پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

نکاتی در تجزیه به کسرهای مصری

نام نگارنده: سیده هدی صافی
استاد راهنما: دکتر فاطمه آیت ا... زاده شیرازی

۱۶ مرداد ۱۴۰۲

چکیده

کسری که صورت آن برابر یک است کسر واحد گوییم. کسرهای واحد منبع یکی از جالب‌ترین اسرار در مورد ریاضیات دوران باستان بوده است. به جز $2/3$ مصریان باستان همه کسرها را به صورت مجموع کسرهای واحد بیان می‌کردند. به طور خاص، پاپیروس ریاضی ریند (RMP) شامل تجزیه $2/n$ به عنوان مجموع کسرهای واحد برای n فرد از 5 تا 101 است. نحوه تجزیه $2/n$ به طور گسترده مورد بحث قرار گرفته است و هیچ روش کلی که برای هر n کار کند تاکنون کشف نشده است. مرجع اصلی این متن [۱] می باشد.

فهرست مطالب

سپاسگذاری

از دکتر آیت الله زاده شیرازی عزیز که با دقت و حوصله فراوان مرا در انجام این پروژه یاری کردند،کمال تشکر را دارم.

پیشگفتار

در سال 1858 هنری راینه باستانی اکاتلندی یک رول پاپیروس باستانی را در شهر لوکسور مصر خریداری کرده. اهمس کاتب پاپیروس به ما می‌گوید که این پاپیروس در حدود 1650 قبل از میلاد کپی شده است. اما محتوای آن متعلق به دوره‌ای قدیمی‌تر احتمالا 1800 قبل از میلاد یا قبل از آن است. پاپیروس مادی یک سری مسائل ریاضی است که با خط شکسته نوشته شده است، که مناسب برای نوشتن بر روی پاپیروس، به جای شکل هیرو گلف دقیق‌تر، که برای حکاکی روی سنگ‌ها در نظر گرفته شده است. در این خط باستانی متقابل یک عدد طبیعی با قرار دادن یک خط روی عدد نشان داده می‌شود.

این حرکات متقابل که معمولا توسط نویسندگان مردن کسر واحد نامیده می‌شود، نقش مهمی در محاسبات مصر باستان بازی می‌کردند. به جز دو سوم که نماد مخصوص به خود را دارد، همه کسرها به کسری واحد تجزیه شدند. در متون مدرن، مرسوم است که $\overline{n}$ را برای متقابل n و $\overline{3}$ را برای دو سوم می‌نویسند. همچنین $2 : n$ نماد استاندارد برای چیزی است که به اهمس به عنوان ″ 2 را از n فراخوانی کنید.″ می‌نویسد.

یک ترجمه توصیفی‌تر این خواهد بود که ″ 2 از n چیست؟″ ارتباط $2 : n$ از این واقعیت ناشی می‌شود که همانطور که خواهیم دید، تکرار یکی از عملیات ریاضی پایه مصری‌ها بود، و بنابراین دو برابر $\overline{n}$ یکی از رایج‌ترین انواع کسری بود که آنها باید به کسرهای واحد تقسیم می‌کردند. پاپیروس ریاضی Rhind(RMP) با بیان $2 : n$ برای n فرد از 5 تا 101 به عنوان مجموع دو، سه یا چهار کسر واحد باز می‌شود. مصریان از برابری بی‌اهمیت $2 : n = \overline{n} + \overline{n}$ اجتناب کردند زیرا منجر به جمع آوری بیهوده کسرهای واحد می‌شود. بلکه آنها $2 : n$ را به تعداد حداقلی از کسرهای واحد که با دقت انتخاب شده بودند تجزیه کردند.

فصل ۱

جدول ۲:n

در جدول ۱ (که از این پس به عنوان جدول $n : 2$ یا به سادگی "جدول" نامیده می‌شود)، تجزیه‌ها را همانطور که در پاپیروس Rhind ظاهر می‌شوند فهرست می‌کنیم. تجزیه 3 برای کامل شدن اضافه می‌شود.

