پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

خواص توپولوژیک حلقه‌های استنلی‌ـ‌رایزنر و مجتمع‌های سادکی

نگارنده

حانیه عبدالملکی

استاد راهنما: دکتر سیامک یاسمی

پروژه برای دریافت درجه کارشناسی

در رشته ریاضی محض

تابستان ۱۴۰۱

چکیده

در این پروژه سعی شده تعدادی از خواص توپولوژیک مجتمع سادکی دلخواه Δ معرفی و بررسی شود. خواص توپولوژیک Δ خواصی هستند که تنها به نوع همسانریختی Δ به عنوان یک فضای توپولوژیک بستگی دارند.
شناسایی و بررسی این خواص معمولاً به کمک شناسایی خواص جبری حلقه‌ی استنلی-رایزنر $\mathbb{K}[\Delta]$ مربوط به مجتمع سادکی Δ صورت میپذیرد.

سپاسگزاری

سپاسگزاری

با سپاس از استاد گرانقدرم دکتر سیامک یاسمی که مرا از هر جهت در تدوین این پروژه یاری کردند.

پیشگفتار

در رساله‌ی استنلی و همچنین نوشته هایی کمی قدیمیتر از سایر نویسندگان، از جبر جابه‌جایی برای بررسی حلقه‌های خارج قسمتی ایده‌آل های تولید شده توسط تک جمله‌ای های خالی از مربع استفاده میشد. رایزنر مشاهده کرد که این حلقه‌ها به طور یکتا توسط یک مجتمع سادکی مشخص میشوند. بعدها این حلقه‌ها، حلقه‌های استنلی ـ رایزنر نام گرفتند.

بسیاری از گزاره های ترکیبیاتی، جبری و توپولوژیکی که درباره ی پُلیتوپ ها و مثلث بندی کردن کره و منیفلد ها با مطالعه ی حلقه استنلی ـ رایزنر آن ها اثبات شده اند.

توپولوژی جبری نشان میدهد که هر مجتمع سادکی با یک فضای توپولوژیک همراه است که به آن سازه‌ی هندسی مجتمع سادکی میگویند و سازه‌های هندسی مختلف برای یک مجتمع سادکی همسانریخت هستند.

نتایج مطالعات نشان میدهند که تعداد نه چندان اندکی از خواص Δ یا خواص جبری $\mathbb{K}[\Delta]$ تنها به $\mathbb{K}$ و نوع همسانریختی سازه‌ی هندسی آن ربط دارد. به این خواص، خواص توپولوژیک Δ یا $\mathbb{K}[\Delta]$ گفته میشود.

در این متن ابتدا به معرفی حلقه‌های استنلی ـ رایزنر و مجتمع های سادکی میپردازیم. سپس با استفاده از ابزارهای توپولوژی جبری به بررسی برخی خواص این حلقه‌ها میپردازیم و تعدادی از خواص توپولوژیک این حلقه ها را معرفی میکنیم همچنین برای تعداد دیگری از این خواص مثال نقض آورده میشود.

برای خواندن این متن انتظار میرود خواننده با مفاهیم ابتدایی توپولوژی جبری آشنا باشد. برای درک بهتر بعضی از اثبات ها دانش حدودی درباره ی بعضی مفاهیم جبر جابه‌جایی لازم است که در صورت نیاز در متن به خواننده معرفی خواهند شد. لازم به ذکر است که منبع اصلی این پروژه، رساله ی ولکر [۱] است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مجتمع سادکی و حلقه‌ی استنلی-رایزنر

تعریف ۱.۱. *یک مجتمع سادکی Δ زیرمجموعه ای از مجموعه ی توانی 2^{Ω} برای یک مجموعه‌ی زمینه‌ای و ناتهی Ω است به طوریکه اگر $A \subseteq B \in \Delta$ آنگاه $A \in \Delta$.*

$\{\emptyset\}$ به عنوان یک مجتمع سادکی قابل قبول است و همچنین با توجه به تعریف مشخص است که تمام مجتمع های سادکی ناتهی هستند. به $F \in \Delta$ یک وجه گفته میشود و به وجه ماکسیمال (باتوجه به زیرمجموعه بودن) وجه-واره گفته میشود. همچنین از علامت $\bar{F}$ برای مجتمع سادکی 2^F و از علامت ∂F برای مجمع سادکی $\bar{F} \setminus \{F\}$ استفاده میشود.

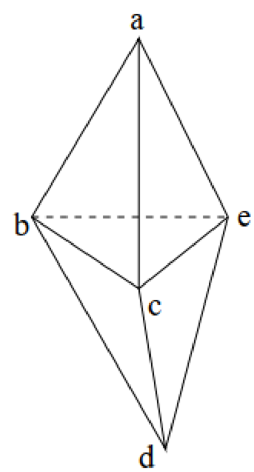
فرض کنید $\mathbb{K}$ میدان باشد و $S_{\Omega} = \mathbb{K}[x_{\omega} : \omega \in \Omega]$ یک حلقه ی چندجمله ای روی $\mathbb{K}$ باشد. برای زیرمجموعه ی $A \subseteq \Omega$ از نماد x_A برای $\prod\limits_{\omega \in A} x_A$ استفاده میکنیم.

تعریف ۲.۱. *حلقه‌ی استنلی-رایزنر $\mathbb{K}[\Delta]$ برای مجتمع سادکی Δ حلقه‌ی خارج قسمتی S_{Ω}/I_{Δ} است. به $I_{\Delta} = (x_A : A \notin \Delta, A \subseteq \Omega)$ ایده‌آل استنلی-رایزنر میگویند.*

مجموعه ی تک جمله ای های x_N برای غیروجه های مینیمال N از Δ یک مولد تک جمله ای مینیمال برای مجموعه ی Δ است.

مثال ۳.۱. *فرض کنید Δ مجتمع سادکی ۱.۱ باشد. وجه-واره های آن abc, abe, ace, bcd, bce و cde هستند.*

همچنین غیروجه های مینیمال آن ad و bce هستند و بنابراین $I_\Delta = (ad, bce)$. سازه‌ی هندسی این مجتمع سادکی یکریخت با $\mathbb{S}^2$ است.



شکل ۱.۱: مجتمع سادکی هومئومورف با $\mathbb{S}^2$

تغییر نام راس های Δ ، $\mathbb{K}[\Delta]$ را تحت ایزومورفیسم ثابت نگه میدارد. بنابراین خواص جبری $\mathbb{K}[\Delta]$ توسط ترکیبیات Δ و $\mathbb{K}$ مشخص میشوند.

