پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

قضیه ریمان رخ

نگارنده

امیرارسلان منکاوی

استاد راهنما: دکتر علی کمالی نژاد

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی
در رشته ریاضی محض

مرداد ماه ۱۴۰۲

چکیده

قضیه ریمان-رخ یکی از اساسی ترین قضیه ها در رویه های ریمانی و هندسه جبری است که به حساب گونای یک خم جبری می‌پردازد.حساب گونای یک خم جبری از این نظر اهمیت دارد که یکی از ناورداهای توپولوژیک خم های جبری است. بدین منظور مقدماتی از انالیز مختلط و توپولوژی جبری و همچنین فرم های دیفرانسیل بیان خواهیم کرد و از احکام ان ها برای شکل دادن به برهان قضیه ریمان-رخ استفاده خواهیم کرد

سپاسگزاری

اکنون که به یاری پروردگار و راهنمایی اساتید نامور موفق به پایان این پروژه شده ام برخود واجب می‌دانیم که نهایت سپاس‌گزاری را از دکتر علی کمالی‌نژاد که در این راه به من کمک کرده اند، به عمل اورم
همچنین ماحصل اموخته هایم را تقدیم می‌کنم به روح پرفتوح دایی عزیزم که مهر اسمانی‌اش ارام‌بخش آلام زمینی‌ام است
و به استوارترین تکیه‌گاهم،پدرم
و به همراه ترین،مادر

پیشگفتار

ایده ریمان شناسایی توابع براساس صفر ها و قطب‌هایشان بود.بدین منظور گام اول این بود که توابع را به عنوان شکلی هندسی ببیند تا ویژگی‌هایی توپولوژیک به توابع نسبت دهد.یکی از این ویژگی های توپولوژیک گونای خم های جبری یا رویه ریمانی فشرده بود.ریمان ابتدا ثابت کرد که گونا یک ناوردای توپولوژیک است و این موضوع منتهی به طبقه‌بندی رویه های ریمانی فشرده براساس گونای ان‌ها شد.
قضیه ریمان-رخ توسط رخ که یکی از شاگردان ریمان بود،در سال ۱۸۶۷ ثابت گردید و نتایج و تعمیم های بسیاری از ان در جای جای ریاضیات به ویژه در هندسه جبری و نظریه اعداد استفاده می‌شود.
ابزار اصلی استفاده شده در اثبات قضیه ریمان-رخ،فرم های دیفرانسیل و کوهومولوژی دِ رام می‌باشد که احکام مهمی درباره فضاهای برداری فرم های دیفرانسیل به ما می‌دهد.ایده اثبات گنجاندن مفهوم گونا در فضاهای برداری و فرم های دیفرانسیل مرومورفیک و ارتباط دادن ان با مفاهیمی چون قطب و $divisor$ و در گام بعد ارتباط دادن بین بعد ان‌ها به عنوان فضاهای برداری است.
برای نگاه کردنِ انالیزی به قضیه-رخ می‌بایست شناخت خوبی از انالیز مختلط ، توپولوژی و توپولوژی جبری داشته باشیم.بدین منظور فصل اول این پروژه مروری نسبتا طولانی به این دروس است تا با ایده های بکار رفته در ساخت تئوری رویه های ریمانی اشنا باشیم و همچنین از احکام بدست امده در این دروس به ساختن این رویه ها پیشتر توجه کنیم در فصل دوم تعریف های مقدماتی به همراه چند مثال از رویه های ریمانی خواهیم زد تا این فضا را از لحاظ خواص توپولوژیک و نسبت ان با صفحه اعداد مختلط را بهتر بشناسیم. در فصل سوم فرم های دیفرانسیل،که همانطور که گفته شد ابزار اصلی ما در جهت برهان قضیه هستند، را معرفی می‌کنیم و با استفاده از ان ها و ایده بکار رفته در اثبات احکام ان‌ها به اثبات قضیه ریمان-رخ نزدیک می‌شویم در فصل چهارم در مسیر اثبات قضیه ریمان-رخ به روابط مهم و حیاتی مانند رابطه ریمان-هورویتز می‌رسیم.$divisor$ و سیستم های خطی فرم های دیفرانسیل را معرفی می‌کنیم و در اخر به قضیه معروف ریمان-رخ می‌رسیم در فصل پنجم خلاصه ای از کار های انجام شده را بیان می‌کنیم و ایده کلی اثبات را با فرمول‌بندی ریاضی مرور خواهیم کرد. و همچنین برای دانشجویان علاقه‌مند تعمیم های قضیه ریمان-رخ و قدم های بعدی در انالیز مختلط و رویه های ریمانی را معرفی می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدماتی جهت ساخت تئوری رویه های ریمانی

مطالب این بخش بصورت کامل تر در هر کتاب استاندارد انالیز مختلط و ریاضی عمومی و توپولوژی یا توپولوژی جبری یافت میشود

در بخش اول ابتدا مقدماتی از ریاضی عمومی بیان می‌کنیم که بسیار از این دو قضیه در طول درس استفاده می‌کنیم. در بخش دوم این فصل انالیز مختلط را تا جایی پیش می‌بریم که از لم ها و قضیه های در ساخت رویه های ریمانی استفاده شود. و در بخش سوم مقدماتی از توپولوژی جبری و گروه های بنیادی و فضای پوششی بیان می‌کنیم.

۱.۱ قضیه گرین و قضیه استوکس

تعریف ۱.۱. یک مسیر در X از نقطه A به B یک تابع پیوسته بصورت $\gamma : [a,b] \to X$ است که $\gamma(a) = A$ و $\gamma(b) = B$ و همچنین مسیر γ را بسته گوییم هرگاه داشته باشیم $\gamma(a) = \gamma(b)$

تعریف ۲.۱. مسیر γ را هموار گوییم هرگاه مسیر γ را بتوان بصورت $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ نمایش داد و هر کدام از توابع $x_i(t)$ به مقدار دلخواه مشتق پذیر باشند

همچنین مسیر γ را قطعه قطعه هموار گوییم هرگاه γ از بهم چسباندن تعدادی متناهی مسیر هموار بدست اید

قضیه ۳.۱. (قضیه گرین) هرگاه D یک دامنه کراندار باشد و ∂D قطعه قطعه هموار باشد و همچنین P و Q روی $D \cup \partial D$ بطور پیوسته مشتق پذیر باشد انگاه داریم :

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

اثبات. اثبات ۲ گام دارد :

۱. **اثبات حکم برای حالتی که D یک مثلث است**

بدون کم شدن از کلیت میتوان فرض کرد که D یک مثلث با رئوس $D_1 = (0,0), D_2 = (1,0), D_3 = (0,1)$ می‌باشد.در اینصورت با پارامتر سازی اضلاع مثلث ذبه عنوان یک مسیر به

سادگی به حکم میرسیم

۲. **اثبات برای حالت کلی**
از ریاضی عمومی میدانیم که شکل دامنه های کراندار را می‌توان به اشکالی تقسیم کرد که هریک مثلث هستند یا با تغییر متغیری ان هارا به مثلث تبدیل کرد که مثلث ها تنها در مرز با یکدیگر اشتراک داشته باشند.از انجا که مسیر طی شده روی اشتراک دو مثلث برعکس همدیگرند پس با جمع زدن انتگرال ها روی هر مثلث و استفاده از گام اول اثبات به انتگرال روی کل D می‌رسیم و حکم ثابت میشود

قضیه ۴.۱. (قضیه استوکس) فرض کنید S یک دامنه کراندار و ∂S قطعه قطعه هموار باشد و S دارای میدان عمودی $\hat{N}$ باشد. در اینصورت داریم :
$\int_{\partial S} F \cdot dr = \iint_S curlF \cdot \hat{N} dS$

تذکر ۵.۱. قضیه استوکس در حالت ۲ بعدی همان قضیه گرین و در حالت سه بعدی بصورت زیر است.
$\int_{\partial D} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \iint_D (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}) dydz + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}) dxdz + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) dxdy$

اثبات. اثبات بسیار شبیه اثبات قضیه گرین است.از انجا که D به تعدادی متناهی سطح بدون روی هم‌افتادگی تجزیه می‌شود کافی است نشان دهیم که فرمول بالا برای هر کدام از انها برقرار است زیرا روی مرز سطوح تجزیه شده جهت انتگرال های خطی خلاف یکدیگرند و باهم ساده می‌شوند.پس اگر D را به تعداد کافی به زیر سطح ها تقسیم کنیم و فرمول را برای هریک از انها حساب کنیم حکم ثابت می‌شود. در نتیجه به دنبال ساده کردن حکم هستیم تا به قضیه گرین برسیم.بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم که S دارای تصویر قائم یک به یک روی صفحه xy است و میدان عمود بر ان رو به بالا می باشد بنابراین روی S،z یک تابع هموار از x و y مثل $z = g(x, y)$ است که برای هر (x, y) در ناحیه R صفحه xy تعریف شده است. با بدست اوردن dz و برحسب g و مشتقات جزیی ان و با جایگذاری این عبارت در $\int_{\partial D} F_x dx + F_y dy + F_z dz$ و استفاده از قضیه گرین به عبارتی می رسیم که معادل است با(معادل بودن این دو عبارت از نوشتن ds و $\hat{N}$ برحسب g بدست می‌آید) عبارت سمت چپ تساوی حاصل می‌شود

۲.۱ مقدمات انالیز مختلط

برای مطالعه کامل برهان های زیربخش های ۱ و ۲ به [۱] مراجعه کنید

۱.۲.۱ تعاریف و قضایای اولیه

در فصول بعدی این پروژه از قضایای اساسی انالیز مختلط به دفعات استفاده شده و مفروض هستند.به همین منظور در این بخش در جهت اثبات این قضایای مهم و اساسی پیش می‌رویم. در این قسمت از پروژه پس از بیان مفاهیم مقدماتی انالیز مختلط ثابت می‌کنیم که اگر تابعی مختلط مقدار یکبار مشتق‌پذیر باشد از هر مرتبه مشتق‌پذیر است.

تعریف ۶.۱. تابع مختلط مقدار $f = u + iv$ را تحلیلی گوییم هرگاه در معادلات زیر صدق کند
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$
به معادلات بالا معادلات کوشی-ریمان گفته می‌شود

تعریف ۷.۱. دیفرانسیل h را تعریف می‌کنیم :
$$dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy$$

تعریف ۸.۱. دیفرانسیل $Pdx + Qdy$ را دقیق گوییم هرگاه تابعی تحلیلی مانند h چنان موجود باشد که
$$dh = Pdx + Qdy$$

تعریف ۹.۱. دیفرانسیل $Pdx + Qdy$ را بسته گوییم رابطه $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

گزاره ۱۰.۱. هر دیفرانسیل دقیق،بسته است.

اثبات. دیفرانسیل دقیق $Pdx + Qdy$ را در نظر بگیرید.دقیق بودن این دیفرانسیل به ان معناست که تابع تحلیلی h چنان موجود است که $\partial h/\partial x = P$ و $\partial h/\partial y = Q$. حال داریم
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

لم ۱۱.۱. نگاشت بطور پیوسته مشتق پذیر $f(z)$ تحلیلی است اگر و فقط اگر دیفرانسیل $f(z)dz$ بسته باشد

قضیه ۱۲.۱. (قضیه کوشی) اگر D یک دامنه کراندار باشد که مرز ان قطعه قطعه هموار باشد و تابع $f(z)dz$ تحلیلی باشد انگاه داریم : $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$

اثبات. با توجه به اینکه $dz = dx + idy$ و $f = u + iv$ می‌توانیم $f(z)dz$ را بصورت یک دیفرانسیل به شکل $(u+iv)dx+(-v+iu)dy$ نمایش دهیم.از قضیه گرین استفاده می‌کنیم و انتگرال $\int_{\partial D} f(z)dz$ را بازنویسی می‌کنیم.سپس به سادگی از تحلیلی بودن f استفاده می‌کنیم و با توجه به معادلات کوشی-ریمان و صورت دیگر انتگرال بالا حکم نتیجه می‌شود

تعریف ۱۳.۱. نگاشت حقیقی مقدار u را همساز (هارمونیک) گوییم هرگاه داشته باشیم $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ و نگاشت مختلط مقدار $f = u + iv$ همساز است هرگاه u و v هردو همساز باشند

قضیه ۱۴.۱. فرض کنید u یک نگاشت همساز روی دامنه D باشد و دیسک باز $|z - z_0| < \rho$ درون D باشد انگاه
$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^i\theta)\frac{d\theta}{2\pi}, 0 < r < \rho$$

اثبات. از قضیه گرین به سادگی نتیجه می‌شود که تساوی $\oint_{|z-z_0|=r} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 0$ برقرار است .سپس با پارامتر سازی مسیر انتگرال گیری و جابه‌جایی ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری نتجه می‌شود که نگاشت $\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^i\theta)$ یک تابع ثابت است و بنابر پیوستگی u این مقدار ثابت برابر است $u(z_0)$.

قضیه ۱۵.۱. (فرمول انتگرال کوشی) تابع تحلیلی f و دامنه کراندار با مرز قطعه قطعه هموار D را بطوری درنظر بگیرید که f قابل گسترش به مرز D باشد.در اینصورت داریم:
$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^m+1}dz, z \in D$$

اثبات. اثبات با استقرا صورت می‌گیرد.نخست حالت $m=0$ را ثابت می‌کنیم
دیسک باز $d_\epsilon=|z-z_0|\leq\epsilon$ را در نظر می‌گیریم.تعریف می‌کنیم $A=D-D_\epsilon$ طبق قضیه کوشی می‌دانیم که
$\int_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=\int_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz-\int|z-z_0|=\epsilon\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=0$.
در نتیجه داریم
$\int_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz=\int_{|z-z_0|=\epsilon}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$.
حال طبق قضیه قبل حکم برای $m=0$ نتیجه می‌شود حال برای اجرا کردن استقرا کافیست از تابع $f^{(m-1)}(z)$ مشتق‌گیری کنیم و حکم حاصل می‌شود

لم ۱.۱۶. **(حدس** ML**)** اگر $h(z)$ یک تابع پیوسته باشد که $|h(z)|<M$ و γ یک مسیر قطعه قطعه هموار که طول ان L باشد انگاه:
$\int_\gamma h(z)dz\leq ML$

اثبات. برهان به سادگی از مجموع ریمانی و نامساوی مثلث نتیجه می‌شود

تعریف ۱.۱۷. تابع مختلط مقدار f را تام گوییم هرگاه روی $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد

قضیه ۱.۱۸. (قضیه لیوویل) اگر f یک تابع تام باشد و کراندار باشد انگاه f ثابت است

اثبات. نقطه دلخواه $z_0\in\mathbb{C}$ را در نظر بگیرید و یک گوی حول ان با شعاع ρ را اختیار کنید.از انجا که f کراندار است فرض کنیم $f(z)\leq M$ بنابر فرمول انتگرال‌گیری کوشی و لم بالا داریم $|f(z_0)|\leq\frac{M}{\rho}$ حال با کوچک کردن مقدار ρ به مطلوب دست می‌یابیم

لم ۱.۱۹. (قضیه موررا) اگر $f(z)$ یک نابع پیوسته روی دامنه D باشد و به ازای هر مستطیل دلخواه R که اضلاع ان موازی با محور های مختصات باشد و زیر مجموعه D باشد رابطه $\int_{\partial R}f(z)dz=0, z\in D$ برقرار باشد، f یک تابع تحلیلی روی D است.

اثبات. بدون کم شدن از کلیت فرض کنیم D یک دیسک با مرکز z_0 می‌باشد.تابع $F(z)=\int_{z_0}^z f(w)dw$ را در نظر می‌گیریم.نشان می‌دهیم که F تابع اولیه تابع f است.با استفاده از تعریف مشتق و حدس ML به سادگی می‌توان نشان داده می‌شود که $F'=f$ حال که تابع F مشتق پذیر است و مشتق ان پیوسته است در نتیجه F تحلیلی است و از انجا که مشتق یک تابع تحلیلی نیز یک تابع تحلیلی است پس f هم تحلیلی است و حکم ثابت می‌شود

قضیه ۱.۲۰. تابع مختلط مقدار f روی دامنه D را در نظر بگیرید بطوریکه
$\forall z\in D.\ f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ در اینصورت تابع f یک تابع تحلیلی روی D است.

اثبات. از قضیه گورسا استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که به ازای هر مستطیلی که زیر مجموعه D است و اضلاع ان موازی با محور های مختصات است رابطه $\int_{\partial R}f(z)dz=0$ برقرار است و بنابر قضیه گورسا تابع f تحلیلی است. مستطیل دلخواه R را در نظر می‌گیریم که اضلاعش موازی با محور های مختصات باشد.این مستطیل را به چهار زیر مستطیل برابر تقسیم می‌کنیم و دوباره این کار را انجام می‌دهیم.در نتیجه نامساوی های زیر نتیجه می‌شوند

$\frac{1}{4^n}|\int_{\partial R} f(z)dz| \le .... \le \frac{1}{4}|\int_{\partial R_{n-1}} f(z)dz| \le |\int_{\partial R_n} f(z)dz|$ حال با افزایش مقدار n هریک از R_n ها به نقطه ای مانند z_0 میل می‌کنند.با توه به مشتق‌پذیر بودن f داریم
$|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)| \le \epsilon_n \; z \in R_n$
بوضوح اگر طول خم بسته R برابر L باشد درنتیجه طول خم بسته R_n برابر با $\frac{L}{2^n}$ است.با توجه به رابطه بالا و نکته بیان شده بذست می‌اید
$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| \le 2\frac{L}{2^n}$ حال با توجه به این نکته که تابع $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ یک چند جمله درجه یک از z است و تحلیلی است و اضلاع همه مستطیل های R_n موازی با محور های مختصات است قضیه کوشی برای تابع $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ برقرار است و داریم $\int_{\partial R_n} f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0) = 0$ پس داریم
$|\int_{\partial R_n} f(z)dz| = |\int_{\partial R_n} f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| \le (2\frac{L}{2^n})(\frac{L}{2^n}) = 2\frac{L^2}{4^n}$ با توجه به طول مستطیل های R و R_n داریم
$|\int_{\partial R} f(z)dz| = 4^n|\int_{\partial R_n} f(z)dz| \le 2L^2\epsilon_n$ و برای n به قدر کافی بزرگ بدست می‌اید $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ و بنابر قضیه مورر‌ا f تحلیلی است

تذکر ۲۱.۱. تابه‌حال با توجه به تعریف تابع تحلیلی،می‌دانستیم که هر تابع تحلیلی تابعی مشتق پذیر نیر می‌باشد.قضیه گورسا نشان می‌دهد که اگر f در دامنه D مشتق پذیر باشد انگاه f روی D تحلیلی است و این یکی از انگیزه های بیان شده در ابتدای این بخش را اثبات می‌کند

۲.۲.۱ ارتباط سری های توانی و توابع تحلیلی

در این بخش نشان می‌دهیم که توابع مشتق‌پذیر و توابع تحلیلی معادلند و هردو را می‌توان به‌صورت سری توانی نشان داد .سپس سری لوران را معرفی کرده و با استفاده از ان به تعریف انواع تکینگی ها و بیان قضایای مربوط به ان‌ها می‌رویم

گزاره ۲۲.۱. فرض کنید سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ با شعاع همگرایی R مفروض است.در اینصورت تابع $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ یک تابع تحلیلی است.

