرار در شرایطی که $\sigma\tau \leq 1$ به شکل زیر است:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\tau g}(x^k - \tau y^k) \quad (۸۴.۲)$$

$$y^{k+1} = \text{prox}_{\sigma f^*}(y^k + \sigma(2x^{k+1} - x^k)) \quad (۸۵.۲)$$

حال فرض کنید $\sigma = 1/\tau$. آنگاه خواهیم داشت:

$$2x^{k+1} - x^k + \tau y^k = \tau y^{k+1} + \text{prox}_{\tau f}(2x^{k+1} - x^k + \tau y^k) \quad (۸۶.۲)$$

و اگر برای هر k قرار دهید $v^k = x^k - \tau y^k$ آنگاه دنباله‌ای از تکرار زیر خواهیم یافت:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\tau g} v^k \quad (۸۷.۲)$$

$$v^{k+1} = v^k - x^{k+1} + \text{prox}_{\tau f}(2x^{k+1} - v^k) \quad (۸۸.۲)$$

که این دقیقاً الگوریتم داگلاس راجفورد (DR) است.

۳.۲ روش‌های بهینه‌سازی غیرمحدب

در آخرین قسمت از این بخش، مختصراً الگوریتم‌هایی در زمینه بهینه‌سازی غیرمحدب را بیان خواهیم کرد.

یکی از متداول‌ترین راه‌ها برای تعمیم روش تسریع‌شده نوع کاهش پروگزیمال به مسائلی کلی‌تر این است که توابعی به شکل زیر را در نظر بگیریم:

$$\min_{x \in X} F(x) := f(x) + g(x) \quad (۸۹.۲)$$

در شرایطی که g مانند قبل تابعی نیم پیوسته پایینی و محدب و f تابعی هموار است ولی لزوماً محدب نیست. در این حالت به وسیله یافتن x^* که در شرایط زیر صدق کند، به دنبال نقاط بحرانی خواهیم رفت:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial g(x^*) \quad (۹۰.۲)$$

برای حل اینگونه از مسائل بهینه‌سازی از الگوریتم زیر استفاده خواهیم کرد که هم ساده‌ترین راه و هم به لحاظ تجربی سریع‌ترین راه رسیدن به جواب است.

الگوریتم ۱۱ روش "ipiano":

برای هر $x^{-1} = x^0 \in X$ و برای هر k ، $\beta \in [0, 1]$ و $\alpha \in (0, 2(1 - \beta)/L)$ را انتخاب کنید.

برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\alpha g} (x^k - \alpha \nabla f(x^k) + \beta (x^k - x^{k-1})) \quad (۹۱.۲)$$

که در اینجا L ثابت لیبشیتز برای ∇f است. به علاوه دنباله $(x^k)_k$ که توسط الگوریتم بالا به وجود می‌آید، همچنان به نقطه بحرانی همگرا خواهد بود.

همچنین باید به الگوریتمی دیگر اشاره کنیم که در مسائل غیر محدب بسیار کاربردیست. به طور مثال تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x,y} f(x, y) + g_1(x) + g_2(y) \quad (۹۲.۲)$$

در شرایطی که f مجددا هموار است ولی لزوما محدب نیست و همچنین g_1 و g_2 توابعی غیرهموار هستند که احتمالا غیر محدب نیز می‌باشند.

الگوریتم ۱۲ روش "PALM":

$(x^0, y^0) \in X \times Y$ و $\gamma_1 > 1$ و $\gamma_2 > 1$ را انتخاب کنید.

برای هر $k \geq 0$ داریم:

را انتخاب کنید و قرار دهید: $\tau_{1,k} = (\gamma_1 L_1(y^k))^{-1}$

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\tau_{1,k} g_1} (x^k - \tau_{1,k} \nabla_x f(x^k, y^k)) \quad (۹۳.۲)$$

را انتخاب کنید و قرار دهید: $\tau_{2,k} = (\gamma_2 L_2(x^{k+1}))^{-1}$

$$y^{k+1} = \text{prox}_{\tau_{2,k} g_2} (y^k - \tau_{2,k} \nabla_y f(x^{k+1}, y^k)) \quad (۹۴.۲)$$

در حالی که $L_1(y)$ ثابت لیشیتز $\nabla_x f(\cdot, y)$ و $L_2(x)$ ثابت لیشیتز $\nabla_y f(x, \cdot)$ است که کراندار در نظر گرفته می‌شوند.