همانطور که قبلا بیان شد، توپولوژی جبری به ما میگوید که هر مجتمع سادکی با فضایی توپولوژیک همراه خواهد بود که به آن سازه‌ی هندسی آن میگویند. توجه شود که طبق تعریف نقاط $p_\omega \in \mathbb{R}^d$ برای یک d طوری انتخاب میشوند که برای $F \in \Delta$، p_ω و $\omega \in F$ مستقل آفینی هستند و برای $F, F' \in \Delta$ داریم $\mathrm{conv}(F) \cap \mathrm{conv}(F') = \mathrm{conv}(F \cap F')$. در این متن از $\mathrm{conv}(F)$ برای نشان دادن $(\#F-1)$ــ سادک هندسی استفاده میکنیم که $(\#F-1)$- سادک هندسی مجموعه ی تمام ترکیبات محدب $\sum_{\omega\in F} \lambda_\omega p_\omega$ است که $\lambda_\omega \geq 0$ ، $\omega \in F$ و $\sum_{\omega\in F} \lambda_\omega = 1$. در اینصورت $|\Delta| = \bigcup\limits_{F\in\Delta} \mathrm{conv}(F)$ به عنوان زیرفضایی از $\mathbb{R}^d$ سازه‌هندسی Δ است. از توپولوژی جبری میدانیم که تمام سازه های هندسی هومئومورف هستند. برای یک سازه‌هندسی $|\Delta|$ از $|\bar{F}|$ برای نشان دادن زیرفضای $\mathrm{conv}(F)$ از $|\Delta|$ استفاده میکنیم.

۲.۱ همولوژی و کوهمولوژی

۱.۲.۱ همولوژی

گروه های بنیادی نقش مهمی در مطالعه ی فضاهایی با بعد پایین دارند اما در بعد های بالاتر برای بررسی فضاها احتیاج به ابزار قوی تری داریم. گروه های هموتوپی بعد های بالاتر نیز تعریف میشوند اما معمولا محاسبه و مطالعه ی آن ها به سادگی صورت نمیپذیرد و به اندازه ی گروه های بنیادی بعد های پایین کارآمد نیستند. به این منظور گروه های جدیدی به نام گروه های همولوژی که با $H_n(X)$ نمایش داده میشوند معرفی شدند. ایده ی پشت تعریف گروه های همولوژی از بررسی حفره‌های فضاهای توپولوژیک شروع شد. درواقع میتوان گفت که kـامین گروه همولوژی، تعداد حفره های فضای X را زمانیکه مرز فضا k بعدی باشد را نشان میدهد. برای تعریف رسمی گروه های همولوژی ابتدا نیاز به تعریف مجتمع زنجیره‌ای داریم:

تعریف ۴.۱. *یک مجتمع زنجیره‌ای دنباله ای از گروه های آبلی یا مدول های $C_0, C_1, C_2, \ldots$ است که توسط هومومورفیسم های $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ با هم ارتباط دارند و به شکل زیر نمایش داده میشوند:*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

که 0 گروه بدیهی است و C_i برای $i < 0$ صفر است.

همچنین باید داشته باشیم:

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0_{n+1,n-1}$$

یعنی تابع ثابتی که تمام اعضای C_{n+1} را به عضو همانی C_{n-1} ببرد.

باتوجه به قسمت آخر تعریف داریم:

$$im(\partial_{n+1}) \subseteq ker(\partial_n)$$

حال گروه همولوژی را تعریف میکنیم:

تعریف ۵.۱. *nـامین گروه همولوژی X را با $H_n(X)$ نمایش میدهیم و آن را به صورت زیر تعریف میکنیم:*

$$H_n(X) = ker(\partial_n)/im(\partial_{n+1})$$

تعریف ۶.۱. *گروه همولوژی متناظر با مجتمع زنجیره‌ای افزایش یافته ی زیر را گروه همولوژی کاهش یافته X میگوییم و آنرا با $\widetilde{H}_i(X)$ نمایش میدهیم.*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

که اگر σ_i ها مولدهای C_0 باشند:

$$\epsilon\Big(\sum_i n_i\sigma_i\Big) = \sum_i n_i$$

۲.۲.۱ کوهمولوژی

برای تعریف کوهمولوژی ابتدا مجتمع زنجیره‌ای زیر را در نظر میگیریم

$$\ldots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$$

کوهمولوژی نیز مانند همولوژی به صورت گروه خارج قسمتی هسته بر روی تصویر تعریف میشود اما برای اینکه گروه کوهمولوژی را داشته باشیم باید مجتمع زنجیره‌ای جدیدی از روی مجتمع زنجیره‌ای قبلی تعریف کنیم.

به این منظور گروه آبلی دلخواه A را انتخاب میکنیم و گروه دوگان هر C_i که به شکل $C_i* := Hom(C_i, A)$ تعریف میشود جایگزین C_i میکنیم و همچنین دوگان همومورفیسم هارا نیز به شکل زیر تعریف میکنیم: $d_{i-1} : C_{i-1}* \to C_i*$ و به این ترتیب مجتمع زنجیره‌ای زیر را خواهیم داشت:

$$\ldots \xleftarrow{d_{n+1}} C_n \xleftarrow{d_n} C_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} \ldots$$

تعریف ۷.۱. *با توجه به نمادگذاری های بالا، iـامین گروه کوهمولوژی X برابر است با $ker(d_i)/im(d_{i-1})$ و آن را به صورت $H^i(X, A)$ نمایش میدهیم.*

۳.۱ جبر مدرج

در این بخش تنها به تعدادی تعریف که در ادامه مقاله از آن ها استفاده خواهد شد بسنده میکنیم.

تعریف ۸.۱. *میگوییم حلقه R ، $\mathbb{N}$ـ مدرج است اگر تجزیه ای از R به عنوان گروهی آبلی با اندیس های در $\mathbb{N}$ به شکل*

$$R = \bigoplus_{a \geq 0} R_a$$

داشته باشد که برای هر $a, b \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $R_a R_b \subseteq R_{a+b}$.

در تعریف بالا میتوان $\mathbb{N}$ را با هر تکواره (نیم گروه یکدار) دلخواه T جایگزین کرد و تجزیه به صورت

$$R = \bigoplus_{a \in T} R_a$$

باشد.

تعریف ۹.۱. *یک Rـ مدول مدرج، یک Rـ مدول معمولی M به همراه تجزیه ی*

$$M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$$

به عنوان یک گروه آبلی است که داشته باشد که برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ که $a \geq 0$ داشته باشیم $R_a M_b \subseteq M_{a+b}$.

تعریف ۱۰.۱. *یک جبر مدرج، یک مدول مدرج $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ به همراه ضربی شرکتپذیر است که:*

- *عضو همانی (1) در A_0 است*
- *ضرب مدرج بودن را حفظ میکند.*

تعریف ۱۱.۱. *میگوییم R یک جبر مدرج استاندارد روی میدان $\mathbb{K}$ است اگر $R = \bigoplus R_i$ باشد، به طوریکه:*

- $R_0 = \mathbb{K}$
- *بعد فضای برداری R_1 متناهیست*

- برای هر $i, j \geq 0$ $R_i R_j = R_{i+j}$

فصل ۲

بررسی خواص توپولوژیک

۱.۲ بعد

در این بخش نشان میدهیم که بعد کرول حلقه $\mathbb{K}[\Delta]$ چگونه به بعد Δ مرتبط است و سپس ثابت میکنیم که بعد خاصیتی توپولوژیک است.