اثبات. از قضیه گورسا می‌دانیم کافیست نشان دهیم که تابع f مشتق‌پذیر است. از طرف دیگر ادعا می‌کنیم که از سری های توانی همانند چند جمله ای ها می‌توان مشتق‌گیری کرد. بطور دقیق تر داریم
$f^{(m)} = m!\sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} a_k z^k$ با استفاده از تعریف مشتق و استقرا می‌توان اثبات را کامل کرد

قضیه ۲۳.۱. فرض کنید تابع f در دیسک باز $|z-z_0| < \rho$ تحلیلی باشد. در اینصورت f را می‌توان بصورت یک سری توانی حول z_0 نوشت بطوریکه $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ باشد و ضرایب a_k بصورت $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ یا $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{(k+1)}}$ بدست اورد که $o < r < \rho$

اثبات. از فرمول انتگرال کوشی می‌دانیم که $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{partial|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}dw.$
از طرف دیگر داریم
$\sum_{k-0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \; |z| < 1$
از تساوی بالا استفاده می‌کنیم و و برای عبارت $\frac{1}{w-z}$ سری هندسی می‌نویسیم

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{w})^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{w^{k+1}}$$

با توجه به اینکه انتگرال گیری و جمع کردن می‌توانند باهم جابه‌جا شوند،با جایگذاری تساوی فوق در فرمول انتگرال کوشی و به مطلوب خواهیم رسید.

قضیه ۲۴.۱. اگر f و g روی دامنه D تحلیلی باشند و اگر $f(a) = g(a)$ باشد بطوریکه a عضو مجموعه‌ای باشد که نقطه غیرتنها داشته باشد انگاه برای هر $z \in D$ داریم $f(z) = g(z)$.

اثبات. برای اثبات ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم و سپس به اثبات ان می‌پردازیم

لم ۲۵.۱. مجموعه صفر های یک تابع اجتماعی تعدادی نقطه تنها است

فرض کنیم لم بالا را مفروض داریم. در اینصورت تابع $\phi(z) = f(z) - g(z)$ را درنظر می‌گیریم.با توجه به فرض ،نقطه $a \in D$ چنان موجود است که a نقطه تنها نیست و $\phi(a) = 0$. بنابر لم بالا a صفر تابع نیست مگر اینکه تابع ϕ تابع ثابت صفر باشد و در نتیجه $f(z) = g(z)$ است و حکم ثابت می‌شود

اثبات. ایده اثبات لم این است که ثابت کنیم صفر های یک تابع مرتبه متناهی دارند. U را تعریف می‌کنیم مجموعه همه ریشه های تابع f که مرتبه ان‌ها نامتناهی است.حال $z_0 \in U$ را در نظر بگیرید.با توجه به تحلیلی بودن f روی D می‌توان روی هر دیسکِ باز زیر مجموعه D برای f حول نقطه z_0 سری توانی نوشت.با توجه به اینکه مرتبه ریشه z_0 نامتناهی است با نوشتن سری توانی حول z_0 درمی‌یابیم که به ازای هرنقطه روی دیسک مقدار f صفر است.در نتیجه تمام نقاط دیسک عضو U هستند دیسک زیر مجموعه U می‌باشد. حال این روند برای نقاط دیگر این دیسک اجرا می‌کنیم و در نهایت U برابر است اجتماع تعدادی متناهی دیسک باز.حال نشان می‌دهیم که U بسته است و بنابر همبند بودن دامنه D به تناقض می‌رسیم.
حال اگر نقطه درون $D - U$ در نظر بگیریم با توجه به تحلیلی بودن f روی کل D تابع f حول ان نقطه دلخواه سری توانی دارد درنتیجه $D - U$ هم اجتماع باز هاست پس $D - U$ هم باز است پس U بسته است. بنابر این $U = D$ یا $U = \emptyset$ که اگر $U = D$ باشد تابع f تابع ثابت صفر است که تناقض است.پس $U = \emptyset$ و برهان لم و قضیه به اتمام رسید.

در ادامه لمی را بیان می‌کنیم برای تعریف و بیان قضایای رویه‌های ریمانی بسیار مهم است

لم ۲۶.۱. اگر تابع تحلیلی f روی D در نقطه z_0 دارای صفر از مرتبه n باشد تابع تحلیلی g چنان که $f(z) = g(z)^n$ و $g'(z_0) \neq 0$

اثبات. با توجه به تحلیلی بودن f می‌دانیم که f دارای سری توانی حول نقطه z_0 است.پس f بصورت $f(z) = (z - z_0)^n h(z)$ قابل نمایش است که $h(z) \neq 0$. حال تابع $g(z) = e^{\frac{log(z-z_0)^n h(z)}{n}}$ را تعریف می‌کنیم که تمامی شروط حکم را براورده می‌کند

تذکر ۲۷.۱. در اثبات بالا دلیل اینکه تابع $g(z) = (z - z_0)\sqrt[n]{h(z)}$ معرفی نشد این است توابع رادیکالی در تمام $\mathbb{C}$ تحلیلی نیستند اما توابع نمایی توابعی تام هستند.

گزاره ۲۸.۱. فرض کنید تابع f یک تابع تحلیلی روی دامنه $\rho < |z - z_0| < \sigma$ باشد.در اینصورت f را می‌توان بصورت $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ نوشت بطوری که اگر $\rho < r < s < \sigma$ باشد انگاه سری فوق روی دامنه $r \leq |z - z_0| \leq s$ بطور یکنواخت به تابع f همگرا می‌شود. همچنین برای $\rho < r < \sigma$ فیکس شده، ضرایب a_k از فرمول انتگرال‌گیری کوشی ،بصورت زیر محاسبه می‌شوند.
$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

اثبات. اثبات بسیار شبیه به اثبات وجود سری توانی تپابع تحلیلی است.برای اثبات کامل به [۱] مراجعه شود.

تذکر ۲۹.۱. به سری فوق سری لوران تابع f حول نقطه z_0 گویند.

هدف از تعریف سری لوران،تعریف انواع تکینگی ها است لذا از اثبات قضیه فوق بدلیل حجم زیاد مطالب خودداری می‌کنیم و به معرفی تکینگی ها می‌پردازیم

تعریف ۳۰.۱. دیسک باز $D = |z - z_0| < r$ را در نظر بگیرید.نقطه z_0 را یک تکینگی تنهای تابع f معرفی می‌کنیم هرگاه f روی دامنه $D - \{z_0\}$ تحلیلی باشد

پس هرگاه تابع f در نقطه z_0 دارای ناپیوستگی باشد یا مشتق ناپذیر باشد گوییم تابع f در این نقطه تکینگی دارد.حال براساس ضرایب سری لوران تابع f انواع تکینگی هارا بررسی می‌کنیم و برای هریک چند گزاره و قضیه را مرور می‌کنیم

تعریف ۳۱.۱. گوییم تابع f در نقطه z_0 دارای تکینگی رفع شدنی است هرگاه تمام ضرایب منفی سری لوران تابع f حول نقطه z_0 برابر با صفر باشد.به عبارتی سری لوران تابع f برابر باشد با
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k,\ 0 < |z - z_0| < r$$

تذکر ۳۲.۱. تفاوت سری بالا با سری توانی این است که نقطه z_0 در دامنه همگرایی سری بالا نیست اما در سری توانی نقطه z_0 هم داخل دامنه همگرایی وجود دارد.

مثال ۳۳.۱. تابع $f(z) = \frac{sinz}{z}$ در نقطه $z_0 = 0$ دارای تکینگی رفع شدنی است زیرا همانطور که می‌دانیم سری لوران این تابع حول نقطه $z_0 = 0$ برابر است با $\frac{sinz}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \ldots$

قضیه ۳۴.۱. فرض کیند نقطه z_0 یک تکینگی تابع f باشد. اگر تابع f حول نقطه z_0 کراندار باشد انگاه z_0 یک تکینگی رفع شدنی تابع f است.

اثبات. از تعریف استفاده می‌کنیم که همه ضرایب با اندیس منفی در سری لوران تابع f حول نقطه z_0 برابر با صفر است.با توجه به اینکه ضرایب سری لوران از یک رابطه انتگرال‌گیری بدست می‌اید می‌توانیم از حدس ML استفاده کنیم و با نزدیک کردن r در رابطه انتگرال گیری به مطلوب دست یابیم

تعریف ۳۵.۱. گوییم که تابع f در نقطه z_0 دارای قطب است هرگاه سری لوران تابع f حول نقطه z_0 دارای متناهی تا ضرایب با اندیس منفی باشد.به عبارت دیگر یعنی وجود داشته باشد عدد طبیعی N بطوری که برای هر $K < -N$ داشته باشیم $a_k = 0$ و بسط لوران تابع f بصورت زیر است :
$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^{-N}} + \frac{a_{-N+1}}{(z-z_0^{-N+1})} + \ldots + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots$$
به عدد N در تعریف بالا مرتبه قطب تابع f در z_0 گوییم.

در این بخش به تعدادی قضیه درباره قطب های تابع f بیان می‌کنیم و به سرعت از برهان ان‌ها عبور می‌کنیم

قضیه ۳۶.۱. فرض کنید تابع f در نقطه z_0 دارای تکینگی باشد.در اینصورت z_0 یک قطب از مرتبه N تابع f است اگر و تنها اگر $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N}$ که تابع g تحلیلی است.

اثبات. فرض کنیم سری لوران تابع f حول نقطه z_0 بصورت $\sum_{k=-N}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ باشد. تعریف کنیم $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-N+k}(z-z_0)^k$. در اینصورت تابع g در حکم را براورده می‌کند.
برای اثبات جهت عکس باتوجه به تحلیلی بودن g می‌توانیم سری توانی ان را حول z_0 بنویسیم و بسط لوران تابع f بدست می‌اید.

قضیه ۳۷.۱. رض کنید تابع f در نقطه z_0 دارای تکینگی باشد.در اینصورت z_0 یک قطب از مرتبه N تابع f است اگر و فقط اگر نگاشت $\frac{1}{f}$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد و در دارای صفر از مرتبه N در نقطه z_0 باشد

اثبات. با نوشتن سری توانی تابع $\frac{1}{f}$ و معکوس کردن ان به مطلوب می‌رسیم.(توجه کنیم که عبارت مخرج در z_0 ناصفر است.)
و برای اثبات طرف دیگر با استفاده از قضیه قبل می‌توان به سادگی به حکم رسید. برای اثبات کامل به $GAMELIN$ مراجعه شود.

قضیه ۳۸.۱. اگر تابع f در نقطه z_0 دارای تکینگی تنها باشد، z_0 یک قطب برای تابع f است اگر و فقط اگر $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$

اثبات. با توجه به بسط لوران تابع f در نقطه z_0 به سادگی می‌توان دید که $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. برای اثبات طرف دیگر به برهان خلف فرض کنیم که نقطه z_0 یک تکینگی رفع شدنی برای تابع f است. از فرض می‌دانیم که $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f} = 0$ برقرار است.در نتیجه بنابر قضیه ریمان برای تکینگی های رفع شدنی می‌دانیم که تابع $\frac{1}{f}$ را می‌توان به تابعی تحلیلی در یک همسایگی نقطه z_0 گسترش داد و قرار داد $\frac{1}{f(z_0)} = 0$. پس تابع $\frac{1}{f}$ دارای صفر از مرتبه N در نقطه z_0 است. و بنابر قضیه ۱.۳۶ تابع $f = \frac{1}{\frac{1}{f}}$ در نقطه z_0 یک قطب از مرتبه N دارد و حکم ثابت شد.

تعریف ۳۹.۱. گوییم که تابع f در نقطه z_0 دارای تکینگی اساسی است هرگاه سری لوران تابع f حول نقطه z_0 دارای نامتناهی تا ضریب ناصفر با اندیس منفی باشد.

مثال ۴۰.۱. تابع $e^{\frac{1}{z}}$ در نقطه $z = 0$ دارای تکینگی اساسی است زیرا داریم
$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$ و به سادگی می‌توان دید که بسط لوران این تابع در نامتناهی تا اندیس ضریب ناصفر اختیار کرده است

قضیه ۴۱.۱. (کسوراتی-وایرشتراس) اگر تابع f در نقطه z_0 دارای یک تکینگی اساسی باشد در اینصورت به ازای هر عدد مختلط w دنباله ای از اعداد مثل $\{z_n\}_n \geq 0$ وجود دارد که $\lim_{z\to z_n} f(z) = w$

اثبات. به برهان خلف فرض کنیم عددی مثل w_0 وجود دارد که حکم را براورده نمی‌کند.در نتیجه تابع $h(z) = \frac{1}{f(z)-w_0}$ کراندار است .سپس با استفاده از قضیه ریمان برای تکینگی های رفع شدنی نشان می‌دهیم که تکینگی f در نقطه z_0 یک قطب است و این خلاف فرض است و حکم ثابت شد.

۳.۲.۱ قضایایی درباره توابع تحلیلی و خواص ان‌ها

در انتهای این بخش قضایایی را مطرح می‌کنیم که تمامی ان‌ها در ادامه کار مهم هستند و از ان‌ها در ساختن رویه های ریمانی و اثبات قضایا استفاده خواهیم کرد.برخی از گزاره های این بخش علاوه بر صورتشان ایده اثبات ان‌ها اهمیت دارد. برای مطالعه کامل برهان ها به [۲] مراجعه کنید

تعریف ۴۲.۱. تابع f را یک تابع مرومورفیک گوییم هرگاه روی تمام دامنه اش بجز قطب ها تحلیلی باشد.

گزاره ۴۳.۱. فرض کنید D یک دامنه کراندار با مرز قطعه قطعه هموار باشد و f را یک تابع مرومورفیک روی D درنظر بگیرید که روی مرز D بصورت تحلیلی گسترش می‌یابد (به عبارتی قطبی روی مرز D ندارد.) و روی مرز D تابع f ریشه ای ندارد. حال اگر N_0 تعداد همه ریشه ها با احتساب مرتبه و N_∞ تعداد همه قطب ها با احتساب مرتبه باشد انگاه $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)} = N_0 - N_\infty$

اثبات. اگر f در نقطه z_0 دارای صفر از مرتبه n باشددر نتیجه حول یک همسایگی نقطه z_0 می‌توان تابع f را بصورت $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$ نوشت که g تحلیلی است و $g(z_0) \neq 0$ می‌باشد در نتیجه داریم $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$.
حال از انجا $g(z_0) \neq 0$ است پس تابع $\frac{g'(z)}{g(z)}$ در اطراف z_0 تحلیلی است.از طرف دیگر بنابر تحلیلی بودن تابع $\frac{g'(z)}{g(z)}$ ، بنابراین از قضیه کوشی می‌دانیم که $\int_{\partial D}\frac{g'(z)}{g(z)} = 0$. پس رابطه زیر حاصل می‌شود $\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)} = \int_{\partial D}\frac{n}{z-z_0}$ و می‌دانیم که انتگرال بالا برابر است با $\log f(z)$ می‌باشد.با توجه به تعریف لگاریتم و تکرار این روند برای قطب ها و ریشه های دیگر به حکم میرسیم.فقط توجه کنیم که در حالتی که نقطه z_0 قطب باشد از قضیه ۳۵.۱ استفاده می‌کنیم و تمام استدلال های بالا معتبر است و تنها یک جیز تغییر می‌کند اینکه .این قضیه به به گسترش تئوری رویه های ریمانی کمک شایانی می‌کند و پایه اساسی فصل دوم این پروژه است.

لم ۴۴.۱. (قضیه رخ) فرض کنید توابع f و g روی دامنه D تحلیلی هستند و فرض کنید دایره C زیر مجموعه دامنه D باشد.حال اگر به ازای هر نقطه عضو C داشته باشیم $|f(z)| > |g(z)|$ ، انگاه توابع f و $f+g$ به یک اندازه صفر دارند

اثبات. خانواده توابع تحلیلی $0 \leq t \geq 1$ $f_t(z) = f(z) + tg(z)$ را در نظر می‌گیریم.با توجه به تحلیلی بودن،این توابع روی دایره C قطب ندارند.پس بنابر گزاره قبل داریم
$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_t(z)}{f_t'(z)} f_t(z)dz = n_t$ که n_t تعداد صفر های تابع f_t است. نشان می‌دهیم که $n_0 = n_1$.
نخست نشان می‌دهیم تابع $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_t(z)}{f_t'(z)} f_t(z)dz = n_t$ یک تابع پیوسته از t است. با توجه به اینکه $|f(z)| > t|g(z)|$ است پس f_t هیچگاه صفر نیست و این تقسیم قابل تعریف است و با توجه به اینکه f_t و f_t' توابعی پیوسته از t هستند در نتیجه پیوستگی تابع $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_t(z)}{f_t'(z)} f_t(z)dz$ ثابت شد. حال از انجا که مقدار n_t صحیح است پس بوضوح باید مقداری ثابت باشد زیرا اگر چنین نباشد بنابر قضیه مقدار میانی $0 \leq s \leq 1$ وجود دارد چنان که مقدار n_s صحیح نیست که بوضوح تناقض است و نشان می‌دهد که برای هر $0 \leq t \leq 1$ مقدار n_t ثابت است و حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۴۵.۱. (قضیه نگاشت باز) اگر f روی دامنه D تحلیلی باشد و تابع f یک تابع ثابت نباشد انگاه برای هر $U \subset D$ که U باز است، $f(U)$ هم باز باشد.

اثبات. فرض کنیم w_0 عضوی از برد تابع f باشد.در اینصورت z_0 چنان موجود است که $f(z_0) = w_0$.
حال نشان می‌دهیم که تمام نقاط نزدیک w_0 درون برد تابع f هستند. نقطه دلخواه w را درون دیسک باز $|w - w_0| < \epsilon = D - 1$ را در نظر می‌گیریمو تابع $g_w(z) = f(z) - w$ را تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که برای هر نقطه داخل D_1 تابع $g_w(z)$ ریشه دارد و لذار حکم ثابت می‌شود. توابع F و G را بگونه ای تعریف می‌کنیم که $g_w = F + G$.بدین صورت که قرار می‌دهیم $F(z) = f(z) - w_0$ و $G = w_0 - w$. حال واضح است که می‌توان نقطه w را به‌قدر کافی به w_0 نزدیک کرد فاصله ان کمتر از مقدار $|f(z) - w_0|$ باشد.درنتیجه $|F| < |G|$ و شرایط لم بالا برقرار است و از انجا که می‌دانیم تابع F ریشه دارد پس تابع $F + G = g_w$ هم ریشه دارد و حکم ثابت شد.

قضیه نگاشت باز یکی از قدم های اصلی برای اثبات قضیه تابع وارون است.اما به منظور تکمیل اثبات این قضیه نیازمندیم چند تعریف و قاعده را بدانیم.