عدم وجود علائم ریاضی در جدول مطابق با شیوه مصری نوشتن متون ریاضی است. با این حال، در اصل پاسخ به شکل کمی متفاوت نوشته شده است. به عنوان مثال نتیجه تقسیم 2 بر 47 توسط اهمس چنین بدست می‌آید:

$$47 \quad \overline{30} \quad 1 \quad \overline{2} \quad \overline{15} \quad \overline{141} \quad \overline{3} \quad \overline{470} \quad \overline{10}$$

توجه کنید که اعداد بزرگ‌تر با $2/47$ جمع می‌شوند و تجزیه لازم را بدست می‌دهند. پاسخ به صورت زیر تأیید می‌شود: ابتدا $\overline{30}$ از 47 را بگیرید. این$\overline{15} + \overline{2} + 1$ را بدست می‌دهد که $\overline{3} + \overline{10}$ کمتر از 2 است. از آنجایی که $3 \times 47 = 141$ و $10 \times 47 = 470$ یا به طور معادل $\overline{141}$ از 47 عدد $\overline{3}$ و $\overline{470}$از 47 ، عدد $\overline{10}$ است. تجزیه$\overline{470} + \overline{141} + \overline{30} = 2 : 47$

حال فرض کنید n عددی باشد که باید تجزیه شود، یعنی عددی که می‌خواهیم $n : 2$ را به عنوان مجموع کسرهای واحد بیان کنیم.

حال، $\bar{a}$ را به عنوان اولین کسر واحد در تجزیه n تعریف کنید. M نتیجه گرفتن $\bar{a}$ از n و R مکمل M برای 2 باشد. سپس برای $n = 47$ داریم، $\bar{30}\bar{a}$ =و $M = 1 + \bar{2} + \bar{15}$ و $R = \bar{3} + \bar{10}$ از این طریق می‌بینیم که تجزیه n ساده است به شرطی که α M، و R پیدا شده باشد.

اما قبل از اینکه بگوییم چگونه ممکن است این کار انجام شود، اجازه دهید نوع ریاضیاتی را که در زمان اهمس در دسترس مصریان بود مرور کنیم. این مهم خواهد بود زیرا به ما ایده‌ای از سطح پیچیدگی ریاضی را می‌دهد که می‌تواند در بازسازی جدول استفاده شود.

مصری‌ها از پایه 10 برای بیان اعداد خود استفاده می‌کردند. نمادهای آنها برای 1، 10 و 100 در شکل ۱ نشان داده شده است. آنها همچنین نمادهایی برای سایر توان‌های 10 تا $1,000,000$ داشتند. اعداد از 1 تا 9 با گروه‌بندی تعداد متناظر آنها بیان شدند.

برای اطلاعات بیشتر در مورد سیستم اعداد مصر، با شروع از راست به چپ، 11 به صورت 10 و سپس 1 نوشته می‌شد. به عنوان مثال، نمادهای شکل 1 که به صورت متوالی به صورت یک عدد نوشته شده‌اند، برابر با 111 است. واضح است که عدد 10 ، مضرب‌های آن و توان‌های آن نقش اصلی را در چنین سیستم اعدادی ایفا می‌کنند.

در واقع به دنبال جدول $n : 2$ اهمس $n : 10$ را برای n از 2 تا 9 تجزیه می‌کند، علاوه بر 10 ، دوازده و مضرب‌های آن نیز مفید بودند. به نظر می‌رسد مصریان باستان اولین کسانی بودند که روز را به 24 ساعت روز و 12 ساعت برای شب تقسیم کردند. دوازده یک عدد انتخابی بود زیرا کوچکترین عددی است که دارای 2 ، 3 ، 4 و 6 به عنوان مقسوم علیه است و بنابراین $m/12$ یک کسر

جدول ۱: در اینجا m نتیجه گرفتن a از n و R مکمل m به ۲ است.