تعریف ۱.۲. *فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد و P ایده‌آل اولی از آن باشد. میگوییم ارتفاع P برابر با t است و مینویسیم $ht(P) = t$ اگر زنجیره ای از ایده‌آل P_i وجود داشته باشد که*

$$\emptyset \subsetneq P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_t = P$$

و چنین زنجیری با طول بیشتر وجود نداشته باشد.

تعریف ۲.۲. *در جبر جابجایی، بعد کرول یک حلقه برابر با سوپریمم طول تمام زنجیره ایده‌آل‌های اول آن حلقه است.*

$$dim(R) = \boldsymbol{sup}\{ht(P), \text{است } R \text{ ایده‌آل اول } P\}$$

برای بررسی بعد کرول $\mathbb{K}[\Delta]$ ابتدا نشان میدهیم که $\mathbb{K}[\Delta]$ یک $\mathbb{K}$ـ جبر مدرج استاندارد است.
به عنوان یک $\mathbb{K}$ـ فضای برداری داریم $\mathbb{K}[\Delta] = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_r$ که A_r همان $\mathbb{K}$ـ فضای برداری همدسته های $m + I_\Delta$ برای تک جمله ای $m \in S_\Omega$ از درجه ی r است. حال باتوجه به اینکه $A_0 = \mathbb{K}$ ، $A_r A_s \subseteq A_{r+s}$ و همچنین این

مطلب که $\mathbb{K}[\Delta]$ به عنوان یک $\mathbb{K}$ـجبر توسط A_1 ساخته شده است، داریم که $\mathbb{K}[\Delta]$ یک جبر مدرج استادارد است.

یادآوری میکنیم که بعد وجه F از Δ به صورت $\dim(F) = \#F - 1$ است و برای بعد Δ مینویسیم $\dim(\Delta) = \max_{F\in\Delta}\dim(F)$. سپس برای هر $i \geq -1$ تعریف میکنیم

$$f_i = \#\{F \in \Delta : \dim(F) = i\}$$

و در اینصورت fـفضای برداری Δ بردار $f^\Delta = (f_{-1}, \dots, f_{\dim(\Delta)})$ که ورودی های آن f_i ها ناصفرند.

حال نشان میدهیم که سری هیلبرت $\mathbb{K}[\Delta]$ توسط fـبردارهای یک مجتمع سادکی مشخص میشود.

داریم که سری هیلبرت $\mathbb{K}[\Delta]$ برابر با

$$\mathrm{Hilb}(\mathbb{K}[\Delta]) = \sum_{r=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{K}}(A_r)t^r$$

که $\dim_{\mathbb{K}}(A_r)$ بعد A_r به عنوان یک $\mathbb{K}$ـفضای برداری است. داریم که سری هیلبرت هر $\mathbb{K}$ـجبر مدرج استاندارد تابع گویایی به فرم $\frac{h(t)}{(1-t)^d}$ است که $d = \dim(\mathbb{K}[\Delta])$ همان بعد کرول $\mathbb{K}[\Delta]$ است و $h(t)$ یک چندجمله ایست که $h(1) \neq 0$.

قضیه ۳.۲. *فرض کنید Δ مجتمع سادکی با fـبردار $\mathfrak{f} = (f_{-1}, \dots, f_{dim(\Delta)})$ باشد، آنگاه:*

$$Hilb(\mathbb{K}[\Delta]) = \frac{\sum_{i=0}^{dim(\Delta)+1} t^i(1-t)^{dim(\Delta)+1-i} f_{i-1}}{(1-t)^{dim(\Delta)+1}}$$

و درواقع داریم $dim(\mathbb{K}[\Delta]) = dim(\Delta) + 1$

برهان. باتوجه به اینکه I_Δ ایده‌آل تولید شده توسط تک جمله ای هاست، بنابراین چندجمله ای $q \in \mathbb{K}[\Delta]$ عضوی از I_Δ است اگر و تنها اگر هر تک جمله ای ناصفر آن در I_Δ باشد. بنابراین همدسته های $m + I_\Delta$ از درجه ی r تک جمله ای $m \notin I_\Delta$ تشکیل پایه ای برای A_r میدهند. $m + I_\Delta = I_\Delta$ اگر و تنها اگر m بر x_N، برای یک غیروجه مینیمال N، بخشپذیر باشد. بنابراین $m + I_\Delta \neq I_\Delta$ اگر و تنها اگر ساپورت $\mathrm{supp}(m) = \{\omega : x_\omega | m\}$ در Δ باشد. اگر $i \geq 0$ آنگاه برای هر وجه i بعدی $F \in \Delta$، $\binom{r-1}{i}$ تک جمله ای از درجه ی $r - (i+1)$ برای متغیرهای $x_\omega, \omega \in F$ وجود دارد. اگر $i = -1$، تنها وجه -1 بعدی $\emptyset$ از Δ متناظر با تک جمله ای هایی با ساپورت تهی است

و درنتیجه تنها عضو پایه ی A_0 خواهد بود.

با توجه به مطالب گفته شده برای f_i دلخواه وقتی $i > \dim(\Delta)$ خواهیم داشت:

$$\dim_{\mathbb{K}}(A_r) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} f_i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r-1}{i} f_i$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hilb}(\mathbb{K}[\Delta]) &= f_{-1} + \sum_{r=1}^{\infty} \big(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{r-1}{i} f_i\big) t^r \\
&= f_{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \big(\sum_{r=1}^{\infty} \binom{r-1}{i} t^r\big) f_i \\
&= f_{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i+1}}{(1-t)^{i+1}} f_i \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{\dim(\Delta)+1-i} f_{i-1}}{(1-t)^{\dim(\Delta)+1}}
\end{aligned}$$

باتوجه به مطالب قبل میدانیم این سری هیلبرت باید تابعی گویا باشد و بنابراین برای $t = 1$ داریم $f_{\dim(\Delta)} \neq 0$ و بنابراین بعد کرول $\mathbb{K}[\Delta]$ توان $(1-t)$ در مخرج است که برابر است با $\dim(\Delta) + 1$

□

با توجه به این مطلب، خاصیت توپولوژیک بودن بعد کرول $\mathbb{K}[\Delta]$ و بعد Δ هم ارزند.

پیش از بیان قضیه ی خاصیت توپولوژیک بودن بعد کرول $\mathbb{K}[\Delta]$ و اثبات آن چند نمادگذاری مورد نیاز در روند اثبات را معرفی میکنیم.