فصل سوم

کاربرد

در ادامه گزارش پروژه نشان خواهیم داد که چگونه می توان از الگوریتم های تاکنون ارائه شده برای حل تعدادی از مسائل جالب در پردازش تصویر و بینایی رایانه ای استفاده کرد.

۱.۳ تغییرات کلی

در حالت پیوسته، ایده مدل ROF این است که عبارت زیر را در فضای توابع با تغییرات محدود به حداقل برساند:

$$\min_{u} \lambda \int_{\Omega} |Du| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(x) - u^{\square}(x))^2 dx \quad (1.3)$$

در شرایطی که Ω دامنه تصویر، u^{\square} تصویر نویزدار داده شده و λ پارامتر تنظیم باشد. قسمت $\int_{\Omega} |Du|$ در عبارت بالا قسمت تغییرات کلی تصویر u است. بهترین راه برای تعریف تغییرات کلی، توسط دوگان

است. فرض کنید $\Omega \subset R^d$ ، مجموعه‌ای باز و d بعدی باشد. آنگاه:

$$\int_{\Omega} |Du| := \sup \left\{ - \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx : \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega; R^d), |\varphi(x)| \leq 1, \forall x \in \Omega \right\} \quad (۲.۳)$$

و می‌گوییم که u تغییرات را محدود کرده است اگر و فقط اگر این مقدار محدود باشد.
فضای زیر

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^{-1} : \int_{\Omega} |Du| < +\infty \right\} \quad (۳.۳)$$

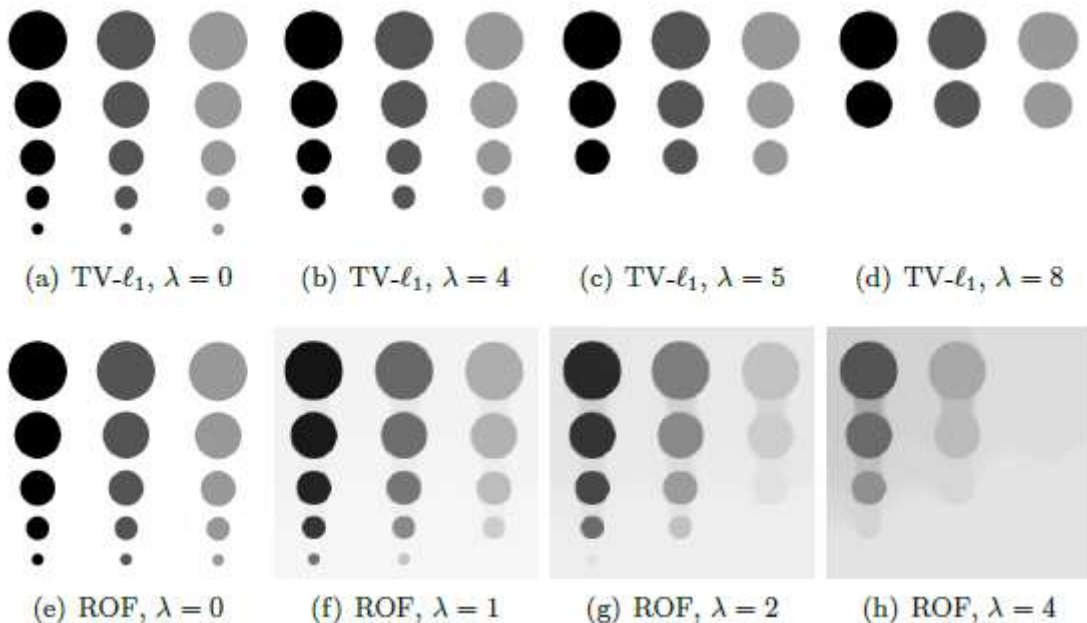
از توابع با تغییرات محدود که به نرم $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^{-1}} + \int_{\Omega} |Du|$ مجهز است، فضای باناخ است. یک تغییر ساده در مدل ROF این است که عبارت درجه دوم را با نرم L^1 جایگزین کنیم:

$$\min_{\lambda} \lambda \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} (u(x) - u^{\blacksquare}(x)) dx \quad (۴.۳)$$

که به این مدل، مدل $TV-l_1$ می‌گویند. این مدل در حذف نویز تکانه‌ای از تصاویر موثر است. حال با کمی تغییر در مدل $TV-l_1$ به مدل "TV-entropy" خواهیم رسید که به شکل زیر است:

$$\min_{\lambda} \lambda \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Omega} (u(x) - u^{\blacksquare}(x) \log u(x)) dx \quad (۵.۳)$$