تعریف ۴۶.۱. به ضریب a_{-1} در سری لوران تابع f در نقطه z_0 مانده تابع f در نقطه z_0 گوییم که با توجه به فرمول ضرایب سری لوران داریم
$Res[f(z), z_0] = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz$

نتیجه ۴۷.۱. اگر f در نقطه z_0 یک قطب از مرتبه یک داشته باشد،مانده f در z_0 از رابطه زیر محاسبه می‌شود:
$Res[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$

قضیه ۴۸.۱. قضیه مانده ها فرض کنید که D یک دامنه کراندار باشد که مرز ان قطعه قطعه هموار باشد و فرض کنید تابع $f(z)$ یک تابع مرومورفیک روی $D \cup \partial D$ باشد که دارای مجموعه قطب های $\{z_1, ...z_m\}$ باشد.در اینصورت داریم

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res[f(z), z_j] \quad (۱.۱)$$

اثبات. اثبات این قضیه به همراه شکل در قضیه ۳.۳۹ برای حکمی مشابه در رویه های ریمانی بیان شده است.برای دیدن اثبات به ۳.۳۹ مراجعه کنید

تذکر ۴۹.۱. برای حساب مانده ها برای قطب های مرتبه های یک و دو قوانین دیگری نیز موجودند اما در اثبات قضیه تابع وارون تنها همین قانون کافیست.

قضیه ۵۰.۱. (قضیه تابع وارون) فرض کنیم تابع f روی دیسک $|z-z_0| \leq \rho$ تحلیلی باشد و $f(z_0) = w_0$ بطوریکه $f'(z_0) \neq 0$ و به ازای هر z عضو مجوعه $0 < |z - z_0| \leq \rho$ داشته باشیم $f(z) \neq w_0$. فرض کنید δ بطوری انتخاب شده باشد که رابطه $\delta \leq |f(z) - w_0|$ برای هر z عضو $|z - z_0| = \rho$ برقرار باشد.در اینصورت برای هر w که $|w - w_0| < \delta$ باشد،z یکتا چنان موجود است که $|z - z_0| < \rho$ و $f(z) = w$. و ضابطه $z = f^{-1}(w)$ بصورت زیر قابل نمایش است.
$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta$

اثبات. نقطه w فیکس می‌کنیم بطوریکه $|w-w_0| < \delta$ باشد و z را بگونه ای درنظر بگیریم که $f(z)=w$ باشد.با توجه به فرض تابع $\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}$ همه جا تحلیلی است مگر در قطب مرتبه اول $z=\zeta$. با حساب کردن مانده این تابع در نقطه z داریم

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}d\zeta = Res[\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w},z] = \lim_{\zeta\to z}\frac{(\zeta-z)\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta-w)} = z = f^{-1}(w)$$

و این حکم را ثابت می‌کند زیرا تساوی اول از تعریف مانده،تساوی دوم از نتیجه بیان شده و تساوی سوم از حساب حد بدست می‌اید.

۳.۱ مقدماتی از توپولوژی جبری

در این قسمت به بیان مفاهیمی مقدماتی از توپولوژی جبری می‌پردازیم. از این قسمت در بیان گزاره هایی درباره رویه های ریمانی و همچنین انجام محاسباتی پیرامون این رویه ها استفاده خواهد شد. از این تعاریف،قضیه ها و اثبات ان‌ها به سرعت عبور خواهیم کرد و تنها به بیان ایده‌های اصلی و مهم تعاریف و برهان ها اشاره خواهد د.خواننده می‌تواند برای مطالعه عمیق تر به کتاب توپولوژی جبری [۴] مراجعه کند.

۱.۳.۱ مفاهیم اولیه و محاسبه چند گروه بنیادی

تعریف ۵۱.۱. نگاشت $f_t : Y \to X$ را یک هوموتوپی از Y به X گوییم هرگاه نسبت به t و X پیوسته باشد. در اینصورت دو نگاشت $f_0 : Y \to X$ و $f_1 : Y \to X$ را هوموتوپ یکدیگر گوییم هرگاه هوموتوپی $F_t : Y \to X$ چنان موجود باشد بطوریکه $F_1 = f_1$ و $F_0 = f_0$.

مثال ۵۲.۱. اگر در تعریف بالا نظر بگیریم که $Y = I = [0,1]$ در نتیجه هر نگاشت $f_t : I \to X$ یک هوموتوپی بین مسیر ها در X است هرگاه داشته باشیم:

۱. برای هر $t,s \in I$ داشته باشیم $f_t(0) = f_s(0)$ و $f_t(1) = f_s(1)$

۲. نگاشت f_t یک نگاشت پیوسته باشد.

تذکر ۵۳.۱. به مسیر $f : I \to X$ یک طوقه گوییم هرگاه $f(0) = f(1)$. و هوموتوپی بین طوقه ها نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود.

تعریف ۵۴.۱. فرض کنیم تمام طوقه های درون X با نقطه پایه x_0 درون مجموعه ای به نام A قرار می‌دهیم.یک رابطه هم ارزی روی این مجموعه تعریف می‌کنیم بطوریکه دو طوقه f_0 و f_1 بایکدیگر هم ارز هستند هرگاه هوموتوپی f_t میان این دو طوقه برقرار باشد.این رابطه هم ارزی را با نماد " $\sim$ "نشان می‌دهیم.به عبارت دیگر داریم $f_0 \approx_f f_1 \iff f_0 \sim f_1$ حال اگر مجموعه A را با رابطه هم ارزی $\sim$ افراز کنیم،به مجموعه حاصل گروه بنیادی فضای توپولوژیک X گویند و ان را با

$$\Pi_1(X,x_0) = A/\sim$$

نشان می‌دهیم.

گزاره ۵۵.۱. مجموعه $\Pi_1(X,x_0)$ با عمل $\cdot$ تشکیل یک گروه می‌دهد که نام این گروه را **گروه بنیادی** فضای X می‌گذاریم

اثبات. نخست لازم است عمل $\cdot$ را تعریف کنیم.فرض کنیم f و g دو مسیر باشند بطوریکه $f(1)=g(0)$.
در اینصورت تعریف می‌کنیم

$$f\cdot g(s)=\begin{cases} f(2s), & 0\leq s\ 1/2 \\ g(2s-1), & 1/2\leq s\leq 1 \end{cases} \tag{۲.۱}$$

در اینصورت ضرب دو کلاس هم‌ارزی در $\Pi_1(X,x_0)$ را تعریف می‌کنیم $[f]\cdot[g]=[f\cdot g]$ عضو همانی گروه که مسیر ثابت است.عضو وارون هر عضو $f(s)$ تعریف می‌شود $f(1-s)$ و بوضوح ضرب دوطوقه طوقه می‌شود.خاصیت شرکت پذیری نیز با تغییر سرعت یک طوقه به سادگی قابل اثبات است.

تعریف ۵۶.۱. نگاشت $r:X\to X$ را یک درونبری گوییم هرگاه $r^2=ror=r$ یا به عبارت دیگر داشته باشیم $r(im(r))=id$.

تعریف ۵۷.۱. درونبری $r:X\to X$ مفروض است.فرض کنید یک هوموتوپی از همانی X به درونبری r موجود باشد.به این هوموتوپی یک تغییر شکل درونبر گوییم.

تعریف ۵۸.۱. نگاشت $f:Y\to X$ را یک هم‌ارزی هوموتوپی گوییم هرگاه نگاشت $g:X\to Y$ چنان موجود باشد که $gof\approx id_X$ و $fog\approx id_Y$

نتیجه ۵۹.۱. تغییر شکل درونبر یک حالت خاص از یک هم‌ارزی هوموتوپی است

در انتهای این بخش از مقدمه قرار است که گروه بنیادی چند فضایی که برای گسترش تئوری رویه های ریمانی لازم است را حساب کنیم.بدین منظور از تمامی ابزار های بالا استفاده خواهیم کرد.یکی از تکنیک های مهم برای حساب گروه بنیادی فضاها این است که سعی کنیم فضای موردنظر را به یک فضای دیگر توسط یک تغییر شکل درونبر تبدیل کنیم.در ادامه نشان خواهیم داد که گروه بنیادی یک ناوردا تحت هم‌ارزی هوموتوپی است.و این‌کار را توسط نگاشت های القایی انجام می‌دهیم.

گزاره ۶۰.۱. اگر $\phi:X\to Y$ یک هم‌ارزی هوموتوپی باشد در اینصورت نگاشت $\phi_*:\Pi_1(X,x_0)\to\Pi_1(Y,\phi(x_0))$ یک یکریختی گروهی است

اثبات. نخست نگاشت $\phi_*:\Pi_1(X,x_0)\to\Pi_1(Y,\phi(x_0))$ را تعریف می‌کنیم که بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi_*([f])=[\phi f] \tag{۳.۱}$$

حال اگر فرض کنیم که ϕ یک هم ارزی هوموتوپی باشد پس نگاشت $\psi:Y\to X$ چنان موجود است که $\phi\psi\approx id|_Y$ و $\psi\phi\approx id|_X$ حال دنباله زیر از نگاشت های القایی را در نظر بگیریم.

$$\Pi_1(X,x_0)\xrightarrow{\phi_*}\Pi_1(Y,\phi(x_0))\xrightarrow{\psi_*}\Pi_1(X,\psi(\phi(x_0)))\xrightarrow{\phi_*}\Pi_1(Y,\phi(\psi(\phi(x_0)))) \tag{۴.۱}$$

با توجه به اینکه $\phi\psi \approx id|_Y$ و $\psi\phi \approx id|_X$ می‌باشد واضح است که نگاشت های $\phi_*\psi_*$ و $\psi_*\phi_*$ یکریختی هستند.و به سادگی می‌توان نشان داد که ترکیب این سه نگاشت نیز یکریختی است و در نتیجه نگاشت اول نیز یکریختی است و حکم ثابت می‌شود

تعریف ۶۱.۱. فضای توپولوژیک $\tilde{X}$ به همراه نگاشت $p : \tilde{X} \to X$ را یک فضای پوششی برای X گوییم هرگاه در شرط مقابل صدق کند: یک پوشش باز برای X مثل $\{U_\alpha\}$ چنان موجود باشد که برای هر α ، $p^{-1}(U_\alpha)$ برابر با اجتماع مجزایی از مجموعه های باز $\tilde{X}$ که هریک بصورت یکسان‌ریخت به U_α تصویر شوند.

تذکر ۶۲.۱. هر فضای پوششی به صورت یک یکسان‌ریختی موضعی قابل تعبیر است.

قضیه ۶۳.۱. $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

اثبات. می‌توان نشان داد که نگاشت $p : \mathbb{R} \to S^1$ با ضابطه $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ یک فضای پوششی برای S^1 می‌باشد. ایده اثبات این است که به طوقه های در S^1 به عنوان مسیر هایی در $\mathbb{R}$ نگاه کنیم و از خواص بالابری هوموتوپی و شهود هندسی خود کمک بگیریم تا نشان دهیم نگاشت $\psi : \Pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ یک هم‌ریختی و در ادامه یک یک‌ریختی است.
برای مشاهده کامل اثبات به [۴] مراجعه کنید.

مثال ۶۴.۱. حال می‌خواهیم گروه بنیادی چند فضایی که در گسترش تئوری رویه های ریمانی نقش دارند را حساب کنیم.

۱. فضای محدب X (بخصوص دیسک) را در نظر بگیرید.بین دو مسیر دلخواه f_0 و f_1 هوموتوپی $f_t = tf_1 + (1-t)f_0$ را تعریف می‌کنیم.از انجا که فضای X محدب است پس نگاشت بالا همواره یک نگاشت پیوسته است و بین هر دو مسیر و در نتیجه بین هر دو طوقه یک هوموتوپی وجود دارد پس گروه بنیادی هر فضای محدب،گروه بدیهی است.

۲. فضای $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ را در نظر بگیریم.ادعا می‌کنیم که گروه بنیادی این فضا برابر $\mathbb{Z}$ است.زیرا تغییر شکل درونبری از X به S^1 موجود است که با ضابطه زیر مشخص می‌شود.

$$f_t(x) = tx/||x|| + (1-t)x \; x \neq 0 \tag{۵.۱}$$

واضح است که تصویر f برابر دایره واحد است و با توجه به ناصفر بودن x پیوستگی هم برقرار است.

۳. با یکی در نظر گرفتن $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{C}$ می‌توان گروه بنیادی فضای $X = \mathbb{C} - \{z_1, ...z_n\}$ را حساب کرد. بدون کم شدن از کلیت،می‌توان فرض کرد که نقاط $z_0, z_1, ...z_n$ روی محور حقیقی باشند. دور هر نقطه z_j یک گوی با مرکز z_j بزنیم بطوریکه اشتراک دو به دوی گوی ها باهم تهی باشند. حال خطوط عمودی را بین گوی ها چنان رسم می‌کنیم که بین هر دو خط عمودی یک گوی موجود باشد.حال با ضابطه ای مشابه ضابطه قبلی می‌توان دریافت که فضای بین دو خط عمودی تغییر شکل درونبری به محیط گوی های رسم شده حول z_j دارد.درنتیجه این فضا به مجمع گوه ای n دایره به‌هم چسبیده تغییر شکل درونبر دارد و در نتیجه گروه بنیادی این فضا برابر است با ضرب ازاد n تا $\mathbb{Z}$ یا به عبارتی یک گروه ازاد با n مولد.

۲.۳.۱ ابزار بیشتر برای شناخت و محاسبه گروه بنیادی

گزاره ۶۵.۱. اگر X و Y دو فضای همبند مسیری باشند انگاه $\Pi_1(X \times Y) \approx \Pi_1(X) \times \Pi_1(Y)$

اثبات. ایده اثبات تصویر کردن یک مسیر در $X \times Y$ به مسیر ها در X و Y است .از انجا که تابع $h(z) = (f(z), g(z))$ یک تابع پیوسته است اگر و فقط اگر f و g پیوسته باشد،پس می‌توان برای مسیر ها و هوموتوپی ان ها به تصویر ان‌ها در X و Y نگاه کرد و یک هوموتوپی در فضای $X \times Y$ پیدا کرد.

نتیجه ۶۶.۱. گروه بنیادی چنبره T^1 برابر است با $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ زیرا می‌دانیم که $T^1 = S^1 \times S^1$ و با توجه به گزاره قبل می‌دانیم گروه بنیادی $S^1 \times S^1$ برابر است با $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

تعریف ۶۷.۱. نگاشت $F : S \to T$ که بین دو فضای توپولوژیک است را ناسره گوییم هرگاه برای هر مجموعه فشرده $K \subset T$ مجموعه $F^{-1}(K)$ هم فشرده باشد.

نتیجه ۶۸.۱. هر نگاشت موضعا یکسان‌ریخت ناسره،یک فضای پوششی متناهی برگ است.توجه کنیم که هر نگاشت موضعا یکسان‌ریخت لزوما یک فضای پوششی نیست.اما شرط ناسره بودن نه تنها وجود یک پوشش باز را تضمین می‌کند که تصویر وارون ان اجتماع مجزایی از باز هاست،بلکه تضمین می‌کند که تصویر وارون ان اجتماع متناهی تا از باز هاست.

در بخش نهایی فصل اول این پروژه به بیان قضیه‌ای مهم در توپولوژی جبری می‌پردازیم که سنگ بنای ساخت رویه ریمانی جدید و نگاشت همانند ساز فضای پوششی و در نهایت قضیه وجود ریمان است.

قضیه ۶۹.۱. به ازای توپولوژیک X،یک فضای پوششی برای X چنان موجود است مثل $p : \tilde{X} \to X$ که $\Pi_1(\tilde{X}) = 0$.

اثبات. اثبات ساختنی است.بنابراین باید یک فضای توپولوژیک و یک نگاشت مثل $P : \tilde{X} \to X$ تعریف کنیم که یک فضای پوششی برای X تعریف کنید.حال نقطه x_0 فضای توپولوژیک $\tilde{X}$ را تعریف کنید

$$\tilde{X} = \{[\gamma]; \gamma \; is \; a \; path \; starting \; from \; x_0\} \quad (۶.۱)$$

و نگاشت $p : \tilde{X} \to X$ را در نظر بگیرید که $p([\gamma]) = \gamma(1)$. حال محموعه های زیر را به عنوان پایه ای برای توپولوژی رو $\tilde{X}$ معرفی می‌کنیم. $U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta]; \eta \; is \; a \; path \; with \; \eta(0) = \gamma(1)\}$ می‌توان در کتاب $HATCHER$ با جزییات دید که چرا محموعه های فوق یک توپولوژی روی $\tilde{X}$ تعریف می‌کنند.حال ایده اثبات بدیهی بودن گروه $\Pi_1(\tilde{X})$ را بررسی می‌کنیم. کافی است یک هوموتوپی برای هر طوقه درون $\tilde{X}$ بیابیم. بدین منظور یک رفت و برگشت از $\tilde{X}$ به X توسط نگاشت p را بررسی کنیم و می‌بینیم که هر طوقه درون $\tilde{X}$ با طوقه ثابت در X یکی است و با استفاده از نگاشت القایی $p_* : \Pi_1(\tilde{X}) \to \Pi_1(X)$ می‌توان نشان داد که طوقه دلخواه،هوموتوپ با طوقه بدیهی بوده است.

در این حالت نشان دادیم که متناظر با زیر گروه بدیهی گروه $\Pi_1(X)$ یک فضای توپولوژیک موجود است.حال ادعا می‌کنیم به ازای هر زیرگروه $\Pi_1(X)$ یک فضای پوششی مثل $p : \tilde{X} \to X$ موجود است که $p_*(Pi_1(X))$ یکریخت با ان زیرگروه است.حال به بیان دقیق صورت گزاره می‌پردازیم

قضیه ۷۰.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک همبند مسیری،موضعا همبند مسیری و همبند ساده نیمه موضعی باشد.در این صورت برای هر زیرگروه $H \subset \Pi_1(X)$ یک فضای پوششی مانند $p : X_H \to X$ چنان موجود است که $p_*(\Pi_1(X_H)) \approx H$.

اثبات. زیرگروه H از گروه $\Pi_1(X)$ و فضای پوششی $\tilde{X}$ که در بخش قبل ساختیم را در نظر بگیریم.می‌خواهیم یک رابطه هم‌ارزی روی فضای $\tilde{X}$ تعریف کنیم. رابطه $\sim$ را چنان در نظر بگیرید که :

$$[\gamma] \sim [\gamma'] \iff [\gamma(\gamma')^{-1}] \in H \tag{۷.۱}$$

از انجا که H یک زیرگروه $\Pi_1(X)$ است به سادگی می‌توان نشان داد که رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی است. در نتیجه فضای توپولوژیک X_H را برابر با افراز $\tilde{X}$ بر رابطه $\sim$ باشد.به عبارت دیگر باز های X_H همان باز های $\tilde{X}$ هستند که $U_[\gamma] \sim U_[\gamma']$ اگر و فقط اگر $[\gamma] \sim [\gamma']$. خوش تعریفی توپولوژی تعریف شده به سادگی قابل چک شدن است. نگاشت فضای پوششی را همانند نگاشت تعریف شده در قسمت قبل تعریف می‌کنیم.تنها باید ثابت کنیم که $Im(p_*(X_H)) = H$. دلیل درستی گزاره بالا این است که تصویرِ تصویر وارون یک طوقه در X، یک طوقه در X است هرگاه طوقه هوموتوپ با طوقه ثابت باشد.به عبارت دیگر اگر γ طوقه مذکور باشد انگاه $p^{-1}(\gamma)$ یک طوقه است هرگاه $[c] \sim [\gamma]$ باشد.که معادلا به این معناست که $H \ni [\gamma]$ باشد و حکم ثابت می‌شود.