$2:n$	R	M	a	n
$\bar{2}$ $\bar{6}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	2	3
$\bar{3}$ $\bar{15}$	$\bar{3}$	1 $\bar{\bar{3}}$	3	5
$\bar{4}$ $\bar{28}$	$\bar{4}$	1 $\bar{2}$ $\bar{4}$	4	7
$\bar{6}$ $\bar{18}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	6	9
$\bar{6}$ $\bar{66}$	$\bar{6}$	1 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{6}$	6	11
$\bar{8}$ $\bar{52}$ $\bar{104}$	$\bar{4}$ $\bar{8}$	1 $\bar{2}$ $\bar{8}$	8	13
$\bar{10}$ $\bar{30}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	10	15
$\bar{12}$ $\bar{51}$ $\bar{68}$	$\bar{3}$ $\bar{4}$	1 $\bar{3}$ $\bar{12}$	12	17
$\bar{12}$ $\bar{76}$ $\bar{114}$	$\bar{4}$ $\bar{6}$	1 $\bar{2}\bar{12}$	12	19
$\bar{14}$ $\bar{42}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	14	21
$\bar{12}$ $\bar{276}$	$\bar{12}$	1 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{4}$	12	23
$\bar{15}$ $\bar{75}$	$\bar{3}$	1 $\bar{\bar{3}}$	15	25
$\bar{18}$ $\bar{54}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	18	27
$\bar{24}$ $\bar{58}$ $\bar{174}$ $\bar{232}$	$\bar{2}$ $\bar{6}$ $\bar{8}$	1 $\bar{6}$ $\bar{24}$	24	29
$\bar{20}$ $\bar{124}$ $\bar{155}$	$\bar{4}$ $\bar{5}$	1 $\bar{2}$ $\bar{20}$	20	31
$\bar{22}$ $\bar{66}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	22	33
$\bar{30}$ $\bar{42}$	$\bar{\bar{3}}$ $\bar{6}$	1 $\bar{6}$	30	35
$\bar{24}$ $\bar{111}$ $\bar{296}$	$\bar{3}$ $\bar{8}$	1 $\bar{2}$ $\bar{24}$	24	37
$\bar{26}$ $\bar{78}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	26	39
$\bar{24}$ $\bar{246}$ $\bar{328}$	$\bar{6}$ $\bar{8}$	1 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{24}$	24	41
$\bar{42}$ $\bar{86}$ $\bar{129}$ $\bar{301}$	$\bar{2}$ $\bar{2}$ $\bar{7}$	1 $\bar{42}$	42	43
$\bar{30}$ $\bar{90}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	30	45
$\bar{10}$ $\bar{30}$ $\bar{141}$ $\bar{470}$	$\bar{3}$	1 $\bar{2}$ $\bar{15}$	30	47
$\bar{28}$ $\bar{196}$	$\bar{4}$	1 $\bar{2}$ $\bar{4}$	28	49
$\bar{34}$ $\bar{102}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	34	51
$\bar{30}$ $\bar{318}$ $\bar{795}$	$\bar{6}$ $\bar{15}$	1 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{10}$	30	53
$\bar{30}$ $\bar{330}$	$\bar{6}$	1 $\bar{\bar{3}}$ $\bar{6}$	30	55
$\bar{38}$ $\bar{114}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	38	57
$\bar{36}$ $\bar{236}$ $\bar{531}$	$\bar{4}$ $\bar{9}$	1 $\bar{2}$ $\bar{12}$ $\bar{18}$	36	59
$\bar{40}$ $\bar{244}$ $\bar{488}$ $\bar{610}$	$\bar{4}$ $\bar{8}$ $\bar{10}$	1 $\bar{2}$ $\bar{40}$	40	61
$\bar{42}$ $\bar{126}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	42	63
$\bar{39}$ $\bar{195}$	$\bar{3}$	1 $\bar{\bar{3}}$	39	65
$\bar{40}$ $\bar{335}$ $\bar{536}$	$\bar{5}$ $\bar{8}$	1 $\bar{2}$ $\bar{8}$ $\bar{20}$	40	67
$\bar{46}$ $\bar{138}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	46	69
$\bar{40}$ $\bar{568}$ $\bar{710}$	$\bar{8}$ $\bar{10}$	1 $\bar{2}$ $\bar{4}$ $\bar{40}$	40	71
$\bar{60}$ $\bar{219}$ $\bar{292}$ $\bar{365}$	$\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{5}$	1 $\bar{6}$ $\bar{20}$	60	73
$\bar{50}$ $\bar{150}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	50	75
$\bar{44}$ $\bar{308}$	$\bar{4}$	1 $\bar{2}$ $\bar{4}$	44	77
$\bar{60}$ $\bar{237}$ $\bar{316}$ $\bar{790}$	$\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{10}$	1 $\bar{4}$ $\bar{15}$	60	79
$\bar{54}$ $\bar{162}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	54	81
$\bar{60}$ $\bar{332}$ $\bar{415}$ $\bar{498}$	$\bar{4}$ $\bar{5}$ $\bar{6}$	1 $\bar{3}$ $\bar{20}$	60	83
$\bar{51}$ $\bar{255}$	$\bar{3}$	1 $\bar{\bar{3}}$	51	85
$\bar{58}$ $\bar{174}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	58	87
$\bar{60}$ $\bar{356}$ $\bar{534}$ $\bar{890}$	$\bar{4}$ $\bar{6}$ $\bar{10}$	1 $\bar{3}$ $\bar{10}$ $\bar{20}$	60	89
$\bar{70}$ $\bar{130}$	$\bar{\bar{3}}$ $\bar{30}$	1 $\bar{5}$ $\bar{10}$	70	91
$\bar{62}$ $\bar{186}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	62	93
$\bar{60}$ $\bar{380}$ $\bar{570}$	$\bar{4}$ $\bar{6}$	1 $\bar{2}$ $\bar{12}$	60	95
$\bar{56}$ $\bar{679}$ $\bar{776}$	$\bar{7}$ $\bar{8}$	1 $\bar{2}$ $\bar{8}$ $\bar{14}$ $\bar{28}$	56	97
$\bar{66}$ $\bar{198}$	$\bar{2}$	1 $\bar{2}$	66	99
$\bar{101}$ $\bar{202}$ $\bar{303}$ $\bar{606}$	$\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{6}$	1	101	101