برای جفت F در Δ مینویسیم:

$$\mathrm{link}_{\Delta}(F) = \{G \in \Delta \ : \ G \cap F = \emptyset,\ G \cup F \in \Delta\}$$

برای ستاره ی F در Δ مینویسیم:

$$\mathrm{star}_{\Delta}(F) = \{G \in \Delta \ : \ G \cup F \in \Delta\}$$

همچنین برای دو مجتمع سادکی Δ و Δ' که روی دو مجموعه‌ی زمینه‌ای متفاوت تعریف شده باشند اتصال آنهارا به صورت زیر نشان میدهیم:

$$\Delta * \Delta' = \{F \cup F' \ : \ F \in \Delta, F' \in \Delta'\}'$$

باتوجه به تعریف اتصال، اتصال دو فضای توپولوژیک $|\Delta'| * |\Delta|$ و $|\Delta * \Delta'|$ هومئومورف هستند اگر داشته باشیم $\Delta, \Delta' \neq \{\emptyset\}$. توجه کنید که $\mathbf{star}_\Delta(F) = \bar{F} * \mathbf{link}_\Delta(F)$ و بنابراین $|\mathbf{star}_\Delta(F)| = |\bar{F}| * |\mathbf{link}_\Delta(F)|$. برای وجه F از Δ مینویسیم:

$$\Delta \setminus F = \{G \in \Delta \ : \ F \nsubseteq G\}$$

و برای نقطه ی x در Δ به جای $|\Delta| \setminus \{x\}$ مینویسیم $|\Delta| - x$. برای مجتمع سادکی Δ از نماد $\widetilde{H}_i(\Delta, \mathbb{K})$ برای نشان دادن iـامین گروه همولوژی سادکی کاهش یافته‌ی Δ با ضرایب در $\mathbb{K}$ استفاده میکنیم. و برای نشان دادن iـامین گروه همولوژی تکین کاهش یافته‌ی فضای X با ضرایب در $\mathbb{K}$ از نماد $\widetilde{H}_i(X, \mathbb{K})$ استفاده میکنیم. همچنین میدانیم که $\widetilde{H}_i(\Delta, \mathbb{K}) = \widetilde{H}_i(|\Delta|, \mathbb{K})$. برای نشان دادن همولوژی سادکی زوج (Γ, Δ) با ضرایب در $\mathbb{K}$ که $\Gamma \subseteq \Delta$ مجتمع های سادکی هستند مینویسیم $H_i(\Delta, \Gamma, \mathbb{K})$ و برای دو زوج فضای توپولوژیک $A \subseteq X$ مینویسیم $H_i(X, A, \mathbb{K})$.

لم ۴.۲. *فرض کنید Δ مجتمعی سادکی باشد، F وجهی از آن و x نقطه ای درونی نسبی از $|\bar{F}|$ باشند. آنگاه $|\Delta \setminus F|$ یک تغییرشکل درونبر از $|\Delta| - x$ است و*

$$H_j(|\Delta|, |\Delta| - x, \mathbb{K}) = \widetilde{H}_{j-dim(F)-1}(\mathbf{link}_\Delta(F), \mathbb{K}) \qquad (۱.۲)$$

و داریم:

$$\mathbf{dim}(\Delta) = \mathbf{max}\{j \ : \ exists\ x \in |\Delta|\ such\ that\ H_j(|\Delta|, |\Delta| - x, \mathbb{K}) \neq 0\} \qquad (۲.۲)$$

حال با کمک این لم ثابت میکنیم که بعد کرول خاصیتی توپولوژیک است.

قضیه ۵.۲. *فرض کنید Δ و Δ' دو مجتمع سادکی باشند که $|\Delta|$ و $|\Delta'|$ هومئومورف هستند. دراینصورت بعد کرول $\mathbb{K}[\Delta]$ و $\mathbb{K}[\Delta']$ برابرند.*

برهان. طبق ۳.۲ کافیست نشان دهیم برای دو مجتمع سادکی Δ و Δ' با سازه‌ی هندسی هومئومورف داریم $= \dim(\Delta)$

$\dim(\Delta')$

باتوجه به اینکه Δ و Δ' هومئومورف هستند و فضاهای هومئومورف، همولوژی یکریختی دارند داریم:

$$\dim(\Delta) \overset{۲.۲}{=} \max\{j \ : \ exists\ x \in |\Delta|\ such\ that\ H_j(|\Delta|, |\Delta| - x, \mathbb{K}) \neq 0\}$$
$$\overset{|\Delta| \cong |\Delta'|}{=} \max\{j \ : \ exists\ x \in |\Delta'|\ such\ that\ H_j(|\Delta'|, |\Delta'| - x, \mathbb{K}) \neq 0\}$$
$$= \dim(\Delta')$$

□

تعریف ۶.۲. *یک مجتمع سادکی Δ خالص نامیده میشود، اگر تمام وجه- واره های آن بعد یکسانی داشته باشند.*

قضیه ۷.۲. *فرض کنید Δ و Δ' دو مجتمع سادکی باشند که $|\Delta|$ و $|\Delta'|$ هومئومورف هستند. دراینصورت Δ خالص است اگر و تنها اگر Δ' خالص باشد.*

برهان. طبق ۴.۲ میدانیم که نقطه ی درونی نسبی x از $|\bar{F}|$ برای یک وجه F از Δ داریم:

$$H_j(|\Delta|, |\Delta| - x, \mathbb{K}) = \widetilde{H}_{j-\dim(F)-1}(\mathrm{link}_\Delta(F), \mathbb{K}) \qquad (۳.۲)$$

فرض کنید Δ خالص باشد و F وجهی از Δ باشد. در اینصورت وجه-واره ای مانند G از بعد $\dim(\Delta)$ وجود دارد که $F \subseteq G$. بنابراین برای هر نقطه ی درونی نسبی x از $|\bar{F}|$ و هر همسایگی باز U که $x \in U \subseteq |\Delta|$ نقطه ی y در U وجود دارد که y درونی نسبی $|\bar{G}|$ است. درواقع برای هر x ودرونی نسبی در $|\bar{F}|$ و هر همسایگی باز U از x در $|\Delta|$ عضو y از U وجود دارد که $H_{\dim(\Delta)}(|\Delta|, |\Delta| - x, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$. فرض کنید Δ' خالص نباشد، در اینصورت وجه G از بعدی کمتر از $\dim(\Delta)$ وجود دارد. اما از طرفی برای هر x درونی نسبی $|\bar{G}|$ همسایگی کوچکی وجود دارد که تنها شامل نقاط y از $|\bar{G}|$ است. برای آنها $H_{\dim(\Delta)}(|\Delta|, |\Delta| - x, \mathbb{K}) = \widetilde{H}_{\dim(\Delta)-\dim(G)-1}(\mathrm{link}_\Delta(G) = \{\emptyset\}$

□

۲.۲ عمق و تجزیه آزاد مینیمال

در این بخش با کمک فرمول هوستر برای اعداد بتی تجزیه ی آزاد آن ثابت میکنیم که عمق خاصیتی توپولوژیکی است.