حال تمام مقدمات لازم برای شروع تئوری رویه های ریمانی را داریم.با استفاده از قضایا و لم های بیان شده در این فصل در گام نخست می‌خواهیم چند رویه ریمانی بسازیم.

فصل ۲

رویه های ریمانی،تعریف و نگاشت بین ان‌ها

در این بخش ابتدا تعریفی از رویه های ریمانی ارائه می‌دهیم سپس چند مثال از این رویه ها و نحوه ساخت یک رویه ریمانی می‌زنیم.از این مثال‌ها در طول این نوشته استفاده خواهد شد و بررسی ان‌ها مهم است.
در نیمه دوم این فصل به بررسی نگاشت های بین دو رویه ریمانی خواهیم پرداخت و با استفاده از دو رویه ریمانی و نگاشت بین ان‌ها یک رویه ریمانی جدید با خواص بیشتر،خواهیم ساخت.برای مطالعه کامل تر و دقیق تر به [۳] مراجعه کنید

۱.۲ تعریف یک رویه ریمانی

تعریف ۱.۲. فضای توپولوژیک X را یک رویه ریمانی گوییم هرگاه

۱. فضای توپولوژیک X هاسدورف باشد

۲. مجموعه های باز U_α چنان موجود باشند که $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$

۳. برای هر α یکسان‌ریختی $\psi_\alpha : U_\alpha \to \tilde{U}_\alpha$ چنان موجود باشد که $\tilde{U}_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ باشد و برای هر α و β نگاشت $\psi_\alpha o \psi_\beta^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ یک نگاشت **مشتق‌پذیر** و در نتیجه تحلیلی باشد.

تذکر ۲.۲. چند تذکر درباره تعریف فوق

۱. بطور دقیق تر، توابع $\psi_\alpha o \psi_\beta^{-1} : V_{\alpha,\beta} \to V_{\beta,\alpha}$ هستند که $V_{\alpha,\beta} = \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ و $V_{\beta,\alpha} = \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ هستند که $V_{\alpha,\beta}$ و $V_{\beta,\alpha}$ هردو زیرمجموعه های باز $\mathbb{C}$ هستند

۲. به نگاشت های ψ_α **چارت** یا **چارت های مختصاتی** گوییم و به سه تایی های $(U_\alpha, \tilde{U}_\alpha, \psi_\alpha)$ یک **اطلس** گوییم.

۳. در اثبات احکام مربوط به رویه های ریمانی باید توجه کنیم که خاصیت بیان شده باید مستقل از انتخاب چارت ها باشد.پس برای اثبات احکام،اگر چارتی به دلخواه انتخاب شود باید نشان داده شود که این حکم وابسته به انتخاب مختصات نیست.

۴. در تعریف رویه ریمانی اگر بجای شرط مشتق‌پذیر شروط دیگر همچون هموار بودن یا هموار با ژاکوبی مثبت قرار دهیم به ترتیب به تعاریف رویه هموار و رویه هموار جهت‌پذیر می‌رسیم.توجه کنید که ثابت می‌کنیم که هر رویه ریمانی یک رویه جهت‌پذیر است.در فصل بعد احکامی برای رویه های هموار یا جهت‌پذیر ارائه می‌دهیم و با توجه به این نکته می‌دانیم که احکام بیان شده برای رویه های ریمانی نیز برقرار است.

گزاره ۳.۲. هر رویه ریمانی یک رویه هموار جهت پذیر است.

اثبات. نشان می‌دهیم شرط مشتق‌پذیر بودن دو مختصات دلخواه $\psi o\phi$ شرط ژاکوبی مثبت را ارضا می‌کند و بدین ترتیب حکم اثبات می‌شود.ابتدا ماتریس ژاکوبی یک رویه ریمانی را تشکیل می‌دهیم و نشان می‌دهیم که دترمینان این ماتریس مثبت است. فرض کنیم چارت مختصات $\phi : V \to \tilde{V}$ چنان باشد که $\phi(p) = z(p) = (x(p), y(p))$ و چارت مختصات $\psi : V' \to \tilde{V'}$ بطوریکه $\psi(p) = Z(P) = (X(p), Y(P))$. در اینصورت با حساب ماتریس ژاکوبی تابع مشتق‌پذیر $\psi o\phi^{-1}$ برحسب چارت های مختصات داریم

$$Jac_{\phi(p)}(\psi o\phi^{-1}) = \begin{pmatrix} \partial X/\partial x & \partial X/\partial y \\ \partial Y/\partial x & \partial Y/\partial y \end{pmatrix} \tag{۱.۲}$$

با توجه به فرض تابع $\psi o\phi^{-1}$ مشتق‌پذیر و در نتیجه تحلیلی است و روابط کوشی-ریمان برقرار است.روابط کوشی ریمان بیان می‌کند که

$$\partial X/\partial x = \partial Y/\partial y \tag{۲.۲}$$

و

$$\partial X/\partial y = -\partial Y/\partial x \tag{۳.۲}$$

حال با حساب دترمینان ماتریس بالا و روابط کوشی-ریمان داریم

$$(\partial X/\partial x)^2 + (\partial Y/\partial x)^2 \tag{۴.۲}$$

و از انجا این مقادیر حقیقی مقدارند پس عبارت بالا همواره مثبت است و حکم ثابت شد.

تعریف ۴.۲. فرض کنید X یک رویه ریمانی با اطلس $(U_\alpha, \tilde{U}_\alpha, \psi_\alpha)$ و Y یک رویه ریمانی با اطلس $(V_i, \tilde{V}_i, \phi_i)$ موجود است.نگاشت $F : X \to Y$ را یک نگاشت مشتق‌پذیر از رویه های ریمانی گوییم هرگاه برای هر α و i نگاشت های $\phi_i o f o\psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_i)) \to \tilde{V}_i$ نگاشت های مشتق‌پذیری باشند.

تعریف ۵.۲. دو رویه ریمانی X و Y باهم هم‌ارزند هرگاه یک نگاشت وارون‌پذیر مانند $f : X \to Y$ چنان موجود باشند که f و f^{-1} هردو متشق‌پذیر باشند.

۱.۱.۲ مثال هایی از رویه های ریمانی

این بخش علاوه بر اینکه تمرینی برای بررسی ریمانی بودن مجموعه های ذکر شده است،از این جهت مهم است که رویه ریمانی را بررسی می‌کنیم که در طول این پروژه به دفعات به ان ها و نحوه ساخت ان ها بازخواهیم گشت.

تذکر ۶.۲. قابل ذکر است که هر زیرمجموعه باز $\mathbb{C}$ با اطلس های همانی یک رویه ریمانی به حساب می‌ایند.

مثال ۷.۲. **کره ریمان** می‌خواهیم نشان دهیم که S^2 یک رویه ریمانی است. نخست باید یک توپولوژی روی S^2 تعریف کنیم که S^2 هاسدورف باشد.می‌دانیم که طبق تصویر کنج نگاشتی یکسان‌ریختی $f : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ برقرار است.در نتیجه باز های S^2 از تصویر باز های $\mathbb{C}$ تحت یکسان‌ریختی بالا هستند یا تصویر $(\mathbb{C} - K) \cup \{\infty\}$ که K فشرده باشد تحت یکسان ریختی بالا است.در نتیجه S^2 تحت توپولوژی تعریف شده در بالا هاسدورف است.حال پوششی باز برای S^2 معرفی می‌کنیم. حال تعریف کنید $U_0 = f^{-1}(V_0)$ و $U_1 = f^{-1}(V_1)$ که $V_0 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 2\}$ و $V_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1/2\} \cup \{\infty\}$ باشد. در اینصورت داریم $\tilde{U_0} = \tilde{U_1} = V_0$ و چارت های مختصاتی برابر با $\psi_0 = id|_{U_0}$ و $\psi_1(z) = 1/z$ که هردوی این توابع روی دامنه $1/2 < |z| < 2$ تعریف می‌شوند.به سادگی می‌توان دید که $\psi_0 o \psi_1^{-1}$ و $\psi_1 o \psi_0^{-1}$ روی دامنه شان تحلیلی است.پس S^2 با این اطلس ها یک رویه ریمانی است.

می‌خواهیم نشان دهیم که خم‌های جبری به عنوان فضای توپولوژیک یک رویه ریمانی است.بدین منظور ابتدا قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۸.۲. فرض کنید $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}; P(z, w) = 0\}$ که $P(z, w)$ چند جمله‌ای باشد. نقطه (z_0, w_0) را در نظر بگیرید که $\partial P/\partial z|_{(z_0,w_0)} \neq 0$ و $\partial P/\partial w|_{(z_0,w_0)} \neq 0$ باشد.انگاه دیسک D_1 با مرکز z_0 در $\mathbb{C}$ و
دیسک D_2 با مرکز w_0 در $\mathbb{C}$ و نگاشت تحلیلی $\phi : D_1 \to D_2$ چنان موجود است که $\phi(z_0) = w_0$ و

$$X \cap (D_1 \times D_2) = \{(z, \phi(z)); z \in D_1\}. \tag{۵.۲}$$

.

اثبات. ابتدا تعریف کنیم $f_{z_0}(w) = P(z_0, w)$ باشد.از انجا که P چند جکله ای و در نتیجه تحلیلی است پس f_{z_0} هم همین وضعیت را دارد. حال بنابر گزاره ۴۲.۱ میدانیم که $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'_{z_0}(w)}{f_{z_0}(w)} dz = N_0$ زیرا تابع f_{z_0} تحلیلی است و در نتیجه قطب ندارد.حال بنا بر فرض از انجا که $f'_{z_0}(w_0) \neq 0$ پس دیسکی مثل D_2 به مرکز w_0 وجود دارد که f_{z_0} روی ان ریشه ای بجز w_0 ندارد.در نتیجه δ چنان موجود است که برای هر $w \in \mathbb{C}$ رابطه $|f(z)| > \delta$ برقرار است. حال دریافتیم که اگر $z = z_0$ باشد. تابع f_{z_0} یک ریشه دارد.با توجه به پیوستگی برحسب z برای z های نزدیک به z_0،تابع f_z یک ریشه دارد.بنابر رابطه ۴۲.۱ این ریشه از رابطه $w_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_2} \frac{w f'_z(w)}{f(w)}$ بدست می‌اید.حال با جایگذاری P بجای f_z بدست می‌اید:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_2} \frac{w}{P}\frac{\partial P}{\partial w} dw \tag{۶.۲}$$

و با چنین تعریف کردن تابع ϕ حکم اثبات می‌شود.

مثال ۹.۲. خم های جبری

۱. **خم های جبری آفین**

نخست حالت آفبن را بررسی می‌کنیم.فرض کنیم P یک چندجمله ای از ۲ متغیر با ضرایب اعداد مختلط باشد.همچنین فرض کنیم که $\partial P/\partial z$ و $\partial P/\partial w$ هردو همزمان صفر نمی‌شوند.با نمادگذاری قضیه قبل،میخواهیم نشان دهیم که X یک رویه ریمانی است.ابتدا فرض کنید در نقطه (z_0, w_0) مشتقات جزیی P ناصفر است.پس بنا بر قضیه قبل دیسک های D_1 و D_2 و نگاشت مشتق‌پذیر $\phi : D_1 \to D_2$ چنان موجودند که $X \cap (D_1 \times D_2) = \{(z, \phi(z)); z \in D_1\}$ حال برای هر نقطه که $\partial P/\partial w$ ناصفر باشد تعریف کنیم $U_\alpha = X \cap (D_1 \times D_2)$ و نگاشت ψ_α را نگاشت تصویر به مولفه اول قرار دهیم. حال اگر در نقطه ای $\partial P/\partial w$ برابر صفر شود طبق فرض می دانیم $\partial P/\partial z$ ناصفر است و بنابر قضیه بالا دیسک های B_1 و B_2 به همراه نگاشت تحلیلی $g : B_2 \to B_1$ موجود است بطوریکه $X \cap (B_1 \times B_2) = \{(g(w), w); w \in B_2\}$ و در این حالت نیز تعریف کنیم $U_\alpha = X \cap (B_1 \times B_2)$ و نگاشت ψ_α برابر تصویر U_α بر مولفه دوم باشد. با تعزیف توپولوژی زیرفضایی روی X، این فضا هاسدورف است و با تعاریف فوق و با توجه به تحلیلی بودن نگاشت های g و ϕ،نگاشت های ψ_α نیز یکسان‌ریختی هستند.همچنین واضح است که برای فضای X یک پوشش باز ارائه دادیم.تنها باید مشتق‌پذیر بودن نگاشت های $\psi_\beta o \psi_\alpha^{-1}$ روی اشتراک ها بررسی کنیم.اگر روی اشتراک، هردو چارت از نوع اول یا دوم باشد تابع بالا به سادگی تابع همانی است و اگر این دو چارت مختصاتی از انواع متفاوتی باشند داریم

$$z \to (z, \phi(z)) \to \phi(z) \tag{۷.۲}$$

و با توجه به تحلیلی بودن نگاشت ϕ حکم ثابت می‌شود.

۲. **خم های جبری تصویری**

در این حالت فرض می‌کنیم که $P(Z_1, Z_2, Z_3)$ یک چند جمله‌ای همگن در $\mathbb{C}P^2$ است که تنها جواب مشترک معلادلات $P, \partial/\partial Z_1, \partial/\partial Z_2, \partial/\partial Z_3 = 0$ برابر $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ باشد.می‌دانیم که در فضای تصویری $\mathbb{C}P^2$ هیچگاه همه مولفه های یک نقطه برابر صفر نیست.پس هر نقطه در چندجمله‌ای را می‌توان ب یکی از سه صورت $P(1, \frac{Z_2}{Z_1}, \frac{Z_3}{Z_1})$ ، $P(\frac{Z_1}{Z_2}, 1. \frac{Z_3}{Z_2})$ یا $P(\frac{Z_1}{Z_3}, \frac{Z_1}{Z_3}, 1)$ نوشت که این‌ها چندجمله‌ای هایی در $\mathbb{C}^2$ هستند.از فرض می‌دانیم که در هریک از این ها چندجمله‌ای ها هردو مشتقات جزیی برابر صفر نیست.در نتیجه به برای هر سه این چندجمله‌ای ها شرایط حالت افین برقرار است.در نهایت با اجتماع گرفتن به مطلوب دست خواهیم یافت.

مثال ۱۰.۲. فضاهای خارج قسمتی گروه $2\pi\mathbb{Z}$ را به عنوان زیرگروهی از $\mathbb{C}$ درنظر بگیرید.حال فضای خارج قسمتی $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ را با توپولوژی خارج‌قسمتی در نظر بگیرید.می‌دانیم که این فضا با فضای توپولوژیک یک استوانه به فرم $S^1 \times \mathbb{R}$ یکسان‌ریخت است.نشان می‌دهیم که استوانه مذکور یک رویه ریمانی است.نقطه z درون صفحه مختلط را در نظر بگیرید.دیسک های D_z با مرکز z و شعاع $1/2$ را درنظر بگیرید.نگاشت خارج قسمتی $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ را درنظر بگیرید.از انجا که $1/2 < \pi$ است،نگاشت π دیسک های D_z را

بصورت یک به یک به فضای خارج‌قسمتی $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ تصویر می‌کند.پس با تعریف $U = \pi(D_z)$ و $\tilde{U} = D_z$ یک پوشش باز برای $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ بدست می‌اوریم.همچنین نگاشت‌های ψ را وارون نگاشت π در دامنه های یک به یک قرار دهید.درنتیجه این نگاشت ها،برای مقادیر مناسب n برابرند با $\pi(z) = z + 2\pi n$ که n یک مقدار صحیح است.باتوجه به یک به یک بودن بوضوح این نگاشت های مشتق‌پذیر هستند و از انجا که وارون ان‌ها نگاشت های شمول هستند و مشتق‌پذیرند،ترکیب این دو نگاشت هم تحلیلی است و این یک رویه ریمانی تشکیل می‌دهد.

در حالت کلی تر اگر

$$\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\lambda \quad ; Im(\lambda) > 0 \tag{۸.۲}$$

یک مشبکه یا معادلا یک گروه جمعی گسسته روی $\mathbb{C}$ باشد، انگاه $\mathbb{C}/\Lambda$ یک رویه ریمانی است و ساختن ان نیز مشابه ساختن رویه ریمانی $S^1 \times \mathbb{R}$ است.به این صورت که دیسک های D_z را،دیسک هایی با مرکز z و شعاع r چنان درنظر بگیرید که $2r < min_{n,m}|n + m\lambda|$. دلیل در نظر گرفتن این شعاع این است نگاشت خارج قسمتی $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ تصاویر دیسک های D_z را به صورت یک به یک به فضای خارج قسمتی تصویر کند.مشابه بالا می‌توان نشان داد که $\mathbb{C}/\Lambda$ یک رویه ریمانی است. قابل ذکر است که هرگاه مشبکه Λ توسط عنصری با دو مولد تولید شود یکسان‌ریخت با چنبره T^1 است.

۲.۲ نگاشت بین رویه های ریمانی و خواص ابتدایی

هدف این بخش معرفی درجه یک نگاشت بین دو رویه ریمانی و پایه ریزی مفهوم $divisor$ است و در انتهای یک نتیجه جالب درباه انواع خاصی از رویه های ریمانی فشرده می‌کنیم. فکر کردن به نگاشت به دو رویه ریمانی،نشأت گرفته از دو لم است که در فصل اول ان‌ها را بیان کردیم.این دو لم پایه‌گذار مفاهیم اساسی مربوط به نگاشت بین دو رویه ریمانی است.نخست به یاداوری این دو لم می‌پردازیم.

لم ۱۱.۲. فرض کنید f یک نگاشت مشتق‌پذیر و در نتیجه تحلیلی، روی یک همسایگی 0 مانند U باشد.همچنین فرض کنید $f(0) = 0$ و همچنین $f'(0) \neq 0$ باشد.در این‌صورت همسایگی $V \subset U$ حول 0 چنان موجود است که $f(V) \subset \mathbb{C}$ یکسان‌ریخت با U است و همچنین وارون نگاشت f نیز تحلیلی است

اثبات. این لم نتیجه مستقیم قضیه ۴۸.۱ (قضیه تابع وارون) است.

حال لم ۲۵.۱ را نیز نیاز داریم.ان را بازنویسی می‌کنیم

لم ۱۲.۲. گر تابع تحلیلی f روی D در نقطه z_0 دارای صفر از مرتبه n باشد تابع تحلیلی g چنان که $f(z) = g(z)^n$ و $g'(z_0) \neq 0$

با کمک این دو لم توصیف کامل و دقیقی از رفتار موضعی یک نگاشت میان دو رویه ریمانی همبند بدست می‌اید.این نتیجه را با گزاره ای بیان می‌کنیم.