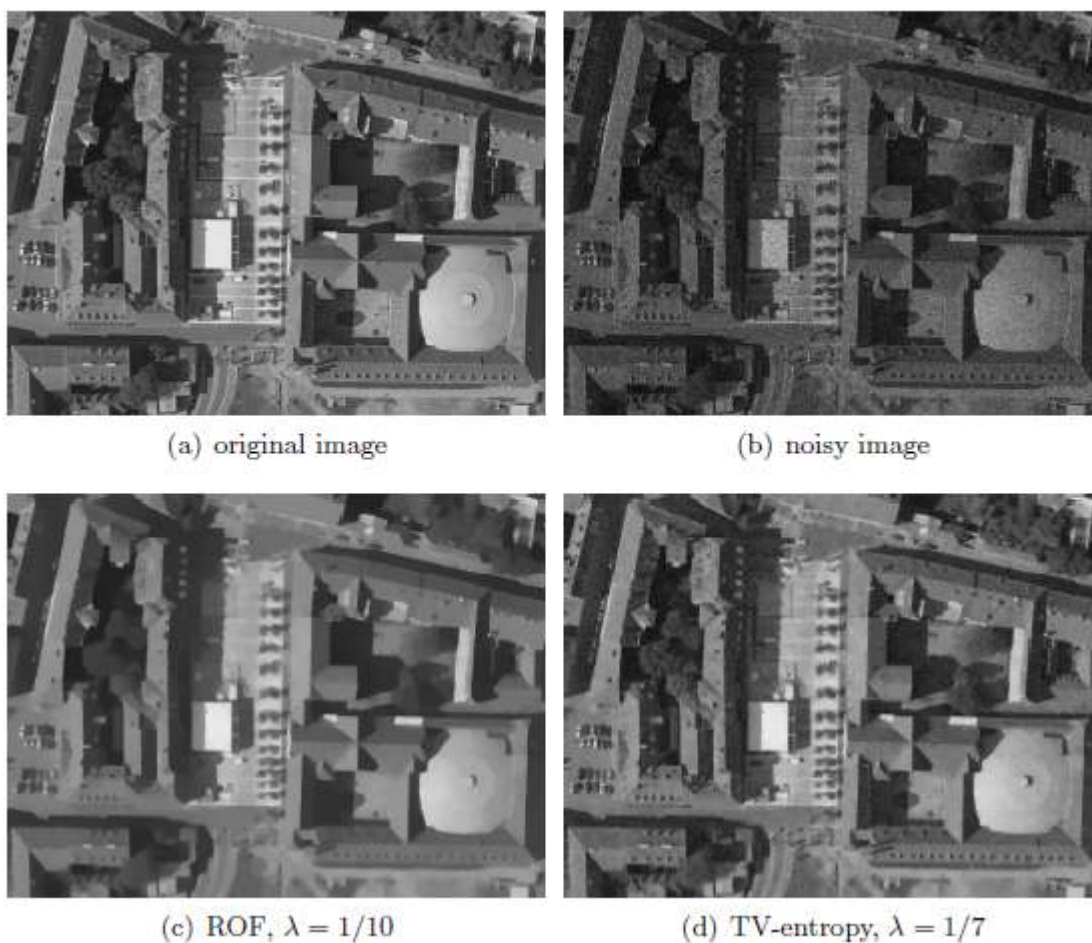
در این مدل باید توجه داشت که $u(x) > 0$.



شکل ۱.۳

در شکل ۱.۳ چهار تصویر اول، نتایج استفاده از مدل $TV-l_1$ و چهار تصویر دوم، نتایج استفاده از مدل ROF است. همچنین در هر دو مدل از الگوریتم ۶ و الگوریتم ۸ استفاده شده است. افزایش تدریجی پارامتر تنظیم λ در مدل $TV-l_1$ باعث می‌شود که ساختارهای بزرگتر از تصویر حذف شوند. توجه داشته باشید که ساختارها فقط با توجه به اندازه آنها حذف می‌شوند و نه بر اساس وضوح آنها. اما در مدل ROF اندازه و وضوح با یکدیگر آمیخته شده و با افزایش تدریجی پارامتر تنظیم، اندازه و وضوح هر دو از بین می‌روند.