تعریف ۸.۲. *عمق $\mathbb{K}(\Delta)$ تعداد ماکسیمال d از اعضایی مانند $f_1, \ldots, f_d \in \mathbb{K}[\Delta]$ است که f_i ها مقسوم‌علیه های ناصفر روی $\mathbb{K}[\Delta]/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ که $i = 1, \ldots, d$. را با $depth(\mathbb{K}(\Delta))$ نشان میدهیم*

تعریف ۹.۲. *یک تجریه آزاد $\mathbb{K}[(\Delta)]$ روی S_Ω دنباله کامل زیر است:*

$$\Im : \ldots \xrightarrow{\sigma_{i+1}} S_\Omega^{b_i} \xrightarrow{\sigma_i} \ldots \xrightarrow{\sigma_2} S_\Omega^{b_1} \xrightarrow{\sigma_1} S_\Omega^{b_0} \xrightarrow{\sigma_0} \mathbb{K}[\Delta] \longrightarrow 0$$

که همه‌ی نگاشت ها همومورفیسم S_Ωـ مدول هستند.

تجزیه آزادی وجود دارد که تمام b_i ها را هماهنگ با هم مینیمم میکند و برای $i > |\Omega|$ داریم $b_i = 0$. این تجزیه تحت همومورفیسم یکتاست و به آن تجزیه آزاد مینیمال $\mathbb{K}[\Delta]$ روی S_Ω و b_i عدد بتی $\mathbb{K}[\Delta]$ به عنوان یک S_Ωـ مدول است. به جای b_i از نماد β_i یا $\beta_i(\mathbb{K}[\Delta])$ استفاده میکنیم.

برای اینکه بتوانیم از تجزیه ی آزاد استفاده کنیم آنرا به صورت دیگری تعریف میکنیم. به این منظور از ساختار مولتی‌ـ مدرج S_Ω استفاده میکنیم. برای یک جمله ای $\prod_{\omega \in \Omega} x_\omega^{\alpha_\omega}$، $(\alpha_\omega)_{\omega \in \Omega}$ را مولتی‌ـ درجه آن میگوییم. برای $\alpha = (\alpha_\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathbb{N}^\Omega$ از نماد X^α به جای $\prod_{\omega \in \Omega} x_\omega^{\alpha_\omega}$ استفاده میکنیم. در اینصورت به عنوان فضای برداری داریم:

$$S_\Omega = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} x_\omega^\alpha \mathbb{K}$$

و

$$\mathbb{K}[\Delta] = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} A_\alpha$$

که اگر $\alpha \neq (0)$ و $X^\alpha \in I_\alpha$ آنگاه $A_\alpha = 0$ و در غیر اینصورت برابر $X^\alpha + I_\Delta$ است.

برای $\alpha \in \mathbb{N}^\Omega$ از نماد $S_\Omega(-\alpha)$ استفاده میکنیم تا مولتی مدرج بودنی از S_Ω را نشان دهیم که در آن جمع های $X^{\alpha'}$ بخش مدرج $\alpha + \alpha'$ را نشان میدهند. به وضوح $S_\Omega(-\alpha)$ یک S_Ωـ مدول $\mathbb{N}^\Omega$ـ مدرج است. یک تجزیه ی آزاد مولتی مدرج از $\mathbb{K}[\Delta]$ روی S_Ω یک دنباله کامل به شکل زیر است:

$$\Im : \ldots \xrightarrow{\sigma_{i+1}} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} S_\Omega(-\alpha)^{b_{i,\alpha}} \xrightarrow{\sigma_i} \ldots \xrightarrow{\sigma_2} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} S_\Omega(-\alpha)^{b_{1,\alpha}} \xrightarrow{\sigma_1} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^\Omega} S_\Omega(-\alpha)^{b_{0,\alpha}} \xrightarrow{\sigma_0} \mathbb{K}[\Delta] \longrightarrow 0$$

که در آن تمام نگاشت ها همومورفیسم های S_Ω- مدول مولتی‌ـ مدرج اند. و دوباره میدانیم یک تجزیه ی آزاد

یکتا وجود دارد که تمام $b_{i,\alpha}$ را هماهنگ با هم مینیمم میکند و برای $i > |\Omega|$ داریم $b_{i,\alpha} = 0$. این تجزیه تحت ایزومورفیسم مولتی‌ـ‌مدرج یکتاست و تجریه آزاد یکتای مینیمال مولتی‌ـ‌مدرج $\mathbb{K}[\Delta]$ روی S_Ω است و $b_{i,\alpha}$ متناظر آن را عدد بتی مولتی‌ـ‌مدرج $\mathbb{K}[\Delta]$ به عنوان یک S_Ωـ‌مدول است و برای آن $\beta_{i,\alpha}(\mathbb{K}[\Delta])$ یا $\beta_{i,\alpha}$ می نویسیم. همچنین میدانیم $\beta_{i,\alpha} = 0$ است، مگر اینکه $\alpha \in \{0,1\}^\Omega$. میتوانیم $\alpha \in \{0,1\}^\Omega$ را با مجموعه ی W از تمام ω هایی که $\alpha_\omega = 1$ است شناسایی کرد. سپس میتوانیم به جای $\beta_{i,\alpha}$ از نماد $\beta_{i,W}$ استفاده کرد.

برای $W \subset \Omega$ از نماد $\Delta_W = \{F \in \Delta \ : \ F \in W\}$ برای نشان دادن تحدید Δ به W استفاده میکنیم.

قضیه ۱۰.۲. *(فرمول هاستر). فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω باشد و $W \subset \Omega$. در اینصورت برای $i \geq 0$ عدد بتی مولتی‌ـ مدرج از فرمول زیر بدست می آید:*

$$\beta_{i,\alpha}(\mathbb{K}[\Delta]) = \boldsymbol{dim}_{\mathbb{K}}\Big(\widetilde{H}_{\#W-i-1}(\Delta_W, \mathbb{K})\Big)$$

و نتیجه ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۱.۲. *فرض کنید Δ و Δ' مجتمع‌های سادگی به ترتیب روی مجموعه‌های زمینه ای Ω و Ω' باشند. اگر $|\Delta|$ و $|\Delta'|$ هم ارز هموتوپی باشند آنگاه برای هر $i \geq 0$ داریم:*

$$\beta_{i+\#\Omega,\Omega}(\mathbb{K}[\Delta]) = \beta_{i+\#\Omega',\Omega'}(\mathbb{K}[\Delta'])$$