گزاره ۱۳.۲. فرض کنید X و Y دو رویه ریمانی همبند و نگاشت $F : X \to Y$ یک نگاشت غیرثابت و مشتق‌پذیر باشد.در اینصورت برای هرنقطه x در X یک عدد صحیح k_x وجود دارد به طوری که می‌توان چارت های حول x را توسط F به چارت های حول $F(x)$ با تصویر کرد بطوریکه $F(z) = z^k$.

بهتر است صورت گزاره را کمی واضح تر کنیم.
فرض کنیم اطلس $(U, \tilde{U}, \psi)$ اطلسی حول x و اطلس $(V, \tilde{V}, \phi)$ اطلسی حول $F(x)$ باشد.با این شرایط منظور از $z \mapsto z^k$ این است که به نگاشت F را به عنوان نگاشتی مانند $\tilde{U} \to \tilde{V}$ ببینیم.درواقع اینجا منظور از نگاشت F نگاشت $\phi o F o \psi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ است که این نگاشت روی دامنه تعریفش با ضابطه $z \mapsto z^k$ تعریف می‌شود.

اثبات. با توجه به توضیحات و نمادگذاری بالا تعریف کنیم $f = \phi o F o \psi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ حال بنابر لم ۱۲.۲ می‌دانیم که f را می‌توان بصورت g^k نمایش داد و با توجه به اینکه $g'(z) \neq 0$ است می‌توان طبق لم ۱۱.۲ یک چارت یکسان‌ریخت مثل $(V, \tilde{V}, \phi)$ توسط g با U و $\tilde{U}$ پیدا کرد بطوریکه $g^k(U) = V$. و حکم ثابت شد.

حال نیازمند یاپاوری تعریف نگاشت ناسره هستیم.بدین منظور به تعریف ۶۵.۱ مراجعه کنید.

تذکر ۱۴.۲. اگر S یک فضای توپولوژیک فشرده باشد هر نگاشت پیوسته مثل $F : S \to T$ یک نگاشت ناسره است زیرا تصویر وارون هر محموعه فشرده یک زیر مجموعه بسته از S است.و بدین ترتیب فشرده نیز می‌باشد

تعریف ۱۵.۲. به یک زیرمجموعه Δ از فضای توپولوژیک S گسسته گوییم هرگاه برای هر نقطه مثل $\delta \in \Delta$ یک همسایگی U چنان موجود باشد که $\Delta \cap U = \{\delta\}$

گزاره ۱۶.۲. فرض کنید $F : X \to Y$ یک نگاشت بین دو رویه ریمانی همبند باشد. انگاه

۱. اگر $R \subset X$ مجموعه نقاطی باشند که $k_x > 1$ انگاه R یک محموعه گسسته است

۲. اگر F ناسره باشد انگاه $\Delta = F(R)$ نیز گسسته است

۳. اگر F ناسره باشدانگاه برای هر $y \in Y$ تصویر وارون $F^{-1}(y)$ متناهی است.

اثبات. اثبات ها ساده و کوتاه هستند. مورد اول از این نتیجه می‌شود که بنا بر گزاره ۱۳.۲با توجه به ضابطه نگاشت F بصورت z^k است و در نتیجه R برابر است با نقاطی که مشتق را صفر می‌کند و این طبق لم ۲۴.۱ مجموعه صفر های یک تابع تحلیلی یک مجموعه گسسته است و حکم اول ثابت شد.
حکم دوم و سوم از تعریف نگاشت ناسره به سادگی نتیجه می‌شوند

تعریف ۱۷.۲. به R در تعریف بالا نقاط بحرانی یا نقاط منشعب کننده گویند.و همچنین به مجموعه $F(R)$ نیزمقادیر بحرانی گوییم.

تعریف ۱۸.۲. فرض کنید $F : X \to Y$ یک نگاشت ناسره،غیرثابت و مشتق‌پذیر بین دو رویه ریمانی همبند است. در اینصورت برای $y \in Y$ دلخواه تعریف کنیم

$$d(y) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} k_x \tag{۹.۲}$$

که به $d(y)$ درجه F در y گویند.

تذکر ۱۹.۲.

این مقدار یک مقدار متناهی و خوش‌تعریف است.زیرا بنابر مورد سوم گزاره بالا این هریک از مقادیر k_x متناهی و همچنین تعداد متناهی تا جمع روی ان‌ها صورت می‌گیرد. و در نتیجه این مقدار خوش‌تعریف است.

اگر $y \notin \Delta$ در نتیجه مقدار $d(y)$ برابر است با تعداد نقاطی که در مجموعه $F^{-1}(y)$ هستند.در حالت کلی به $d(y)$ تعداد نقاط در $F^{-1}(y)$ با شمارش مرتبه گوییم.

گزاره ۲۰.۲. فرض کنید $F : X \to Y$ یک نگاشت ناسره،غیرثابت و مشتق‌پذیر بین دو رویه ریمانی همبند باشد.در اینصورت مقدار $d(y)$ به انتخاب نقطه y وابسته نیست.

اثبات. ایده اثبات این است که حکم را برای y های نزدیک بهم ثابت کنیم وسپس از همبند بودن استفاده کنیم تا حکم را برای هر y ثابت کنیم. نخست $y \in Y$ را فیکس می‌کنیم.حال چارت هایی حول نقاط $x \in F^{-1}(y)$ انتخاب می‌کنیم و نام ان‌هارا U_x می‌گذاریم.مطابق اثبات گزاره ۱۳.۲ چارت های متناظر V_x را پیدا می‌کنیم که یک مجموعه باز است(بنا بر ناسره بودن نگاشت F).روی هریک از چارت U_x تابع F بصپرت $z \mapsto z^{k_x}$ توصیف می‌شود.حال قرار می‌دهیم $V = \bigcap_x V_x$. نقطه $y' \in V$ را انتخاب می‌کنیم و همین روند را تکرار می‌کنیم.از انجا که $F^{-1}(V) \subset \bigcup U_x$ پس انتخاب اطلس ها همانند نقطه y صورت می‌گیرد و در نتیجه $d(y) = d(y')$ است.پس عدد $d(y)$ بطور موضعی ثابت است.از انجا که Y همبند است پس عدد $d(y)$ روی نمام Y ثابت است و حکم ثابت می‌شود.

تذکر ۲۱.۲. با توجه به توضیحات بالا درجه یک نگاشت مشتق‌پذیر بین دو رویه ریمانی همواره ثابت است و زین‌پس می‌توانیم از لفظ درجه نگاشت F ،بجای درجه نگاشت F در نقطه y استفاده کنیم

تعریف ۲۲.۲. نگاشت F را یک تابع مرومورفیک روی یک رویه ریمانی گوییم هرگاه تصویر این نگاشت روی کره ریمان همواره برابر با ∞ نباشد.روی چارت های متفاوت این رویه ریمانی این تعریف مطابق با تعریف تابع مرومورفیک در انالیز مختلط است.
قطب های تابع F برابر است با مجموعه $F^{-1}(\infty)$ و اگر x یک قطب باشد،مرتبه ان قطب برابر است با k_x.

در انتهای این فصل یکی از نتایج جالب این تعاریف را اثبات می‌کنیم. از مطالب این فصل،با کمک مطالب فصل سوم،احکام جالبی درباره طبقه‌بندی رویه های ریمانی فشرده استفاده خواهیم کرد که این اولینِ ان‌هاست.

نتیجه ۲۳.۲. فرض کنیم X یک رویه ریمانی فشرده و همبند باشد و اگر یک نگاشت مرومورفیک روی X دقیقا با یک قطب موجود باشد و مرتبه ان قطب برابر یک باشد انگاه X هم‌ارز با کره ریمان است.

اثبات. فرض کنید نگاشت $F : X \to S^2$ را یک نگاشت مرومورفیک باشد.طبق فرض X فشرده است پس F ناسره است.حال از انجا طبق تعریف قطب،مرتبه قطب همان درجه نگاشت است،با درنظر گرفتن $y = \infty$ در می‌یابیم که درجه نگاشت F برابر یک است.حال بنابر گزاره ۲۰.۲،می‌دانیم که برای هر y، $F^{-1}(y)$ یک مجموعه تک عضوی مثل $\{x\}$ است که $k_x = 1$. در نتیجه نگاشت F یک به یک و پوشا است.بنا بر ناسره بودن می‌دانیم که وارون F نیز پیوسته است زیرا تصویر بسته ها در S^2 بسته اند و بنابر لم ۱.۲ وارون این نگاشت مشتق‌پذیر است.درنتیجه F یک همسان‌ریختی بین رویه های ریمانی است و حکم ثابت شد.

فصل ۳

حساب روی رویه ها

در این فصل به معرفی **فرم های دیفرانسیل** روی رویه های هموار و رویه‌های هموار جهت‌پذیر می‌پردازیم. بنابر گزاره ۳.۲ می‌دانیم که هر رویه ریمانی یک رویه هموار جهت‌پذیر و در نتیجه یک رویه هموار می‌باشد.بنابراین تمام احکام بیان شده برای رویه های ریمانی نیز معتبر هستند. فرم های دیفرانسیل ابزار اصلی ما برای اثبات قضایای مهم و بنیادی رویه های ریمانی هستند و در این فصل از پروژه قصد داریم کار کردن با ان‌ها و احکام مربوط به ان‌ها را مطالعه کنیم. برای ساخت فضای فرم های دیفرانسیل ابتدا به مطالبی از جبرخطی نیاز داریم.برای مطالعه دقیق تر به [۳] مراجعه کنید.

۱.۳ فضای مماس،هم‌مماس و ۱-فرم ها

۱.۱.۳ تعریف ها و مشتق‌گیری از ۱-فرم ها

تعریف ۱.۳. اگر V یک فضای برداری باشد و $f : V^k \to \mathbb{R}$ باشد،گوییم تابع f چند خطی است هرگاه $f(..., av + bw, ...) = af(..., v, ...) + bf(..., w, ...)$. به عبارتی هرگاه f نسبت به تمام مولفه ها خطی باشد گوییم تابع f چند خطی است.

تعریف ۲.۳. گوییم $\sigma \in S_k$ زوج است هرگاه طول σ زوج باشد و فرد است هرگاه طول σ فرد باشد و بالعکس همچنین تابع $sgn(\sigma)$ را تعریف می‌کنیم

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ زوج باشد} \\ -1, & \sigma \text{ فرد باشد} \end{cases} \tag{۱.۳}$$

تعریف ۳.۳. تابع چند خطی $f : V^k \to \mathbb{R}$ را جایگشتی گوییم هرگاه برای هر $\sigma \in S_k$ رابطه $f(v_1, ..., v_k) = f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)})$ برقرار باشد
و این تابع را متناوب گوییم هرگاه $f(v_1, ..., v_k) = sgn(\sigma)f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)})$ برقرار باشد.مجموعه توابع چندخطی را با $A_k(V)$ نشان می‌دهیم

تعریف ۴.۳. فرض کنید $f \in A_k(V)$ و $g \in A_l(V)$ باشد. جمع گوه‌ای f و g را تعریف می‌کنیم :

$$f \wedge g = \sum_{\sigma \in S_k + l} sgn(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(v+l)}) \tag{۲.۳}$$

که $f \wedge g$ عضوی از $A_k + l(V)$ است.

مثال ۵.۳. اگر $k = l = 1$ باشد جمع گوه ای f و g بصورت زیر محاسبه می‌شود
$f \wedge g = \sum_{\sigma \in S_2} f(v_\sigma(1)) g(v_\sigma(2)) = f(v_1)g(v_2) - f(v_2)g(v_1)$

تعریف ۶.۳. تابع $F : X \to Y$ را یک دیفئومورفیسم گوییم هرگاه F و وارون ان هردو مشتق‌پذیر و یکسان‌ریختی باشند

لم زیر بیان می‌کند که تحت یک دیفئومورفیسم مقادیر مشتقات جزیی و در نتیجه مشتق توابع ثابت می‌ماند

لم ۷.۳. فرض کنید $f : U \to \mathbb{R}$ یک تابع هموار و روی یک همسایگی باز 0 مثل $U \subset \mathbb{R}^2$ تعریف شده باشد و فرض کنید $\gamma_1 : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \to U$ و $\gamma_2 : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \to U$ یک مسیر هموار باشد بطوریکه $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$. در اینصورت اگر $\psi : U \to V$ یک دیفئومورفیسم باشد که $V \subset \mathbb{R}^2$ و تعریف کنیم $\tilde{\gamma_i} = \psi o \gamma_i$ و $\tilde{f} = f o \psi^{-1}$ داریم :

۱. اگر $\partial f/\partial x_1(0) = \partial f/\partial x_2(0) = 0$ انگاه $\partial \tilde{f}/\partial x_1(0) = \partial \tilde{f}/\partial x_2(0) = 0$

۲. اگر $d\gamma_1/dt = d\gamma_2/dt$ انگاه $d\tilde{\gamma_1}(0)/dt = d\tilde{\gamma_2}(0)/dt$

اثبات. اثبات با توجه به قاعده زنجیری به سادگی قابل انجام است.کافیست از توابع بالا طبق قاعده زنجیری مشتق‌گیری کنیم.

تعریف ۸.۳. گوییم تابع f در نقطه p ثابت از مرتبه اول است هرگاه مشتق تصویر تابع f درون یک چارت در نقطه p برابر با صفر شود. و همچنین گوییم توابع γ_1 و γ_2 در نقطه p از مرتبه اول باهم برابرند هرگاه مشتقات توابع متناظر ان‌ها در چارت حول p باهم برابر باشند.

تعریف ۹.۳. **فضای مماس** صفحه هموار S را با TS_p نمایش می‌دهیم و برابر است با کلاس هم‌ارزی تمام مسیر های $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ بطوریکه $\gamma(0) = p$ تحت رابطه هم‌ارزی $\sim$ که $\gamma_1 \sim \gamma_2$ اگر و فقط اگر γ_1 و γ_2 از مرتبه اول باهم برابر باشند.
فضای هم‌مماس فضای هم‌مماس T^*S_p برابر است مجموعه کلاس هاس هم‌ارزی تمام توابع هموار روی یک همسایگی باز p که گوییم $f_1 \sim f_2$ هرگاه $f_1 - f_2$ ثابت از مرتبه اول باشد.یا معادلا

$$f_1 \sim f_2 \iff \partial \tilde{f}_1/\partial x_i - \tilde{f}_2/\partial x_i = 0 \tag{۳.۳}$$

حال با توجه به تعریف یک نگاشت از مجموعه توابع مشتق‌پذیر روی U به T^*S_p داریم بطوریکه این نگاشت بصورت $f\mapsto [df]_p$ عمل می‌کند.بطور مثال اگر مختصات حول نقطه p برابر با x_1 و x_2 باشد،می‌دانیم که این توابع،توابعی مشتق‌پذیر و هموار هستند.در نتیجه $[dx_1]_p$ و $[dx_2]_p$ عضوی از T^*S_p است.حال از انجا که هر تابع هموار حول p را می‌توان بصورت $f-f(x_1,x_2)$ نمایش داد،با توجه به قاعده زنجیری توابع داریم

$$[df]_p=\frac{\partial f}{\partial x_1}[dx_1]_p+\frac{\partial f}{\partial x_2}[dx_2]_p \tag{۴.۳}$$

نتیجه ۱۰.۳. مجموعه T^*S_p یک فضای برداری با بعد ۲ روی $\mathbb{R}$ است که جمع روی ان از جمع روی توابع مشتق‌پذیر روی S القا شده و پایه ان برابر با مجموعه $\{[dx_1],[dx_2]_p\}$ است.

می‌توان نشان داد که یک‌ریختی میان $T^*S_p\approx Hom(TS_p.\mathbb{R})$ برقرار است.این یک‌ریختی نشأت گرفته از نگاشت $TS_p\times T^*S_p\to\mathbb{R}$ است که خود نگاشت بالای توسط نگاشت مشتق‌گیری القا شده است. از طرف دیگر تعریف می‌کنیم بستار فضای هم‌مماس برابر $T^*S=\bigcup_{p\in S}T^*S_p$ باشد.حال امادگی لازم برای تعریف فرم های دیفرانسیل را داریم.

تعریف ۱۱.۳. **۱-فرم هموار** α یک نگاشت $\alpha:S\to T^*S\ ;p\mapsto\alpha(p)$ است که $\alpha(p)\in T^*S_p$ است و برای هر $p\in S$ نگاشت α پیوسته و مشتق‌پذیر است. اگر چارت مختصاتی حول نقطه p برابر با x_1 و x_2 باشد، می‌توان α را بصورت $\alpha=\alpha_1dx_1+\alpha_2dx_2$ نمایش داد که α_1 و α_2 توابعی هموار از x_1 و x_2 است.

تذکر ۱۲.۳. همانطور که در مورد سوم تذکر ۲.۲ اشاره شد باید نشان دهیم که این خواص تحت تغییر چارت مختصاتی نیز ثابت می‌ماند و تغییر نمی‌کند فرض کنیم که چارت مختصاتی دیگری مانند y_1 و y_2 موجود است که x_1 و x_2 را می‌توان برحسب نگاشت هایی هموار از y_1 و y_2 نوشت. در نتیجه با توجه به تعریف ۸.۱ داریم

$$x_i=x_i(y_1,y_2)\Rightarrow dx_i(p)=\partial x_i/\partial y_1(p)+\partial x_i/\partial y_2(p) \tag{۵.۳}$$

حال با توجه به اینکه $\alpha=\alpha_1dx_1+\alpha_2dx_2$ و روابط بالا با جایگذاری dx_i در معادلات بالا داریم

$$\begin{aligned}&\alpha_1(x_1(y_1,y_2),x_2(y_1,y_2))(\partial x_1/\partial y_1(p)+\partial x_1/\partial y_2(p))\\+&\alpha_2(x_1(y_1,y_2),x_2(y_1,y_2))(\partial x_1/\partial y_1(p)+\partial x_1/\partial y_2(p))\end{aligned} \tag{۶.۳}$$

که با جدا کردن ضرایب dy_1 و dy_2 می‌توان دید که این ضرایب توابعی هموار از y_1 و y_2 هستند و حکم ثابت شد. این مثال علاوه بر اینکه برهانی بود برای مستقل بودن تعریف ۱-فرم از چارت های مختصاتی تمرینی بود برای کار کردن با این فرم ها در دستگاه های مختصاتی.

مثال ۱۳.۳. یک دسته بسیار مهم از ۱-فرم ها،دیفرانسیل گرفتن از توابع هموار روی S است.با توجه به تعریف ۸.۱ و معادله ۳.۴ می‌دانیم که $df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$ که با توجه به توضیحات قبل یک ۱-فرم است.