شکل ۲.۳ مقایسه‌ای بین دو مدل ROF و TV-entropy در حضور نویز پواسون است. تصویر نویزدار با اندازه 480×640 پیکسل است. هر دو مدل نیز با روش PDHG کمینه شده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که مدل TV-entropy بهتر با خواص نویز نویز پواسون سازگار است و از این رو منجر به حفظ بهتر ساختارهای تاریک و وضوح بهتر می‌شود.



شکل ۲.۳

۲.۳ تغییرات کلی تعمیم یافته

در این بخش تلاش شده تا تغییرات کلی را به همواری مرتبه بالاتر تعمیم دهیم. مدل دی نویز کردن یک تصویر که بر اساس تغییرات کلی تعمیم یافته مرتبه دوم (TGV^2) می باشد، به صورت زیر است:

$$\min_{u,v} \lambda_1 \int_{\Omega} |Du - v| + \lambda_0 \int_{\Omega} |Dv| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(x) - u^{\square}(x))^2 dx \quad (۶.۳)$$

به طوری که $u \in BV(\Omega)$ و $v \in BV(\Omega; R^2)$ و $\lambda_{0,1} > 0$.

ایده TGV^2 این است که گرادیان Du تصویر را مجبور به انحراف در یک مجموعه پراکنده از یک میدان برداری v کند، در شرایطی که خود بردار دارای گرادیان پراکنده باشد. با این کار از اثر پلکان بر روی قسمت های دور تصویر خلاص شده و در عین حال امکان داشتن لبه های تیز را حفظ فراهم می کنید.



(a) original image g



(b) noisy image f



(c) ROF, $\lambda = 0.1$



(d) TGV^2 , $\lambda_{0,1} = (1/4, 1/9)$

شکل ۳.۳

شکل ۳.۳ مقایسه‌ای بین دو مدل ROF و TGV^2 است که تصویر اول تصویر اصلی و تصویر دوم تصویر نویزدار شده با نویز گوسی و با انحراف معیار $\sigma = 0.1$ می‌باشد. تصاویر بعدی هم دی‌نویز شده تصویر نویزدار شده با استفاده از مدل‌های ROF و TGV^2 به ترتیب می‌باشد. همانگونه که در شکل مشاهده می‌کنید، مهمترین برتری مدل TGV^2 نسبت به مدل ROF، بازسازی سطوح هموار در شرایط حفظ ناپیوستگی‌های تیز تصویر است.

۳.۳ تغییرات کلی، مسائل خطی معکوس را منظم می‌کند

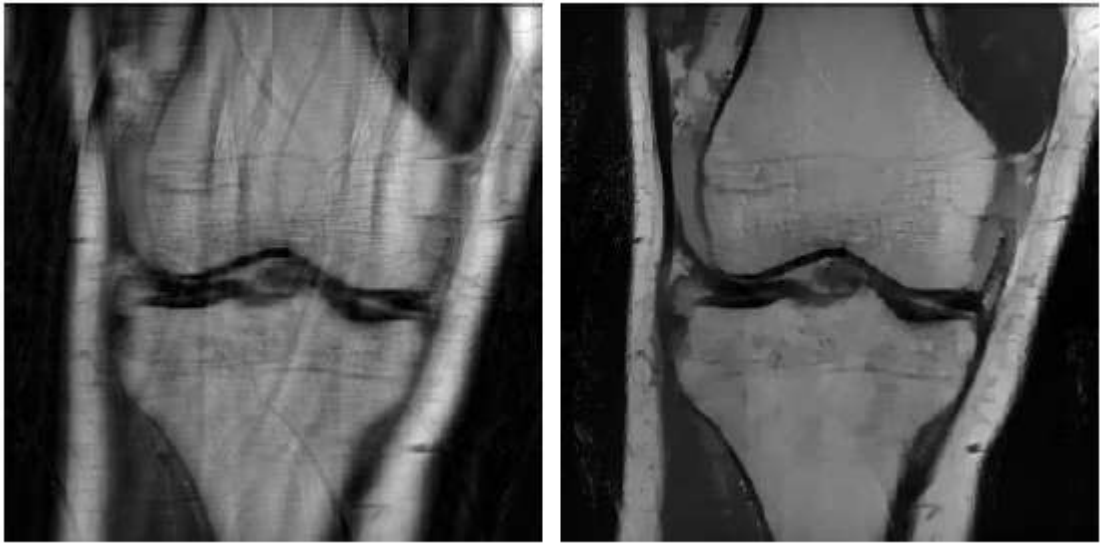
تغییرات کلی و تعمیم‌های آن مثل TGV^2 به‌عنوان یک تنظیم‌کننده برای مسائل خطی معکوس عام مانند رفع تکان تصویر، بازسازی تصویر در پرتونگاری کامپیوتری (CT) و یا تصویربرداری رزونانس مغناطیسی (MRI) عمل می‌کند. بهترین ایده برای حل اینگونه مسائل، در نظر گرفتن تغییرات کلی به شکل زیر است که مدل TV-MRI می‌باشد:

$$\min \lambda \int_{\Omega} |Du| + \sum_{c=1}^C \frac{1}{2} \|F(\sigma_c u) - g_c\|_2^2 dx \quad (۷.۳)$$

که F تبدیل فوریه و g_c و $c = 1, \dots, C$ داده‌های چند کانال به دست آمده از سیم پیچ‌ها و σ_c تخمین حساسیت و مختلط مقدار است. گسسته‌سازی مدل بسیار ساده است و همچنین تصویر مختلط مقدار $u \in C^{m \times n}$ را با $m \times n$ پیکسل در نظر می‌گیریم. همچنین فرض خواهیم کرد $c = 1, \dots, C$ ‌های مجزا برای حساسیت $\sigma_c \in C^{m \times n}$ و داده‌ی $g_c \in C^{m \times n}$ داده شده باشد. پس شکل گسسته این مدل به شکل زیر است:

$$\min \lambda \|Du\|_{2,1} + \sum_{c=1}^C \frac{1}{2} \|F(\sigma_c ou) - g_c\|^2 \quad (۸.۳)$$

که $F : C^{m \times n} \rightarrow C^{m \times n}$ تبدیل فوریه و o نشان‌دهنده ضرب هادامارد (ضرب عنصر به عنصر دو ماتریس) است.



شکل ۴.۳

شکل ۴.۳ مدل TV-MRI را برای بازسازی یک قطعه تصویر MRI از زانو نشان می دهد. عکس چپ بازسازی قطعه بدون استفاده از تغییرات کلی تنظیم شده و عکس سمت راست بازسازی بدست آمده از مدل تغییرات کلی منظم شده است. مشاهده می شود که مدل بازسازی تغییرات کلی منظم شده با موفقیت مشکلات مصنوعی ایجاد شده توسط داده های گم شده فوریه را از بین می برد.

۴.۳ جریان نوری

در بینایی رایانه ای، تغییرات کلی منظم شده، تبدیل به انتخابی محدود برای محاسبه جریان نوری است. جریان نوری، حرکت ظاهری الگوهای شدت (ناشی از اجسام، ساختارها، سطوح) در یک صحنه است. فرض اصلی جریان نوری، ثبات روشنایی است، که بیان می کند شدت ساختارهای بصری در طول زمان ثابت می ماند.

فرض کنید $I(x, t)$ تابع شدت زمانی، مکانی باشد که روی $\Omega \times [0, T]$ تعریف می شود، جایکه Ω زیرمجموعه ای از R^d و $[T, 0]$ که $T > 0$ دامنه زمانی باشد. فرض ثبات روشنایی می گوید:

$$I(x, t) = I(x + \nabla_x, t + \nabla_t) \quad (۹.۳)$$

برای جابجایی های فضایی به اندازه کافی کوچک ∇_x و تفاوت های زمانی ∇_t .

با فرض اینکه تابع شدت فضا زمانی، به اندازه کافی هموار باشد، می توان از بسط تیلور درجه اول برای بدست آوردن فرض ثبات روشنایی خطی استفاده کرد که به عنوان محدودیت جریان نوری نیز شناخته می شود:

$$\nabla I(x, t)^T \cdot (v(x), 1) \quad (10.3)$$

جاییکه $v = (v_1, v_2)$ میدان سرعت بر حسب زمان باشد.
 حال مدل جریان نوری مبتنی بر تغییرات کلی معادل است با:

$$\min_v \lambda \int_{\Omega} |Dv|_{p,1} + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |\nabla I(x, t)^T \cdot (v(x), 1)|^q dx \quad (11.3)$$

جاییکه نرم های متفاوتی را می توان هم برای تغییرات کلی و هم برای قسمت برازش داده در نظر گرفت اما متداول ترین نرم انتخابی برای عبارت بالا $p = 2$ و $q = 1$ است.