برهان. طبق ۱۰.۲ داریم:

$$\begin{aligned}\beta_{i+\#\Omega,\Omega}(\mathbb{K}[\Delta]) &= \dim_{\mathbb{K}}\Big(\widetilde{H}_{\#\Omega-i-\#\Omega-1}(\Delta_\Omega,\mathbb{K})\Big)\\ &= \dim_{\mathbb{K}}\Big(\widetilde{H}_{i-1}(\Delta_\Omega,\mathbb{K})\Big)\\ &= \dim_{\mathbb{K}}\Big(\widetilde{H}_{i-1}(|\Delta|,\mathbb{K})\Big)\\ &= \dim_{\mathbb{K}}\Big(\widetilde{H}_{i-1}(|\Delta'|,\mathbb{K})\Big)\\ &= \dim_{\mathbb{K}}\Big(\widetilde{H}_{i-1}(\Delta'_{\Omega'},\mathbb{K})\Big)\\ &= \dim_{\mathbb{K}}\Big(\widetilde{H}_{\#\Omega'-i-\#\Omega'-1}(\Delta'_{\Omega'},\mathbb{K})\Big)\\ &= \beta_{i+\#\Omega',\Omega'}(\mathbb{K}[\Delta'])\end{aligned}$$

□

تعریف ۱۲.۲. *بعد تصویری مدول M که با $pd(M)$ نمایش داده میشود برابر با مینیمم طول تمام تجزیه های آزاد M است.*

طبق تعاریف قبلی درواقع داریم:

$$pd(\mathbb{K}[\Delta]) = \max\{i \ : \ \beta_i(\mathbb{K}[\Delta]) \neq 0$$

باتوجه به مطالب بالا میتوانیم قضیه ای که عمق $(\mathbb{K}[\Delta])$ را به تجزیه آزاد مینیمال آن ربط میدهد، بیان کنیم:

قضیه ۱۳.۲. (*فرمول اوسلندر- بوخسبام*) *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω باشد. در اینصورت*

$$depth(\mathbb{K}[\Delta]) = \#\Omega - pd(\mathbb{K}[\Delta])$$

برای اینکه بتوانیم با کمک قضیه ی بالا ثابت کنیم که عمق خاصیتی توپولوژیک است، لازم است تعریفی همولوژیکی از بعد تصویری ارائه کنیم که خاصیتی توپولوژیک از مجتمع سادکی Δ باشد. به این منظور تعریف

میکنیم:

$$\text{hdepth}(\Delta) = \min_i \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{H}_i(|\Delta|, \mathbb{K}) \neq 0 \text{ or} \\ H_i(|\Delta|, |\Delta| - x, \mathbb{K}) \neq 0 \; for \; some \; x \in |\Delta| \end{array} \right\}$$

قضیه ۱۴.۲. *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω باشد. در اینصورت*

$$pd(\mathbb{K}[\Delta]) = \#\Omega - \textbf{\textit{hdepth}}(\Delta)$$

به خصوص اگر Δ' یک مجتمع سادکی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω' باشد که $|\Delta|$ و $|\Delta'|$ هومئومورفیک باشند، آنگاه:

$$\#\Omega - pd(\mathbb{K}[\Delta]) = \#\Omega' - pd(\mathbb{K}[\Delta'])$$

و نهایتاً قضیه ی زیر را داریم:

قضیه ۱۵.۲. *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω باشد. در اینصورت*

$$\textbf{\textit{depth}}(\mathbb{K}[\Delta]) = \textbf{\textit{hdepth}}(\Delta)$$

و به خصوص اگر Δ' یک مجتمع سادکی باشد که $|\Delta|$ و $|\Delta'|$ هومئومورفیک باشند، آنگاه:

$$\textbf{\textit{depth}}(\mathbb{K}[\Delta]) = \textbf{\textit{depth}}(\mathbb{K}[\Delta'])$$

در این متن به کمک ابزاری از کوهمولوژی اثبات بسیار کوتاهی ارائه میکنیم. به همین منظور ابتدا نماد گذاری های زیر را معرفی میکنیم.

فرض کنید $\mathbb{K}[\Delta] = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_r$ تجزیه فضای برداری $\mathbb{K}[\Delta]$ به عنوان یک جبر مدرج استاندارد باشد. ایده‌آل ماکسیمال مدرج یکتای آنرا به نماد $\mathfrak{m} = \bigoplus_{r=1}^{\infty} A_r$ نشان میدهیم و برای نشان دادن iـامین کوهمولوژی موضعی مدول $\mathbb{K}[\Delta]$ از نماد $H^i_{\mathfrak{m}}(\mathbb{K}[\Delta])$ استفاده میکنیم. $H^i_{\mathfrak{m}}(\mathbb{K}[\Delta])$ خود یک مدول مدرج است و با کمک فرمول زیر میتوانیم سری هیلبرت آن را با مفاهیم همولوژی ببینیم:

قضیه ۱۶.۲ (فرمول هوستر برای کوهمولوژی موضعی)**.** *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای*

Ω باشد. آنگاه:

$$\mathit{Hilb}(H^i_{\mathfrak{m}}(\mathbb{K}[\Delta])) = \sum_{F\in\Delta} \mathit{dim}_{\mathbb{K}}\big(\widetilde{H}_{i-\mathit{dim}(F)-2}(\mathit{link}_{\Delta}(F),\mathbb{K})\big)\frac{1}{(t-1)^{\#F}}$$

قضیه ۱۷.۲. *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω باشد. آنگاه:*

$$\mathit{dim}(\mathbb{K}[\Delta]) = \max_i H^i_{\mathfrak{m}}(\mathbb{K}[\Delta]) \neq 0$$

و

$$\mathit{depth}(\mathbb{K}[\Delta]) = \min_i H^i_{\mathfrak{m}}(\mathbb{K}[\Delta]) \neq 0$$

حال باتوجه به قضایای بالا نتیجه ی زیر حاصل میشود.

نتیجه ۱۸.۲. *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω باشد. در اینصورت*

$$\mathit{dim}(\mathbb{K}[\Delta]) = \max_i\{\widetilde{H}_{i-\mathit{dim}(F)-2}(\mathit{link}_{\Delta}(F),\mathbb{K}) \neq 0 \; for\ an\ F\in\Delta$$

و

$$\mathit{depth}(\mathbb{K}[\Delta]) = \min_i\{\widetilde{H}_{i-\mathit{dim}(F)-2}(\mathit{link}_{\Delta}(F),\mathbb{K}) \neq 0 \; for\ an\ F\in\Delta$$

حال باتوجه به نتیجه ی بالا میتوانیم ۱۵.۲ را اثبات کنیم که نتیجه ی اثبات آن، اثبات ۱۴.۲ خواهد بود:

برهان (اثبات ۱۵.۲). اگر $F=\emptyset$ آنگاه $\mathrm{link}_{\Delta}(F)=\Delta$ و

$$\widetilde{H}_{i-\mathrm{dim}(F)-2}(\mathbf{link}_{\Delta}(F),\mathbb{K}) = \widetilde{H}_{i-1}(\Delta\mathbb{K}) = \widetilde{H}_{i-1}(|\Delta|\mathbb{K}) \qquad (۴.۲)$$

و اگر $F\neq 0$ و x نقطه درونی نسبی از $|\bar{F}|$ آنگاه با استفاده از ۴.۲ داریم:

$$\widetilde{H}_{i-\mathrm{dim}(F)-2}(\mathbf{link}_{\Delta}(F),\mathbb{K}) = \widetilde{H}_{i-1}(\Delta\mathbb{K}) = H_{i-1}(|\Delta|,|\Delta|-x,\mathbb{K}) \qquad (۵.۲)$$

کوچکترین i ای که به ازای آن حداقل یکی از گروه های همولوژی سمت راست تساوی های بالا ناصفر باشد، دقیقا همان $\mathrm{hdepth}(\Delta) - 1$ است. و بنابراین ۱۵.۲ ثابت میشود.