حال می‌خواهیم اگر $F : S \to Q$ یک میان نگاشت های بین دو رویه هموار باشد،چگونه می‌توان از فضای مماس،هم‌مماس و ۱-فرم های S به اطلاعاتی درباره فضای مماس،هم‌مماس و ۱-فرم های Q پی برد و یا بالعکس اگر $F : S \to Q$ یک نگاشت بین دو رویه هموار باشدانگاه نگاشت های القایی F روی فضای مماس و هم‌مماس و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} dF : TS_p &\to TQ_{F(p)} \\ \gamma &\mapsto Fo\gamma \\ dF^*_p : T^*Q_{F(p)} &\to T^*S_p \\ g &\mapsto goF \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

حال همان‌گونه که ۱-فرم هارا براساس فضاهای مماس و هم‌مماس تعریف کردیم حال نیز می‌توانیم ۱-فرم های S را براساس ۱-فرم های Q تعریف می‌کنیم.فرض کنیم α یک ۱-فرم روی Q باشد.در اینصورت عقب‌گرد α را مطابق زیر تعریف می‌کنیم

$$F^*(\alpha)(p) = dF^*(\alpha(F(p))) = \alpha oF(p). \tag{۸.۳}$$

در اینصورت $F^*(\alpha)$ یک ۱-فرم هموار است
حال اماده تعریف نگاشت مشتق هستیم.

تعریف ۱۴.۳. اگر Ω^0_S را مجموعه تمام نگاشت های هموار روی S و Ω^1_S را مجموعه همه ۱-فرم های هموار روی S در نظر بگیریم نگاشت

$$\begin{aligned} d : \Omega^0_S &\to \Omega^1_S \\ f &\mapsto df \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

یک نگاشت خوش‌تعریف است که دارای خواص زیر است

۱. $d(fg) = fdg + gdf$

۲. اگر $F : S \to Q$ یک نگاشت هموار باشد انگاه $d(F^*f) = F^*(df)$ که f یک نگاشت هموار روی Q است و $F^*(f) = foF$.

۲.۱.۳ انتگرال‌گیری از ۱-فرم ها

انتگرال‌گیری از ۱-فرم ها بسیار شبیه به انتگرال‌گیری در توابع مختلط روی یک مسیر است.
فرض کنیم $\gamma : [0,1] \to S$ یک مسیر هموار روی S باشد و فرض کنید که تصویر γ روی یک چارت مختصاتی باشد.در اینصورت اگر α یک ۱-فرم باشد و γ قابل پارامترسازی باشد داریم

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt} \tag{۱۰.۳}$$

که روی چارت های مختصاتی x_1 و x_2،مسیر γ بصورت $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ قابل نمایش است.توجه کنیم که در اینجا dx_i بصورت $\frac{d\gamma_i}{dt}$ نمایش داده شده است.که عبارت اخر دقیقا مثل حساب انگرال در انالیز مختلط صورت می‌گیرد.

تذکر ۱۵.۳. اگر مسیر γ روی یک چارت مختصاتی قرار نگیرد باید مسیر γ را به قسمت هایی تقسیم کنیم که هرکدام در یک چارت قرار بگیرند و روی تک تک این چارت ها می‌توانیم انتگرال‌گیری را بصورت بالا انجام دهیم.

۳.۱.۳ ساخت ۲-فرم ها و انتگرال‌گیری از ان‌ها

برای ساختن ۲-فرم ها ابتدا باید مفاهیم مرور شده از جبرخطی را که در اول فصل بیان شده اند را بخاطر داشته باشیم
می‌دانیم که فضای TS_p یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. حال مجموعه تمام تبدیلات ۲ خطی متناوب TS_p را در نظر بگیرید. اعضای این مجموعه بصورت $B : TS_p \times TS_p \to \mathbb{R}$ هستند که $B(e, f) = -B(f, e)$.
مجموعه این توابع را با $\Lambda^2 T^* S_p$ نشان می‌دهیم.حال در اینجا محصول گوه ای را بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \wedge : T^*S_p \times T^*S_p &\to \Lambda^2 T^* S_p \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

حال بطور کلی درنظر بگیریم که V یک فضای برداری ۲ بعدی باشد در نتیجه فضای برداری $\Lambda^2 V^*$ یک فضای برداری با بعد یک با پایه $e_1 \wedge e_2$ است که e_1 و e_2 پایه های فضای برداری V^* است. حال با قرار دادن $V = TS_p$ بدست می‌اید که $V^* = T^*S_p$ که یک فضای برداری با دو بعد و پایه های $\{dx_1, dx_2\}$ است.در نتیجه $\Lambda^2 T^* S_p$ یک فضای برداری با بعد یک و پایه $dx_1 \wedge dx_2$ است.

تذکر ۱۶.۳. فرض کنیم که α و β دو ۱-فرم دلخواه باشند.انگاه محصول گوه‌ای $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ و $\beta = \beta_1 dx_1 + \beta_2 dx_2$ برابر است با $\alpha \wedge \beta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$

حال امادگی این را داریم که ۲-فرم هارا تعریف کنیم.

تعریف ۱۷.۳. یک ۲-فرم هموار ρ را یک نگاشت از S به $\bigcup_{p\in S} \Lambda^2 T^* S_p$ گوییم بطوریکه $\rho(p) \in \Lambda^2 T^* S_p$. با توجه به اینکه $\Lambda^2 T^* S_p$ است و پایه این فضای برداری برابر $dx_1 \wedge dx_2$ است پس در چارت مختصاتی حول p می‌توان نوشت

$$\rho = R(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{۱۲.۳}$$

که R در ان تابعی هموار است.

تذکر ۱۸.۳. اگر y_1 و y_2 چارت مختصاتی حول p باشد انگاه ۲-فرم ρ بالا را می توان به شکل زیر نوشت

$$\rho = R(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2})dy_1 dy_2 \tag{۱۳.۳}$$

توجه کنیم که عبارت $\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$ همان دترمینان ماتریس ژاکوبی تغییر مختصات است.

مجموعه تمام ۲-فرم های هموار روی S را با Ω_S^2 نشان می‌دهیم.
حال نگاشت مشتق را از ۱-فرم های به ۲-فرم ها تعریف می‌کنیم

تعریف ۱۹.۳. تبدیل خطی

$$d : \Omega_S^1 \to \Omega_S^2 \tag{۱۴.۳}$$

را با خواص زیر تعریف می‌کنیم

۱. اگر روی زیر مجموعه‌ای باز از S مثل U داشته باشیم $\alpha_1 = \alpha_2$ انگاه روی U رابطه $d\alpha_1 = d\alpha_2$ برقرار است

۲. اگر f یک نگاشت هموار روی S باشد انگاه $ddf = 0$

۳. اگر f یک نگاشت هموار روی S باشد و α یک ۱-فرم هموار روی S باشد انگاه

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha \tag{۱۵.۳}$$

لم ۲۰.۳. نگاشت تعریف شده d در بالا خوش‌تعریف و یکتاست

اثبات. با توجه به رابطه ۱۳.۳،با جایگذاری این رابطه در فرمول سوم مشتق‌گیری با محاسبه می‌توان دریافت که این تابع مستقل از نحوه انتخاب مختصات حول p است و بدین ترتیب این نگاشت خوش‌تعریف است. برای یکتایی نیز نشان می‌دهیم تبدیل خطی که هر سه این شرایط را داشته باشد باید ضابطه بالا را داشته باشد. با توضیحات بالا فرض کنیم که D یک اپراتور با سه شرط بالاست و فرض کنیم ۱-فرم $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ را داریم.
بنابر شروط بالا داریم

$$\begin{gathered} D(\alpha) = D(\alpha_1 Dx_1 + \alpha_2 Dx_2) = d\alpha_1 \wedge Dx_1 + d\alpha_2 \wedge Dx_2 = \\ (\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} Dx_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} Dx_2) \wedge Dx_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} Dx_1 + (\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} Dx_2) \wedge Dx_2 = \\ (\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}) Dx_1 Dx_2 \end{gathered} \tag{۱۶.۳}$$

که با باز کردن عبارت ۳ شروط دقیقا به همین فرمول خواهیم رسید

حال می‌خواهیم به بیان چند لم برای انتگرال‌گیری ساده تر از ۲-فرم ها بپردازیم.

تعریف ۲۱.۳. فرض کنید f یک تابع روی رویه هموار S باشد. در اینصورت محمل تابع f را تعریف می‌کنیم

$$supp(f) = \{x \in S \;;\; f(x) \neq 0\} \tag{۱۷.۳}$$

بوضوح اگر ρ یک ۲-فرم روی رویه جهت پذیر هموار S باشد که $supp(\rho)$ یک مجموعه فشرده باشد که در یک چارت مختصاتی قرار می‌گیرد می‌توان بجای اینکه از ρ روی S انتگرال‌گیری کرد، از ρ روی $\mathbb{R}^2$ انتگرال‌گیری کرد.بطور خلاصه رابطه

$$\int_S \rho = \int_{\mathbb{R}^2} R(x_1, x_2)dx_1dx_2 \tag{۱۸.۳}$$

برقرار است.
حال به بیان چند لم جهت انتگرال‌گیری ساده تر از ۲-فرم ها می‌پردازیم. لم اول گامی در جهت اثبات قضیه استوکس برای هر رویه هموار است

لم ۲۲.۳. فرض کنید $K \subset S$ یک مجموعه فشرده و $U_1, ..., U_n \subset S$ زیرمجموعه هایی باز باشند که K را می‌پوشانند.انگاه نگاشت های هموار و نامنفی f_i روی S وجود دارند که محمل ان‌ها فشرده و زیرمجموعه U_i است بطوریکه روی K رابطه $f_1 + f_2 + ... + f_n = 1$ بین f_i برقرار است.

اثبات. ایده اثبات را به طور خلاصه بیان می‌کنیم.
اثبات با استقرا روی n صورت می‌گیرد.فرض کنیم $n = 1$ است. در اینصورت U یم باز زیرمجموعه S است که $K \subset U$.در نتیجه باید تابع f را چنان بیابیم که f یک محمل فشرده مشمول در U داشته باشد و $f = 1$ باشد. در ساده ترین حالت فرض کنیم $S = \mathbb{R}^2$ و U برابر با دیسک واحد است.در اینصورت اگر فرض کنیم که K یک دیسک با مرکز مبدا مختصات و شعاع $1/2$ باشد تابع f را تعریف کنیم

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \\ F(r) &= \begin{cases} 1, & r \leq 1/2 \\ 0, & r > 1/2 \end{cases} \end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

حال در حالت کلی ترِ $n = 1$، در این حالت مسئله را به حالت قبلی با محدود کردن توابع روی دامنه هایی که در K اشتراک دارند به حکم می‌رسیم.بدین‌صورت که فرض کنید نقطه $p \in K$ و دیسک باز D_p را در نظر بگیرید که تحت یک اطلس،دیسک D_p به دیسک باز واحد تصویر شود.حال برای هر نقطه $p \in K$ دیسک بازی حول p می‌زنیم و بدین ترتیب یک پوشش باز برای K پیدا می‌کنیم.با توجه به فشردگی می‌دانیم که $V_1, ...V_m$ یک پوشش باز برای K است بطوریکه V_i حول نقطه P_i است. حال دیسک های $\frac{1}{2}D_p$ را درنظر بگیریم و توابع g_j را تعریف کنیم که روی دیسک های $\frac{1}{2}D_{p_i}$ برابر ۱ و در نواحی بجز ان صفر باشد.حال با صفر قرار دادن g_j در باقی نواحی S، ان را به تمام S گسترش می‌دهیم.حال تابع $g = \sum_j g_j$ را روی S تعریف می‌کنیم بوضوح تابع g محمل فشرده دارد (K).و واضح است که تابع g اکیدا از ۱ بزرگ تر است زیرا هر نقطه از K ممکن است در چند دیسک $\frac{1}{2}D_{p_i}$ قرار بگیرد و مقدار از بیشتر شود.حال تابع $H(t)$ را برای $t \geq 1$ برابر با ۱ و در غیراینصورت برابر با ۰ می‌گذاریم.حال با تعریف $f = Hog$ به مطلوب می‌رسیم.
برای اثبات حالت کلی تعریف کنیم فرض کنیم $K \subset U_1 \cup ... \cup U_n$ باشد و مانند قبل دیسک های $\frac{1}{2}U_{p_i} \subset U_{p_i}$ را تعریف کنیم که $K \subset \bigcup_i \frac{1}{2}U_{p_i}$. حال برای هر i ساخت مجموعه های بالا مانند حالت $n = 1$ است

$k_i = \bigcup \frac{1}{2}\bar{D}_{p_i}$

$N_i = \bigcup D_{p_i}$
$J_i \bar{N}_i$
در نتیجه K_i و J_i فشرده هستند و رابطه شمول

$$K_i \subset N_i \subset J_i \subset U_i \tag{۲۰.۳}$$

بین این مجموعه ها برقرار است.
با تعریف توابع $h_i = 1$ روی J_i ها، و تعریف $h = \sum_i h_i$ و تعریف $N = \bigcup_{i=1} nN_i$ با استفاده از فرض استقرا می‌توان به حکم رسید.

حال سوال اینجاست که این لم چه کمکی به انتگرال‌گیری از ۲-فرم ها می‌کند؟
فرض کنیم که ρ یک ۲-فرم با محمل فشرده باشد.در اینصورت تعریف کنیم $K = supp(\rho)$. حال بنابر لم بالا توابع f_i روی K و U_i به عنوان یک پوشش برای K چنان موجودند که جمع f_i ها برابر با ۱ است.حال با توجه به اینکه $K = supp(\rho)$ است و رابطه $f_1 + f_2 + ... + f_n = 1$ روی K برقرار است پس می‌توان نوشت

$$\int_S \rho = \sum_i \int_S f_i \rho. \tag{۲۱.۳}$$

حال با توجه به این لم قضیه استوکس را برای رویه‌های جهت‌پذیر اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲۳.۳. قضیه استوکس برای رویه های جهت‌پذیر
اگر M یک رویه جهت‌پذیر باشد و D یک زیرمجموعه بسته از M باشد که دارای مرز جهت‌پذیر و قطعه قطعه هموار است،برای هر ۱-فرم α که دارای محمل فشرده باشد داریم

$$\int_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha \tag{۲۲.۳}$$

اثبات. ایده اثبات انتقال دادن ۱-فرم روی M به یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^2$ توسط یک نگاشت های یکسان‌ریختی اطلس‌ها، کمک از لم قبل است و استفاده از قضیه استوکس در به شکل قضیه ۲.۱ است.
بدین منظور برای خلاصه کردن نماد لم قبل، سه تایی (U_i, K_i, ϕ_i) را در نظر بگیرید که K_i محمل تابع ϕ_i است که روی U_i تعریف شده است.بنابر لم بالا با توجه به اینکه ۱-فرم α دارای محمل فشرده است می‌توان توابع ϕ_i را چنان در نظر گرفت که $\sum_i = 1$. بنابر این داریم

$$\begin{aligned} \int_D d\alpha &= \int_D d(\sum_i \phi_i \alpha) \\ = \sum_i \int_{K_i(D\cap U_i)} d(\phi_i\alpha) &= \sum_i \int_{\partial K_i(D\cap U_i)} \phi_i \alpha \\ = \sum_i \int_{k_i(\partial D\cap U_i)} \phi_i\alpha &= \int_{\partial D} \sum_i \phi_i \alpha = \int_{\partial D} \alpha \end{aligned} \tag{۲۳.۳}$$

که تساوی اول از لم بالا نتیجه می‌شود، تساوی دوم از جابه‌جایی علامت جمع‌وند و انتگرال، تساوی سوم از قضیه استوکس (۲.۱) و باقی اثبات مشابه تساوی های اول و دوم است

۲.۳ کوهومولوژی دِ رام

۱.۲.۳ تعریف و چند مثال

حال برای اثبات برخی از احکام به ابزاری از توپولوژی جبری به نام **کوهومولوژی** نیاز داریم.به بیان تعریف کوهومولوژی نمی‌پردازیم و مستقیم به بیان تعریف کوهومولوژی دِ رام می‌رویم. دلیل پرداختن به کوهومولوژی دِ رام این است که فضای برداری فرم های دیفرانسیل روی یک رویه هموار از جهاتی برای ما حائز اهمیت است.این کوهومولوژی اطلاعات بسیاری درباره بعد این فضاهای برداری نسبت به یکدیگر به ما می‌دهند که در اثبات گزاره هایی مهم از جمله رابطه ریمان-هورویتز و قضیه ریمان-رخ،این احکام بسیار مارا به اثبات این روابط نزدیک می‌کند.

تعریف ۲۴.۳. دنباله زیر از فرم های دیفرانسیل را در نظر بگیرید.

$$0 \to \Omega_S^0 \xrightarrow{d_0} \Omega_S^1 \xrightarrow{d_1} \Omega_S^2 \to 0 \tag{۲۴.۳}$$

می‌دانیم که d همان نگاشت مشتق برای نگاشت های هموار و ۱-فرم هاست.حال کوهومولوژی i ام رویه هموار S را با نماد $H^i(S)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} H^0(S) &= ker\ d_0 \\ H^1(S) &= ker\ d_1/Im\ d_0 \\ H^2(S) &= \Omega_S^2/Im\ d_1 \end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

و بطور کلی با تعریف فرم های دیفرانسیل مرتبه بالاتر داریم

$$H^i(S) = ker\ d_i/im\ d_{i-1} \tag{۲۶.۳}$$

تذکر ۲۵.۳. کوهومولوژی دِ رام،به نوعی حساب نسبت دیفرانسیل های بسته به دیفرانسیل های دقیق است زیرا تصویر هر $f \in \Omega_S^i$ تحت نگاشت d یک دیفراسنیل دقیق است و تصویر هر دیفرانسیل بسته تحت تابع مشتق‌گیری برابر با 0 است. بنابراین اگر S دامنه ستاره شکل یا بطور کلی‌تر S یک فضای همبند ساده باشد که دیفرانسیل های دقیق و بسته معادل یکدیگرند،این کوهومولوژی برابر با 0 خواهد بود

مثال ۲۶.۳. **حساب چند کوهومولوژی بدیهی**

۱. به سادگی می‌توان نشان داد که $H^0(S) = \mathbb{R}$. می‌دانیم که $H^0(S) = \{f \in \Omega_S^0\ ;\ df = 0\}$. از طرف دیگر می‌دانیم که $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$. حال اگر $df = 0$ باشد در نتیجه $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ که بدان معناست که تابع f برحسب x_1 و x_2 یک تابع ثابت است.

۲. بنابر تذکر بالا اگر S با $\mathbb{R}^2$ دیفئومورف باشد انگاه $H^1(S) = H^2(S) = 0$ نتیجه مستقیم تذکر ۲۵.۳ است. توجه کنیم که شرط دیفئومورف بودن بدلیل حفظ خواص نگاشت d هنگام جابه‌جایی بین دو فضاست.

۳. حال اگر کره S^2 را در نظر بگیریم همچنان بدلیل تذکر ۲۵.۳ ، داریم $H^1(S) = 0$.