(a) input images (averaged)



(b) velocity field

شکل ۵.۳

شکل ۵.۳ نمونه ای از محاسبه جریان نوری در یک صحنه رانندگی معمولی خودرو را نشان می دهد. می توان مشاهده کرد که میدان حرکت به خوبی بازیابی شده است، اما ما همچنین می توانیم

یک مشکل معمولی در محاسبه جریان نوری مشاهده کنیم: ماشین در سمت راست (که خود بافت ضعیفی دارد) در سایه درخت در حال حرکت است. این یک بافت ایجاد می کند که همراه با ماشین حرکت نمی کند، و از این رو سرعت بازیابی شده، سرعت خیابان است و نه سرعت ماشین. در سیستم های کمک راننده و رانندگی خودکار، نتیجه محاسبه جریان نوری نشانه مهمی، به عنوان مثال در جلوگیری از تصادف است.

فصل چهارم

نتیجه‌گیری

در این پروژه به کاربرد بهینه‌سازی در پردازش تصویر پرداختیم و بدین منظور چند مدل را تشریح کردیم. باید به این نکته توجه کرد که مدل‌های بیان‌شده لزوماً بهترین مدل‌های ممکن نبوده و صرفاً مدل‌هایی بودند که شرایط بهینگی نسبی را برای استفاده‌کنندگان فراهم می‌کردند. بعلاوه اینکه نرخ همگرایی الگوریتم‌های استفاده‌شده در این مدل‌ها سرعت مناسبی را دارا بود و همگرایی آنها نیز تضمین شده بود.

کتابنامه

1. A. Chambolle and C. Pock, “An introduction to continuous optimization for imaging,” *Acta Numerica*, **25** (2012).
2. A. Chambolle, “An algorithm for total variation minimization and applications,” *Journal of Mathematical imaging and vision* **20** (2004).
3. A. Chambolle, “Total variation minimization and a class of binary MRF models,” *Lecture Notes in Computer Science* **3757** (2005).
4. T. F. Chan and L. A. Vese, “Active contour and segmentation models using geometric PDE’s for medical imaging,” In *Geometric Methods in Bio-medical Image Processing, Mathematics and Visualization*, Springer, pp. 63-75 (2002).
5. G. Chen and M. Teboulle, “A proximal-based decomposition method for convex minimization problems,” *Math. Program. A* **64**, 81-101 (1994).
6. D. Davis, “Convergence rate analysis of primal-dual splitting schemes,” *SIAM J. Optim.* **25**, 1912-1943 (2015).
7. R. L. Dykstra, “An algorithm for restricted least squares regression,” *J. Amer. Statist. Assoc.* **78** (384), 837-842 (1983).
8. I. Ekeland and R. Témam, “Convex Analysis and Variational Problems (translated from French),” Vol. **28** of *Classics in Applied Mathematics*, SIAM (1999).
9. E. Esser, “Applications of Lagrangian-based alternating direction methods and connections to split Bregman, CAM Report 09-31, UCLA (2009).
10. L. C. Evans and R. F. Gariepy, “Measure Theory and Fine Properties of Functions,” CRC Press (1992).

11. X. L. Fu, B. S. He, X. F. Wang and X. M. Yuan, "Block-wise alternating direction method of multipliers with Gaussian back substitution for multiple block convex programming," (2014).
12. D. Geman and G. Reynolds, "Constrained restoration and the recovery of discontinuities," IEEE Trans. PAMI **14**, 367-383 (1992).
13. Giusti, "Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation," Birkhäuser (1984).
14. D. S. Hochbaum, "An efficient algorithm for image segmentation, Markov random fields and related problems," J. Assoc. Comput. Mach. **48**, 686-701 (2001).
15. J. L. Morales and J. Nocedal, "Remark on Algorithm 778: L-BFGS-B: Fortran subroutines for large-scale bound constrained optimization," ACM Trans. Math. Software **38**, 7 (2011).

Abstract

Various problems in imaging are solved by continuous optimization methods. The aim of this project is an advanced description of these methods to solve such problems and provide effective models. We place special emphasis on first-order optimization designs that can be used on non-smooth and large-scale problems and deal with imaging problems. We examine and compare different algorithms for non-smooth imaging problems, such as denoising and deblurring. In addition, we provide algorithms for more advanced problems, such as magnetic resonance imaging and optical current estimation.



University of Tehran

College of Science

School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

An introduction to continuous optimization for image processing

Ariyan Tabesh

Supervisor: Dr. Alireza Hosseini

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for
the degree of B.Sc. in
mathematics and applications

July 2021