□

۳.۲ کوهن‌ـ‌مکالی و گورنستین

تعریف ۱۹.۲. *حلقه ی R کوهن‌ـ‌مکالی است اگر داشته باشیم $\dim(R) = \operatorname{depth}(R)$ یعنی عمق آن برابر با بعد کرول آن باشد.*

با کمک قضایای ۵.۲ و ۱۵.۲ ۲ نتیجه ی زیر را از مانکرز داریم:

قضیه ۲۰.۲ (مانکرز)**.** *فرض کنید Δ و Δ' مجتمع های سادکی ای باشند که $|\Delta|$ و $|\Delta'|$ هومئومرفیک هستند. در اینصورت $\mathbb{K}[\Delta]$ کوهن‌ـ‌مکالی است اگر و تنها اگر $\mathbb{K}[\Delta']$ کوهن‌ـ‌مکالی باشد.*

با کمک ۱۵.۲ و ۴.۲ و ۵.۲ خواهیم داشت:

قضیه ۲۱.۲ (محک رایزنر)**.** *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω باشد. در اینصورت $\mathbb{K}[\Delta]$ کوهن‌ـ‌مکالی است اگر و تنها اگر به ازای هر $F \in \Delta$ داشته باشیم:*

$$\widetilde{H}_i(\mathit{link}_\Delta(F), \mathbb{K}) = 0 \; \forall i < \dim(\mathit{link}_\Delta(F))$$

درواقع اگر $\mathbb{K}[\Delta]$ کوهن‌ـ‌مکالی باشد آنگاه $\mathbb{K}[\mathit{link}_\Delta(F)]$ نیز برای هر $F \in \Delta$ کوهن مکالی است.

برای یک $\mathbb{K}[\Delta]$ که کوهن‌ـ‌مکالی باشد، عدد بتی $\beta_{pd(\mathbb{K}[\Delta])}(\mathbb{K}[\Delta])$ نوع کوهن‌ـ‌مکالی $\mathbb{K}[\Delta]$ نامیده میشود.

تعریف ۲۲.۲. *به $\mathbb{K}[\Delta]$ که کوهن مکالی نوع 1 باشد، گورنستین میگویند.*

حال با ارائه ی دو مثال نشان میدهیم که گورنستین بودن یک خاصیت توپولوژیک نیست.

مثال ۲۳.۲. *قرار میدهیم $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ و Δ مجتمع سادکی روی Ω با وجه‌ـ‌واره های $\{1, 2, 3\}$ و $\{2, 3, 4\}$*

باشد. آنگاه $\mathbb{K}[\Delta] = S_\Omega/I_\Delta = S_\Omega/(x_1x_4)$ و

$$0 \longrightarrow S_\Omega \xrightarrow{(x_1x_4)} S_\Omega \xrightarrow{m\to m+I_\Delta} \mathbb{K}[\Delta] \longrightarrow 0$$

تجزیه آزاد مینیمال آن است. درواقع $pd(\mathbb{K}[\Delta]) = 1$ و $\beta_1(\mathbb{K}[\Delta]) = 1$. و طبق ۱۳.۲ داریم $depth(\mathbb{K}[\Delta]) = \#\Omega - 1 = 3$. باتوجه به اینکه $dim(\Delta) = 2$ پس $dim(\mathbb{K}[\Delta]) = 3$ و یعنی $\mathbb{K}[\Delta]$ کوهن مکالی نوع 1 است که یعنی گورنستین است.

مثال ۲۴.۲. قرار میدهیم $\Omega' = \{1,2,3,4,5\}$ و Δ' مجتمع سادکی روی Ω' با وجه- واره های $\{1,2,3\}$ ، $\{2,3,4\}$ و $\{1,2,5\}$ باشد. در اینصورت $\mathbb{K}[\Delta'] = S_{\Omega'}/I_{\Delta'} = S_{\Omega'}/(x_1x_4, x_3x_5, x_4x_5)$. میتوان چک کرد که تجزیه آزاد مینیمال آن به صورت

$$0 \longrightarrow S_{\Omega'}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_3x_4 & -x_1x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & -x_3 \end{pmatrix}} S_{\Omega'}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x_1x_4 \\ x_3x_5 \\ x_4x_5 \end{pmatrix}} S_{\Omega'} \xrightarrow{m\to m+I_{\Delta'}} \mathbb{K}[\Delta'] \longrightarrow 0$$

درواقع $pd(\mathbb{K}[\Delta']) = 2$ و $\beta_2(\mathbb{K}[\Delta']) = 2$. طبق ۱۳.۲ داریم $depth(\mathbb{K}[\Delta']) = \#\Omega' - 2 = 3$. چون $dim(\Delta') = 2$ پس $dim(\mathbb{K}[\Delta']) = 3$ درنتیجه $\mathbb{K}[\Delta]$ کوهن مکالی نوع 2 است که یعنی گورنستین نیست.

سازه‌ی هندسی مثال های بالا با یکدیگر هومئومورفیک هستند اما یکی از آنها گورنستین است و دیگیری نیست. بنابراین نتیجه میگیریم که گورنستین بودن خاصیت توپولویک نیست.

با اضافه کردن شرطی علاوه بر گورنستین بودن خاصیتی تعریف میکنیم که خاصیتی توپولوژیک است. به این منظور خاصیت زیر را تعریف میکنیم:

تعریف ۲۵.۲. میگوییم مجتمع سادکی Δ دارای خاصیت گورنستین* روی $\mathbb{K}$ است اگر $\mathbb{K}[\Delta]$ گورنستین باشد و $\widetilde{H}_{dim(\Delta)}(\Delta, \mathbb{K}) \neq 0$

تعریف ۲۶.۲. برای مجتمع سادکی Δ روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω هسته ی آن را زیر- مجتمع القایی توسط $\Delta_{core(\Omega)}$ در نظر میگیریم و آن را با $core(\Delta)$ نشان میدهیم که $core(\Omega)$ مجموعه ی تمام $\omega \in \Omega$ هایی است که $star_\Delta(\omega) \neq$

Δ.