مثال ۲۷.۳. حساب کوهومولوژی چنبره و چنبره‌های با ۲ حفره و بیشتر

۱. چنبره T^1 را درنظر بگریم.می‌دانیم که $T^1 = S^1 \times S^1$ و در نتیجه می‌توانیم به نقاط روی چنبره به با مختصات قطبی (θ, ϕ) نگاه کنیم.یعنی هر نقطه روی چنبره را می‌توان بصورت یک دوتایی از زاویه ها روی هر دایره نشان داد.حال مسیر های γ_1 و γ_2 را دوایر روی T^1 در نظر بگیرید که γ_1 دایره $(0, \phi)$ که $0 \leq \phi \leq 2\pi$ و γ_2 دایره $(0, \theta)$ که $0 \leq \theta \leq 2\pi$ باشد.حال نگاشت

$$\begin{aligned} \int : H^1(T) \to \mathbb{R}^2 \\ \alpha \mapsto (\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha) \end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

را در نظر بگیرید.ثابت می‌کنیم که این نگاشت یکریختی بین فضاهای برداری است. تبدیل خطی بودن این نگاشت با توجه به خطی بودن این نگاشت واضح است.حال باید یک به یکی و پوشایی نگاشت فوق را بررسی کنیم. با در نظر گرفتن ۱-فرم های $d\phi$ و $d\theta$ با انتگرال گیری به سادگی می‌توان پوشایی این نگاشت را ثابت کرد.

حال برای اثبات یک به یک بودن نشان می‌دهیم که $ker \int = 0$ و از انجا که معنای 0 در $H^1(T)$ یعنی ۱-فرم هایی مثل α که $\alpha \in Imd$ و معادلا باید نشان دهیم که اگر $\alpha in ker \int$ باشد در اینصورت تابع هموار f چنان موجود است که $\alpha = df$.فرض کنیم $\alpha \in ker \int$ در اینصورت $(\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha) = (0, 0)$ در نتیجه برای مقدار ثابت شده ϕ، حاصل انتگرال حول دایره γ_2 بنابر قضیه استوکس برای دیفرانسیل بسته $\alpha = Pd\theta + Qd\phi$ بصورت $\int_0^{2\pi} P(\theta, \phi)d\theta = 0$ است و بنابر قضیه حساب دیفرانسیل یک نگاشت هموار روی T بصورت $f = \int_0^\theta P(u, \phi)du$ قابل تعریف است. بوضوح داریم $\partial f / \partial \theta = P$. حال از انجا که دیفرانسیل α بسته است و با توجه به اینکه با تعویض ترتیب مشتق گیری تفاوتی در ضابطه f بوجود نمی‌اید می‌توان همین روند را حول دایره γ_1 انجام داد و دوباره به ضابطه f رسید.و بدین صورت ثابت شد که $\alpha = df$ و به مطلوب دست یافتیم

۲. حال فرض کنیم Σ یک رویه جهت‌پذیر با گونای ۲ باشد.می‌دانیم که Σ به هم چسباندن دو چنبره T و T' است که دو دیسک از T و T' برمی‌داریم و بجای ان یک سیلندر قرار می‌دهیم.در نتیجه گروه بنیادی این فضا برابر است با یک گروه با 4 مولد. نام طوقه های مولد را γ_1،γ_2، η_1 و η_2 بگذاریم.حال ادعا می‌کنیم که $H^1(\Sigma)$ به عنوان فضای برداری با $\mathbb{R}^4$ یکریخت است.

$$\begin{aligned} \int : H^1(\Sigma) \to \mathbb{R}^4 \\ \alpha \mapsto (\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha, \int_{\eta_1} \alpha, \int_{\eta_2}) \end{aligned} \tag{۲۸.۳}$$

حال با گام های نسبتا مشابه و با دقت نظر به چند نکته می‌توان اثبات حالت ساده تر را تکرار کرد.

۳. حال در کلی ترین حالت اگر Σ_g یک رویه جهت‌پذیر بسته با گونای g باشد در اینصورت داریم $H^1(\Sigma_g) = \mathbb{R}^{2g}$ و ایده اثبات همچنان تعریف یک نگاشت از ۱-فرم ها به $\mathbb{R}^{2g}$ هاست که ۱-فرم α را به انتگرال ان روی طوقه های مولد گروه بنیادی فضای Σ_g تصویر کند.

۴. ایده هر چهار مثال بالا چنین است.گروه بنیادی فضای جهت‌پذیر را درنظر بگیرید.یک طوقه مانند $\gamma \in \Pi_1(S)$ را در نظر بگیرید.حال نگاشت انتگرال گیری یک نگاشت بصورت

$$\begin{gathered} \int_\gamma : H^1(S) \to \mathbb{R} \\ \alpha \mapsto \int_\gamma \alpha \end{gathered} \tag{۲۹.۳}$$

القا می‌کند.از انالیز مختلط می‌دانیم که این نگاشت تنها به کلاس هم‌ارزی γ وابسته است.در نتیجه نگاشت بالا نگاشت زیر را القا می‌کند.

$$\begin{gathered} \phi : H^1(S) \to Hom(\Pi_1(S), \mathbb{R}) \\ \alpha \mapsto f \;\; ; \;\; f(\gamma) = \int_\gamma \alpha \end{gathered} \tag{۳۰.۳}$$

این نگاشت یک تبدیل خطی است و اگر S دارای شمارا تا اطلس باشد این نگاشت یکریختی میان فضاهای برداری است.

۲.۲.۳ نتایجی از دوگانی پوانکاره

فضای $\Omega^i_{S,c}$ را فضای تمام i-فرم ها تعریف کنیم که دارای محمل فشرده باشند.کوهومولوژی دِ رام را با همان روند روی فرم های با محمل فشرده تعریف می‌کنیم و ان را با نماد $H^i_c(S)$ نشان می‌دهیم.و در اخر نتیجه ای مهم درباره بعد این فضای برداری می‌گیریم.

تذکر ۲۸.۳. باید دقت کرد که این دو کوهومولوژی می‌توانند تفاوت هایی دارند گرچه بوضوح اگر S یک رویه جهت‌پذیر باشد اما فشرده نباشد در اینصورت $H^0_c(S) = 0$ زیرا توابع ثابت دارای محمل فشرده نیستند. در حالی که برای دسته بزرگی از فضاها ممکن است این دو کوهومولوژی یکسان باشد.بوضوح اگر S یک رویه جهت‌پذیر فشرده باشد دو فضای برداری $H^i(S)$ و $H^i_c(S)$ باهم برابرند.

در تذکر بالا حکمی کلی برای کوهومولوژی صفرم بیان شد.حال در ادامه به بیان احکامی درباره کوهومولوژی اول و دوم می‌پردازیم
در ادامه قضیه ای بیان می‌کنیم که بطور دقیق $H^2_c(S)$ را بشناسیم اما پیش از ان لمی را بیان می‌کنیم.

لم ۲۹.۳. نگاشت

$$\int_S : H_c^2(S) \to \mathbb{R} \qquad \alpha \mapsto \int_S \alpha \tag{۳۱.۳}$$

را در نظر بگیرید که S یک رویه هموار جهت‌پذیر و همبند است. اگر $S = \mathbb{R}^2$ باشد نگاشت فوق یک یکریختی است.

اثبات. خطی بودن این نگاشت بنا بر خواص خطی انتگرال گیری واضح است.همچنین پوشایی این نگاشت نیز واضح است.تنها باید یک به یکی را ثابت کنیم.نشان می‌دهیم اگر $\int_{\mathbb{R}^2} \rho = 0$ باشد،۱-فرم α چنان موجود است که $d\alpha = \rho$. بدین منظور ۱-فرم α را می‌سازیم.ایده ساختن α مبتنی بر قضیه حساب دیفرانسیل روی $\mathbb{R}^2$ است. فرض کنیم $\rho = R(x_1, x_2)dx_1dx_2$ می‌باشد.نگاشت $\psi(x)$ را روی $\mathbb{R}$ چنان در نظر می‌گیریم که دارای محمل فشرده باشد و

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 1 \tag{۳۲.۳}$$

باشد.بنابر قضیه حساب دیفرانسیل نگاشت $r(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x_1, t)dt$ یک نگاشت خوش‌تعریف است..تعریف کنیم $\tilde{R}(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) - r(x_1)\psi(x_2)$ و از انجا که $\rho in \Omega_c^2$ پس R دارای محمل فشرده است که نتیجه می‌دهد برای r هم برقرار است.در نتیجه محمل $\tilde{R}$ نیز فشرده است.حال برای هر x_1، با توجه به رابطه ۳.۳۲ داریم $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(x_1, t)dt = 0$.
حال تعریف کنیم

$$P(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \tilde{R}(x_1, t)dt \qquad Q(x_1, x_2) = \psi(x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} r(t)dt \tag{۳۳.۳}$$

حال واضح است که

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \tilde{R}(x_1, x_2) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x_1} = \psi(x_2)r(x_1). \tag{۳۴.۳}$$

حال با قرار دادن $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \psi(x_2)r(x_1)$ و $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \tilde{R}(x_1, x_2) +$ و گذاشتن در نظر گرفتن $\alpha = -Pdx_1 + Qdx_2$ داریم $\rho = d\alpha$ و حکم ثابت می‌شود

قضیه ۳۰.۳. با نمادگذاری و تعاریف لم بالا،حکم برای هر رویه هموار جهت‌پذیر برقرار است.

اثبات. پوشایی نگاشت بالا همچنان واضح است.برای اثبات یک ب یکی به مانند بالا نشان می‌دهیم اگر ρ یک ۲-فرم با محمل فشرده باشد که $\int_S \rho = 0$ باشد انگاه ۱-فرم α چنان موجود است که $\rho = d\alpha$. مجموعه K را یک مجموعه فشرده تعریف کنیم چنان که $supp(\rho) \subset K$. بنابر فشردگی K،می‌توان فرض کرد که $U_1, ..., U_n$ یک پوشش باز برای K است.حکم را با استقرا روی n نشان می‌دهیم.اگر $n = 1$ باشد در اینصورت بنابر لم بالا حکم ثابت می‌شود. اگر $n > 1$ باشد،فرض کنیم $V = \bigcup_{i=2}^{n} U_i$ باشد و فرض کنیم که $K \subset V \cup U$ باشد.می‌توانیم فرض کنیم که $K \cap U$ و $K \cap V$ ناتهی است زیرا اگر چنین باشد می‌توانیم به ترتیب U و V را از پوشش K حذف کنیم و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.حال از انجا که K همبند است می‌توان فرض کرد که نقطه‌ای در $U \cap V$ موجود است. در نتیجه می‌توان ۲-فرم τ را با محمل فشرده شامل در $U \cap V$ فرض کرد. حال از انجا که $K \subset U \cup V$ است توابع f_1 و f_2 به ترتیب روی U و V چنان موجودند که روی K رابطه $f_1 + f_2 = 1$.پس داریم $\rho = \rho f_1 + \rho f_2$ در نتیجه با توجه به فرض که $\int_S \rho = 0$ داریم

(۳۵.۳)
$$\int_S \rho = \int_S f_1\rho + \int_S f_2\rho = 0 \Rightarrow \int_S f_1\rho = -\int_S f_2\rho \Rightarrow \int_S f_1\rho = \int_S f_2\rho = 0$$

حال با در نظر گرفتن ۲-فرم های $f_1\rho - I\tau$ و $f_2 + I\tau$ که محمل های فشرده به ترتیب درون U و V دارند که انتگرال ان‌ها روی S صفر است.با توجه به فرض استقرا می‌دانیم که برای $f_1 - I\tau$ ۱-فرم α چنان موجود است که $d\alpha = f_1 - I\tau$ و برای $f_2 + I\tau$ ۱-فرم β چنان موجود است $d\beta = f_2 + I\tau$. بدین ترتیب بدست می‌اید $\rho = d(\alpha + \beta)$ و حکم ثابت می‌شود.

با اثبات قضیه بالا حکمی قوی درباره $H_c^2(S)$ ارائه دادیم. حال بدنبال یافتن اطلاعاتی بیشتر درباره $H_c^1(S)$ هستیم

حال طوقه $\gamma \in \Pi_1(S)$ را در نظر بگیرید.مطابق قبل، نگاشت

$$\begin{aligned} I_\gamma : H^1(S) &\to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \int_\gamma \alpha \end{aligned} \tag{۳۶.۳}$$

را درنظر بگیرید.حال نگاشت جدیدی تعریف می‌کنیم. فرض کنیم θ یک ۱-فرم با محمل فشرده باشد.در اینصورت نگاشت

$$\begin{aligned} J_\theta : H^1(S) &\to \mathbb{R} \\ J_\theta([\phi]) &\mapsto \int_S \theta \wedge \phi \end{aligned} \tag{۳۷.۳}$$

را نیز در نظر بگیرید.نگاشت J_θ خوش تعریف است زیرا بنا بر قضیه استوکس با عوض کردن نماینده کلاس هم‌ارزی $[\phi]$ مقدار انتگرال بالا ثابت می‌ماند. گزاره زیر را در جهت اثبات حقیقتی درباره $H^1(S)$ استفاده می‌کنیم.

گزاره ۳۱.۳. برای هر طوقه γ ۱-فرم θ با محمل فشرده چنان موجود است که $J_\theta = I_\gamma$.

اثبات. ایده اثبات ساخت موضعی ۱-فرم θ بگونه ای است که حساب $\theta \wedge \phi$ راحت باشد.این ساخت موضعی با افراز کردن بازه $I = [0, 1]$ است.فرض کنیم که مجموعه $\{t_0, ..., t_N\}$ یک افراز برای بازه I می‌باشد.در اینصورت از انجا که γ یک طوقه است بنابراین $\gamma(t_0) = \gamma(t_N)$. حال چارت های مختصاتی U_i را طوری در نظر بگیرید که $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. دیسک های کوچک D_i را در نظر بگیرید که $\bar{D}_i \subset U_{i-1} \cap U_i$ و همچنین $\gamma(t_i) \in D_i$. بوضوح می‌توان در نظر گرفت $D_0 = D_N$.می‌توان دیسک های D_i را چنان در نظر گرفت که اشتراک دوبه‌دوی ان ها تهی باشد.حال ۲-فرم های ρ_i را روی دیسک های باز D_i چنان تعریف کنیم محمل فشرده داشته باشند و انتگرال ان‌ها روی D_i برابر 1 باشند.در اینصورت با توجه به توضیحات بالا $\rho_N = \rho_0$. همچنین در اینصورت حال انتگرال $\rho_1 - \rho_0$ روی U_0 برابر با 0 است.در اینصورت θ_0 را چنان تعریف می‌کنیم که

$$\theta_0 = \rho_1 - \rho_0 \tag{۳۸.۳}$$

و به همین ترتیب تعریف می‌کنیم

$$\theta_i = \rho_{i+1} - \rho_i. \tag{۳۹.۳}$$

با قرار دادن $\theta = \sum_i \theta_i$ داریم $d\theta = (\rho_1 - \rho_0) + (\rho_2 - \rho_1) + ...(\rho_N - \rho_{N-1}) = 0$ که تساوی اخر بدلیل این درست است که $\rho_0 = \rho_N$. از طرف دیگر می‌دانیم f_i چنان موجود است ϕ با تحدید روی U_i برابر df_i می‌شود.زیرا U_i با دیسک روی $\mathbb{R}^2$ دیفئومورف است و در نتیجه $H^1(U_i) = 0$ است. حال حاصل $\int_S \theta \wedge \phi$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \int_S \theta \wedge \phi &= \int_S \sum_i \theta_i \wedge df_i \\ = \int_S \sum_i f_i(\rho_{i+1} - \rho_i) = \sum_i f_i(\gamma(t_{i+1})) &- f_i(\gamma(t_i)) = \int_\gamma \phi \end{aligned} \tag{۴۰.۳}$$

لازم است درباره تساوی های بالا توضیحاتی ارائه دهیم. دلیل تساوی اول در بالا امده است.تساوی دوم به این دلیل قاعده لایب نیتز(رابطه ۳.۱۵) است و اینکه نشان دادیم $d\theta = 0$ است.و تساوی سوم به این دلیل درست است که می‌توان $[\phi]$ را چنان انتخاب کرد که روی دیسک های D_i برابر با 0 باشند و در نتیجه f_i ها توابعی ثابت می‌شوند و می‌توانند از انتگرال خارج شوند.حال با انتگرال‌گیری از ۲-فرم $\rho_{i+1} - \rho_i$ می‌توان به عبارت چهارم رسید و تساوی چهارم از تاثبر دادن جمع و پارامتریزه کردن طوقه γ حاصل می‌شود و بدین ترتیب تساوی بالا حکم را ثابت می‌کند.

حال با جمع‌بندی مطالب بیان شده در این فصل و کمی کمک از جبرخطی می‌توانیم نتیجه‌ای ساده اما مهم بگیریم.

نتیجه ۳۲.۳. اگر S یک رویه هموار،جهت‌پذیر و فشرده باشد در اینصورت فضای برداری $H^1(S)$ یک فضای برداری است که بعد ان عددی زوج است.

اثبات. نگاشت

$$
\begin{aligned}
g: H_c^1(S)\times H^1(S) &\to \mathbb{R}\\
(\theta,\phi) &\mapsto \int_S \theta\wedge\phi
\end{aligned}
\tag{۴۱.۳}
$$

را در نظر بگیرید.از انجا که S فشرده است پس $H_c^1(S)=H^1(S)$ به عنوان فضای برداری برابرند.در نتیجه نگاشت بالا یک نگاشت ۲-خطی از فضای برداری $H^1(S)$ است.حال می‌توان فرض کرد که ϕ ناصفر است.حال نشان می‌دهیم این نگاشت نابدیهی است.از انجا که ϕ ناصفر است می‌توان طوقه γ را چنان یافت که $\int_\gamma \phi$ ناصفر باشد.بنابر گزاره بالا می‌دانیم که مقدار این انتگرال با مقدار انتگرال تعریف شده در ضابطه بالا برابر است درنتیجه نگاشت g یک نگاشت ثابت 0 نیست.پس $H^1(S)$ دارای یک رابطه دوخطی روی خود می‌باشد و از جبرخطی و قضیه بعد می‌توان اثبات کرد که اگر فضای برداری روی خود یک رابطه ۲-خطی مثل T چنان داشته باشد که $T(e,f)=-T(f,e)$ در اینصورت بعد ان فضای برداری عددی زوج است و همین حالا یک رابطه ۲-خطی روی فضای برداری $H^1(S)$ چنان ترعیف کردیم که خواص بالا را داشته باشد. و حکم اثبات شد.

۳.۳ حساب روی رویه های ریمانی

تا اینجای این فصل احکامی را مرور کرده ایم که برای رویه های هموار و جهت‌پذیر هموار هستند.اما می‌دانیم که یک رویه ریمانی خواص هایی بیشتر از این دو رویه دارد.در بخش اخر این فصل به بیان تعاریف مهم از فرم های دیفرانسیل در رویه های ریمانی و تفاوت ها و شباهت های ان در مقایسه با حالت هموار می‌پردازیم و با عینکی دیگر به ان‌ها نگاه می‌کنیم.

۱.۳.۳ فرم های دیفرانسیل در رویه های ریمانی

فضای مماس و هم‌مماس مثل قبل قابل تعریف هستند.یعنی برای هر نقطه $p\in X$ فضای مماس TX_p قابل تعریف است و همانند گذشته یک فضای برداری دو بعدی است. فضای هم‌مماس را تعریف می‌کنیم

$$T^*X_p = Hom_{\mathbb{R}}(TX,\mathbb{R})$$

و می‌دانیم که مشتق هر تابع حقیقی مقدار عضوی از فضای T^*X_pاست. حال مفاهیمی متناسب با رویه ریمانی تعریف می‌کنیم.

فضای هم‌مماس مختلط را تعریف می‌کنیم

$$T^*X_p^{\mathbb{C}} = Hom_{\mathbb{R}}(TX,\mathbb{C})$$

بطوریکه مشتق هر تابع مختلط مقدار روی X عضوی از فضای برداری $T^*X_p^{\mathbb{C}}$ باشد. حال به بیان چند تعریف از جبرخطی می‌پردازیم

تعریف ۳۳.۳. □ منظور از ساختار مختلط روی فضای برداری V یک تبدیل خطی روی $\mathbb{R}$ مثل $J: V\to V$ است که $J^2=-1$.

- گوییم که تبدیل خطی $T : V \to \mathbb{C}$ دارای خاصیت مختلط خطی است هرگاه $T(J(v)) = iT(v)$

- همانند بالا گوییم که تبدیل خطی $T : V \to \mathbb{C}$ مختلط غیرخطی است هرگاه برای هر v عضو V داشته باشیم $T(J(v)) = -iT(v)$

حال دو لم ساده و در عین حال مهم از جبرخطی مربوط به تبدیلات مختلط خطی و غیرخطی بیان می کنیم.

لم ۳.۳۴.
- تنها یک ساختار مختلط روی فضای برداری TX_p قابل تعریف است بطوریکه مشتق هر نگاشت تحلیلی تعریف شده روی یک همسایگی از p یک تبدیل مختلط خطی باشد

- تبدیل خطی $T : V \to \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید.در اینصورت تبدیلات خطی T' و T'' بطور یکتا وجود دارند که $T = T' + T''$ که T' مختلط خطی و T'' مختلط غیرخطی است.

اثبات. اثبات بخش اول لم بسیار ساده است و از تعریف تابع تحلیلی نتیجه می‌شود.
اثبات بخش دوم لم بدین صورت است که تبدیل های خطی T' و T'' را معرفی می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$T'(v) = 1/2(T(v) - iT(J(v))) \quad T''(v) = 1/2(T(v) + iT(J(v)))$$

حال بنابر لم بالا اگر فضای برداری $T^*X_p^{\mathbb{C}}$ را در نظر بگیریم می‌توان انرا به فضاهای برداری T^*X_p' و T^*X_p'' تجزیه کرد و خواهیم داشت

$$T^*X_p^{\mathbb{C}} = T^*X_p' \oplus T^*X_p''.$$

این بدان معناست که اگر تابع تحلیلی f را داشته باشیم، f' عضوی از T^*X_p' است و مشتق تابع $\bar{f}$ عضوی از T^*X_p'' است. درنتیجه می‌توانیم فرم های دیفرانسیل علی الخصوص ۱-فرم هارا داخل این دو فضا بنشانیم. بطور دقیق تر داریم

$$\Omega^1_{X,\mathbb{C}} = \Omega^{1,0}_X \oplus \Omega^{0,1}_X$$

بطوریکه اعضای $\Omega^{1,0}$ داخل T^*X_p' هستند و اعضای $\Omega^{0,1}$ هم عضوی از T^*X_p'' هستند که اعضای $\Omega^{0,1}$ مزدوج مختلط اعضای $\Omega^{1,0}$ هستند
حال به همانگونه که درباره فضاهای برداری ۱-فرم ها صحبت کردیم اینجا هم همین قصد را داریم. می‌دانیم که فضای ۱-فرم ها یک فضای دوبعدی که پایه های ان مجموعه $\{dx, dy\}$ است که باتوجه به لم ۳.۳۴ می‌توان با تغییر مختصاتی ان را به پایه های $\{dz, d\bar{z}\}$ تبدیل کرد.درنتیجه به مانند گذشته می‌توان هر ۱-فرم روی هر رویه ریمانی را به صورت $\alpha dz + \beta d\bar{z}$ نوشت. به اعضای مجموعه $\Omega^{1,0}$ $(1,0)$-فرم های گوییم و به اعضای مجموعه $\Omega^{0,1}$ $(0,1)$-فرم ها گوییم.
از مطالب بیان شده درباره فرم های دیفرانسیل روی رویه های هموار و جهت‌پذیر،می‌دانیم که df یک ۱-فرم است. حال می‌خواهیم df را براساس مختصات جدید بازنویسی کنیم.می دانیم که

$$dz = dx + idy \ , \ d\bar{z} = dx - idy \Rightarrow dx = 1/2(dz + d\bar{z}) \ , \ dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \Rightarrow df = 1/2(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + 1/2(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\bar{z}$$

حال برای انطباق با نماد گذاری قبلی،نماد های زیر را تعریف می‌کنیم و این ها ۱-فرم ها در مختصات مختلط هستند

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dx + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = \partial f dz + \bar{\partial} f d\bar{z}$$
$$\partial f = 1/2(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \; , \; \bar{\partial} f = 1/2(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) \tag{۴۲.۳}$$

تذکر ۳۵.۳. توجه کنیم که معادله $\bar{\partial} f = 0$ دقیقا همان شرط معادلات کوشی-ریمان است که بنابر مشتق‌پذیر بودن تابع f همواره برقرار است.در نتیجه در مختصات مختلط داریم

$$df = \partial f = f'(z)dz \tag{۴۳.۳}$$

حال مطابق با قبل می‌دانیم که با مشتق گرفتن از ۱-فرم ها به ۲-فرم ها برسیم.اما در اینجا عمل مشتق‌گیری با نگاشت های ∂ و $\bar{\partial}$ انجام می‌شود.بدین منظور دیاگرام زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} \Omega^{0,1} \arrow[r, "\partial"] & \Omega^2 \\ \Omega^0 \arrow[u, "\bar{\partial}"] \arrow[r, "\partial"'] & \Omega^{1,0} \arrow[u, "\bar{\partial}"'] \end{tikzcd}$$

تعریف نگاشت های ∂ و $\bar{\partial}$ برای توابع هموار را مطابق رابطه ۳.۴۳ داریم.اما این نگاشت ها برای $(1,0)$ فرم ها و $(0,1)$ فرم ها هنور تعریف نشده اند.در اینصورت نگاشت های ∂ و $\bar{\partial}$ به ترتیب برای $(0,1)$ فرم ها و $(1,0)$ فرم ها بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\partial(Ad\bar{z}) = \frac{\partial A}{\partial z}dzd\bar{z} = 2i\frac{\partial A}{\partial z}dxdy$$
$$\bar{\partial}(Bdz) = \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}dzd\bar{z} = -2i\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}dxdy \tag{۴۴.۳}$$

و بدین ترتیب نگاشت مشتق روی توابع هموار و ۱-فرم ها روی رویه های ریمانی در مختصات مختلط کامل می‌شود.نکته مهم نحوه تعریف ۲-فرم ها این است که چرا نمی‌توان ۲-فرم هارا بصورت ∂^2 یا $\bar{\partial}^2$ نشان داد.از انجا که $\partial f = df$ است و می‌دانیم $d^2 = 0$ پس $\partial^2 f = 0$ و همچنین می‌دانیم که برای همه توابع تحلیلی $\bar{\partial} f = 0$ و در نتیجه $\bar{\partial}^2 f = 0$ و به همین دلیل برای تعریف ۲-فرم ها نمی‌توان از نگاشت های ∂^2 یا $\bar{\partial}^2$ استفاده کرد.

تعریف ۳۶.۳. $(1,0)$-فرم β را یک ۱-فرم مشتق‌پذیر گوییم هرگاه $\bar{\partial}\beta = 0$

از تعریف بالا نتیجه می‌گیریم که ۱-فرم مشتق‌پذیر همواره به شکل Bdz قابل نمایش است که B تحلیلی است.

تعریف ۳۷.۳. ۱-فرم α روی رویه ریمانی X را مرومورفیک گوییم هرگاه مجموعه گسسته D چنان موجود باشد که α روی $X-D$ مشتق‌پذیر باشد و بتوان ان را بصورت موضعی بصورت $f(z)dz$ نشان داد که f مرومورفیک باشد. همچنین به D محموعه قطب های D می‌گویند.

تعریف ۳۸.۳. همانند تعریف بالا D را مجموعه قطب های ۱-فرم α در نظر بگیرید.فرض کنید p نقطه ای در D باشد و C یک دایره حول p باشد. در اینصورت مانده ۱-فرم α در p را تعریف می‌کنیم

$$Res_p(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \alpha. \tag{۴۵.۳}$$

این تعریف معادل تعریف مانده در انالیز مختلط است. در نتیجه،با توجه به مرومورفیک در نظر بگیریم،حول نقطه p تابع f چنان موجود است که $\alpha = f(z)dz$ و با نوشتن بسط لوران تابع f حول نقطه p می‌توان مانده α را برابر a_{-1} در بسط لوران قرار داد.

قضیه ۳۹.۳. قضیه مانده ها ۱-فرم مرومورفیک α را روی رویه ریمانی فشرده X در نظر بگیرید.انگاه جمع مانده های α حول قطب هایش برابر با صفر است

اثبات. ایده اثبات دقیقا مشابه اثبات قضیه مانده ها در انالیز مختلط است. فرض کنید P مجموعه همه قطب های α باشد. حال حول هر نقطه p داخل P دیسکی حول p می‌زنیم و نام ان را B_p می‌گذاریم.از انجا که P گسسته است می‌توان در نظر گرفت که هر اشتراک دوبه‌دوی B_p ها تهی باشد.در اینصورت اگر در نظر بگیریم که $S = X - \bigcup_{p\in P} B_p$. واضح است که α روی S مشتق‌پذیر است و بنا بر قضیه استوکس می‌دانیم که

$$\int_{\partial S}\alpha = \int_S d\alpha = 0$$

از طرف دیگر می‌دانیم که

$$\int_{\partial S}\alpha = \sum_{p\in P}\int_{\partial B_p}\alpha = 2\pi i\sum_{p\in P} Res_p(\alpha) = 0$$

که تساوی اخر از معادله بالا نتیجه شده است و حکم ثابت می‌شود

تذکر ۴۰.۳. اثبات قضیه مانده ها در انالیز مختلط دقیقا به همین شکل است با این تفاوت که انجا از قضیه کوشی استفاده می‌کنیم اما در اینجا قضیه کوشی حالت خاصی از قضیه استوکس است

۲.۳.۳ عملگر لاپلاس و نرم دیریشله

تعریف ۴۱.۳. عملگر Δ روی رویه ریمانی X را عملگر لاپلاس گوییم و مطابق زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \Delta = 2i\bar{\partial}\partial : \Omega^0 \to \Omega^2 \\ f \mapsto \Delta(f) \end{aligned}$$

بطوریکه با توجه به ضابطه داریم

$$\Delta(f) = 2i\ 1/4(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dzd\bar{z} = -(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy. \quad (۴۶.۳)$$

همانند انالیز مختلط هرگاه تابع f در معادله دیفرانسیل $\Delta f = 0$ صدق کند گوییم f یک تابع همساز یا هارمونیک است.

اگر f یک تابع تحلیلی باشد می‌دانیم که $Re(f)$ و $Im(f)$ توابعی هارمونیک هستند.برعکس ان‌را به عنوان لمی بیان می‌کنیم

لم ۴۲.۳. فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی مقدار و همساز روی یک همسایگی از نقطه p مثل N درون رویه ریمانی X باشد.در اینصورت یک همسایگی از p مثل $U \subset N$ چنان وجود دارد که تابع f روی U تحلیلی باشد و $\phi = Re(f)$.

ایده اثبات معرفی تابع همساز و حقیقی مقدار ψ و در نتیجه معرفی نگاشت تحلیلی $f = \phi + i\psi$ است.۱-فرم $A = (i\bar{\partial}\phi)dz + i(\bar{\partial}\phi)d\bar{z}$ را تعریف کنیم و قرار دهیم $A = d\psi$.در اینصورت با قرار دادن $f = \phi + i\psi$ و حساب کردن دستی عبارت $\bar{\partial} f$ در می‌یابیم که f تحلیلی است
حال از انجا که ۱-فرم ها به شکل یک فضای برداری هستند مایلیم برای عناصر ان‌ها ضرب داخلی و نرم تعریف کنیم.

تعریف ۴۳.۳. فرض کنیم X یک رویه ریمانی است و $\alpha = pdz$ یک (1.0)-فرم روی X باشد انگاه نرم α را تعریف کنیم

$$||\alpha||^2 = \int_X i\alpha \wedge \bar{\alpha}$$

که با توجه به تعریف محصول گوه‌ای داریم

$$i\alpha \wedge \bar{\alpha} = i|p|^2 dzd\bar{z} = 2|p|^2 dxdy$$

پس انتگرال بالا همواره مثبت است.در ادامه با بیان لمی نامساوی مثلث را نیز ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تابع تعریف شده یک نرم روی فضای $(1,0)$ فرم‌هاست.

حال با کمی تعمیم دادن نرم بالا می‌توانیم به ضرب داخلی روی فضای برداری $(1,0)$ تبدیل کنیم.

تعریف ۴۴.۳. فضای برداری $(1,0)$-فرم ها را در نظر بگیرید.دو عنصر دلخواه αو β را در فضای $(1,0)$-فرم ها در نظر بگیرید. در اینصورت ضرب داخلی این دوعنصر را تعریف می‌کنیم

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X i\alpha \wedge \bar{\beta}.$$

می‌توان نشان داد که این تعریف هر سه خاصیت ضرب داخلی را دارد.

حال با بیان لمی نشان می دهیم که نامساوی مثلث در نرم تعریف شده در تعریف ۳.۴۳ برقرار است.

لم ۴۵.۳. فرض کنیم A و B دو ۱-فرم حقیقی روی رویه ریمانی X باشند در اینصورت داریم

$$\int_X = |A \wedge B| \leq ||A||\ ||B||.$$

اثبات. از انجا که A و B دو ۱-فرم حقیقی هستند پس P و Q چنان موجودند که $A = Pdz + \bar{P}d\bar{z}$ و $B = Qdz + \bar{Q}d\bar{z}$. حال با توجه به تعریف محصول گوه‌ای داریم

$$A \wedge B = (P\bar{Q} - Q\bar{P})dzd\bar{z} = Im(P\bar{Q})dxdy$$

و رابطه $\int_X |A \wedge B| = \int_C |Im(P\bar{Q})dxdy$ برقرار است.از طرف دیگر بنابر نامساوی کوشی-شوارتز داریم

$$\int_C |Im(P\bar{Q})dxdy \leq (\int_C |P|^2)^{1/2}(\int_C |Q|^2)^{1/2} = ||P||\ ||Q||$$

و این حکم را تمام می‌کند.

تعریف ۴۶.۳. ضرب داخلی دیریشله را با نماد $\langle\ ,\ \rangle_D$ نشان می‌دهیم و برای توابع هموار f و g تعریف می‌کنیم

$$\langle f, g\rangle_D = \langle df, dg\rangle$$

و به همین ترتیب نرم دیریشله را با نماد $||\ ||_D$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$||f||_D = ||df||.$$

توجه می‌کنیم که مقدار این نرم می‌تواند عددی حقیقی نباشد و نامتناهی باشد

این فصل را با لمی جهت راحت تر حساب کردن نرم و ضرب داخلی دیریشله به پایان می‌رسانیم

لم ۴۷.۳. اگر f و g دو تابع هموار باشد که حداقل یکی از انها دارای محمل فشرده باشد در اینصورت

$$\langle f, g\rangle_D = \int_X g\Delta f = \int_X f\Delta g$$

اثبات. با محاسبه ای ساده و انتگرال گیری نتیجه می‌شود.داریم

$$\langle f, g\rangle_D = 2i\int_X df \wedge \bar{dg} = 2i\int_X \partial(f\bar{\partial}g) - f\partial\bar{\partial}g = \int_X f\Delta g$$

که تساوی اول از نرم دیریشله حاصل می‌شود، تساوی دوم از رابطه ۳.۱۵ و این مورد که رابطه $df = \partial f$ برقرار است، و تساوی سوم نشأت گرفته از قضیه استوکس است زیرا

$$\int_X \partial(f\bar{\partial}g) = \int_X d(f\bar{\partial}g) = \int_{\partial X} dd(f\bar{\partial}g) = 0$$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

گونا	genus
هموار	smooth
کراندار	bounded
قطعه قطعه هموار	piecewise smooth
تحلیلی	analytic
دقیق	exact
بسته	closed
همساز	harmonic
تام	entire
سری توانی	power series
همگرایی	convergence
نقطه تنها	isolated point
سری لوران	laurant series
تکینگی	singularity
تکینگی رفع شدنی	removable singularity
قطب	pole
مرتبه	order
تکینگی اساسی	essential singularity
مرومورفیک	meromorphic
مانده	residue
مسیر	path
طوقه	loop
گروه بنیادی	fundamental group
درونبری	retraction
تغییر شکل درونبر	deformation retraction
فضای پوششی	covering space
همبند	connected
همبند مسیری	path-connected

proper .... ناسره
Riemann surface .... رویه ریمانی
haussdorf .... هاسدورف
holomorphic .... مشتق پذیر
smooth .... هموار
oriented .... جهت‌پذیر
Riemann sphere .... کره ریمان
affine algebraic curves .... خم های جبری افین
projective algebraic curves .... خم های جبری تصویری
homogenous .... همگن
qoutient .... خارج‌قسمتی
homeomorphic .... یکسان‌ریخت
discrete .... گسسته
critical points .... نقاط بحرانی
critial value .... مقدار بحرانی
ramification point .... نقاط منشعب کننده
degree .... درجه
alternative .... متناوب
tangent space .... فضای مماس
cotangent space .... فضای هم‌مماس
pull back .... عقب‌گرد
wedge product .... محصول گوه‌ای
support .... محمل
de Rham cohomology .... کوهومولوژی دِ رام
torus .... چنبره
duality .... دوگانی
direct sum .... جمع مستقیم
complex conjugate .... مزدوج مختلط
inner product .... ضرب داخلی

کتاب‌نامه

[1] Gamelin, Theodore W .*Complex analysis*. Springer .2001

[2] Stein , Elias M . shakarchi , Rami. *Complex analysis*. Princeton University press . 2003

[3] Donaldson , Simon K. *Riemann surfaces*. Oxford university press. 2011

[4] Hatcher, Allen. *Algebraic topology*. Cambridge University Press. 2000

[5] *Notes to a national masters course* . Utrecht University. 2007

Abstract

Abstract goes here...

College of Science
School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Riemann–Roch Theorem

Amir Arsalan Mankavi

Supervisor: Dr. Ali Kamalinejad

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of B.Sc. in Mathematics and Applications