باتوجه به این تعریف و قضایای بخش 1 داریم

$$\Delta = 2^{\Omega\setminus \mathrm{core}(\Omega)} * \mathrm{core}(\Delta)$$

و

$$\dim(\Delta) = \dim(\Delta_{\mathrm{core}(\Omega)}) + \#\Omega - \#\mathrm{core}(\Omega)$$

.

قضیه ۲۷.۲. *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω باشد آنگاه عبارات زیر با یکدیگر معادلند:*

(*i*) *$\mathbb{K}[\Delta]$ گورنستین است.*

(*ii*) *به ازای هر $F \in core(\Delta)$ داریم:*

$$\widetilde{H}_i(link_{core(\Delta)}(F), \mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{K} & if\ 0i = dim(link_{core(\Delta)}(F)) \\ 0 & if\ i < dim(link_{core(\Delta)}(F)) \end{cases}$$

(*iii*) *برای هر $x \in |core(\Delta)|$ داریم:*

$$\widetilde{H}_i(|core(\Delta)|, \mathbb{K}) = H_i(|core(\Delta)|, |core(\Delta)| - x, \mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{K} & if\ 0i = dim(link_{core(\Delta)}(F)) \\ 0 & if\ i < dim(link_{core(\Delta)}(F)) \end{cases}$$

برهان. معادل بودن (ii) و (iii) طبق ۴.۲ ثابت میشود اما اثبات معادل بودن (i) و (ii) فرآیند پیچیده تری دارد.

میتوانیم نتیجه بگیریم که اگر Δ مجتمع سادکی ای باشد که $\mathbb{K}(\Delta)$ گورنستین است، آنگاه $\mathbb{K}[\mathrm{core}(\Delta)]$ نیز گورنستین است. همچنین از بخش (ii) اگر $F = \emptyset$ آنگاه $\widetilde{H}_{\dim(\mathrm{core}(\Delta))}(\mathrm{core}(\Delta), \mathbb{K}) \neq 0$ پس $\mathrm{core}(\Delta)$ گورنستین* است. درنتیجه هر مجتمع سادکی Δ که $\mathbb{K}(\Delta)$ گورنستین باشد، تجزیه ای به صورت $\Delta = 2^{\Omega\setminus \mathrm{core}(\Omega)} *$

$\text{core}(\Delta)$ دارد و $\text{core}(\Delta)$ گورنستین* است.

نتیجه ۲۸.۲. *فرض کنید Δ یک مجتمع سادگی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω و Δ' یک مجتمع سادکی روی مجموعه‌ی زمینه ای Ω' باشند که*

- $core(\Delta) = \Delta$ *و* $core(\Delta') = \Delta'$
- $|\Delta|$ *و* $|\Delta'|$ *هومئومورفیک باشند*

آنگاه $\mathbb{K}[\Delta]$ *گورنستین* است اگر و تنها اگر* $\mathbb{K}[\Delta']$ *گورنستین* باشد.*

برهان. با توجه به اینکه $\text{core}(\Delta) = \Delta$ و $\text{core}(\Delta') = \Delta'$ و با کمک بخش (iii) قضیه، نتیجه اثبات میشود.

$\square$

در این مقاله سعی کردیم که برخی از خواص حلقه های استنلی‌ـ‌رایزنر را بررسی کنیم. خواص توپولوژیکی دیگری نیز همچون خاصیت بوخسبام، nـ‌خالص بودن، nـ‌کوهن مکالی بودن و غیره نیز وجود دارند که در این مقاله به بررسی آن ها پرداخته نشده است.

واژه نامه

اتصال	Join
بعد تصویری	Projective dimention
بعد کرول	Krull dimention
تجزیه	Decomposition
تجزیه آزاد	Free Resolution
تک جمله ای	Monomial
تکواره	Monoid
جبر جابه‌جایی	Commutative algebra
جبر مدرج	Graded algebra
حلقه چندجمله‌ای	Polynomial ring
حلقه خارج قسمتی	Quotient ring
خالص	Pure
خواص توپولوژیک	Topological Properties
درونی نسبی	Relatively interior
دوگان	Dual
زیرـمجتمع القایی	Induces subcomplex
سازه هندسی	Geometric realization
سری هیلبرت	Hilbert series
عمق	Depth
کوهمولوژی موضعی	Local cohomology

Fundamental group	گروه بنیادی
Chain complex	مجتمع زنجیره‌ای
Simplical complex	مجتمع سادکی
Power set	مجموعه توانی
Groundset	مجموعه زمینه ای
Affinely independent	مستقل آفینی
Face	وجه
Facet	وجه‌ـ واره
Coset	همدسته
Reduced Homology	همولوژی کاهش یافته

کتاب‌نامه

[1] Which Properties of Stanley–Reisner Rings and Simplicial Complexes are Topological?, Welker ,Volkmar, Commutative Algebra,859–889, 2021, Springer

[2] Poset topology: tools and applications, Wachs, Michelle L ,2006

[3] Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications, Brodmann, Markus P and Sharp, Rodney Y, 136, 2012, Cambridge university press

[4] Algebraic topology, Hatcher, Allen, 2005.

[5] Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry, Eisenbud, David, 150, 2013, Springer Science & Business Media

[6] Cohen-macaulay rings, Bruns, Winfried and Herzog, H Jürgen, 39, 1998, Cambridge university press

[7] Cohen-Macaulay complexes, Stanley, Richard P, Higher combinatorics, 51–62, 1977, Springer

[8] Topological applications of Stanley-Reisner rings of simplicial complexes, Aizenberg, A Transactions of the Moscow Mathematical Society 73, 37–65, 2012

[9] A survey of Stanley–Reisner theory, Francisco, Christopher A and Mermin, Jeffrey and Schweig, Jay, Connections between algebra, combinatorics and geometry, 209–234, 2014, Springer

[10] Topological results in combinatorics., Munkres. James R, Michigan Mathematical Journal, 113–128, 1984, University of Michigan, Department of Mathematics

[11] Combinatorics and commutative algebra, Stanley, Richard P, 41, 2007, Springer Science & Business Media

[12] Stanley-Reisner rings for symmetric simplicial complexes, G-semimatroids and Abelian arrangements, D'Alì, Alessio and Delucchi, Emanuele, 2018

[13] Introduction to Stanley–Reisner rings, Okazaki, Ryota

Abstract

Stanley-Reisner theory provides the central link between combinatorics and commutative algebra. Pioneered in the 1970s, the correspondence between simplicial complexes and squarefree monomial ideals has been responsible for substantial progress in both fields. In this article we survey results on topological properties of simplicial complexes Δ, mostly defined via algebraic properties of the Stanley-Reisner ring $\mathbb{K}[\Delta]$. A property of Δ or $\mathbb{K}[\Delta]$ is called topological if it only depends on the homeomorphism type of the geometric realization of Δ (and on $\mathbb{K}$).

College of Science

School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Topological Properties of Stanley-Reisner Rings

Haniyeh Abdolmaleki

Supervisor: Siamak Yassemi

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of B.Sc. in Pure Mathematics

2022