واحد است زمانی که m یکی از آن مقسوم علیه ها باشد. نتیجه این است که کسر واحدی که مخرج آن مضربی از 12 باشد، مطلوب است زیرا شکستن کسرهای غیر واحدی دیگر را به کسرهای واحد تسهیل می‌کند. RMP به وضوح نشان می‌دهد که روش ضرب مصری بر اساس تکرار و جمع بوده است. به عنوان مثال، در RMP۳۲ محاسبه 12×12 به این صورت پیش می‌رود.

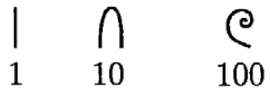
$1 \quad 12$

$2 \quad 24$

$/4 \quad 48$

$/8 \quad 96$

$Result : 144$



شکل ۱: نمادهای هیروگلف برای ۱، ۱۰ و ۱۰۰

با شروع یک، هر عدد در ستون سمت چپ دو برابر عدد بالای آن است. ستون سمت راست از حاصل ضرب ۱۲ با اعداد مربوطه در ستون سمت چپ تشکیل شده است. خط کنار ۴ و ۸ نشان دهنده اعدادی است که باید اضافه شوند. از آنجایی که $12 = 8 + 4$، پاسخ نهایی $144 = 96 + 48$ است. این فرآیند با استفاده از مضرب ۱۰ تسریع میشد در انجام $23 : 2$ اهمس 12×23 را به صورت زیر محاسبه میکند:

$1 \quad 23$

$/10 \quad 230$

$/2 \quad 46$

$Result : 276$

تقسیم به روش مشابه انجام می شود به عنوان مثال، برای تقسیم ۱۵ بر ۵ کاتب چیزی شبیه به این می گوید: ”۵ را ضرب کنید تا به ۱۵ برسد.“

محاسبه به صورت زیر انجام می شود:

$1 \quad 5$

$/2 \quad 10$

$Result : 3$

وقتی از تقسیم m بر n عددی کامل بدست نیامد، مصریان به کسر واحد متوصل شدند. در ادامه روش مصری تقسیم را با محاسبه $8 : 19$ و $3 : 16$ نشان می دهیم.

$19:8$	1	8	$16:3$	$/1$	3
	$/2$	16		2	16
	$\bar{2}$	4		$/4$	12
	$/\bar{4}$	2		$\bar{\bar{3}}$	2
	$/\bar{8}$	1		$/\bar{3}$	1
	$Result:$	$2 \quad \bar{4} \quad \bar{8}$		$Result:$	$5 \quad \bar{3}$

برای تقسیم 19 بر 8 یکی روی 8 عمل می کند تا به 19 برسد. از آنجایی که دو برابر 8 سه واحد کمتر از 19 است، باید روی 8 عمل کنیم تا به 3 برسیم. این کار با گرفتن $1/2$، $1/4$ و $1/8$ از 8 انجام می شود. از آنجایی که $3 = 2 + 1$ تسیم 19 بر 8 برابر $\bar{5} + \bar{4} + 2$ می شود.

در اصطلاح مدرن، $19/8$ ابتدا به صورت $3/8 + 2$ نوشته می شود و سپس $3/8$ به $\bar{4}$ تقسیم می شود. فرآیند مشابهی برای 3 به 16 اعمال می شود. در این مورد، ممکن است تصور شود که گرفتن $\bar{\bar{3}}$ از 3 قبل از گرفتن $\bar{3}$ از 3، سهل انگاری از جانب اهمس است، اما در واقع این بیشتر یک قاعده بود تا استثناء، k امین قسمت n ابزار اساسی مورد استفاده در محاسبه m:n بود که رایجترین مقادیر k آنهایی هستند که میتوان از $2, 3$ (و به میزان کمتر از $\bar{10}$) با فرآیند نصف کردن بدست آورد.

فصل ۲

روش های مدرن برای بازسازی جدول ۲:n

از زمانی که این جدول کشف شد، بسیاری از نویسندگان تلاش کردند جدول ۲:n RMP را بازسازی کنند. عیب معمول در بیشتر این تلاش ها این است که با استفاده از نمادگرایی مدرن برای توضیح جدول، ساختار خاص متن باستانی از بین می رود و در نتیجه دستکاری ساده در شکل مدرن منبع ممکن است به راحتی در شکل باستانی اعمال نشود که اغلب کل فرآیند را مشکوک میکند. بنابراین هنگام تجزیه و تحلیل متون ریاضی باستانی با استفاده از نمادهای مدرن، باید بیش از حد متعاصر بود.

نویسندگان مختلف خاطر نشان کردند که برای یک عدد صحیح فرد m همیشه می توان با استفاده از برابری، تجزیه ۲:n را پیدا کرد.

$$2:n = \frac{1}{(n+1)/2} + \frac{1}{n(n+1)/2} \tag{۱}$$

اگر n باp (عدد اول) جایگزین شود، این تنها 2 جمله ای نا بدیهی تجزیه $p : 2$ است.با این حال، تجزیه مصری $n : 2$ با (1) موافق نیست به جز چند مقدار اول n (باقی مانده اعداد اول به صورت مجموع سه یا چهار کسر واحد تجزیه می شوند.) این باعث شد که برخی از نویسندگان مدرن روشی را پیشنهاد کنند که در آن $pq : 2$ به صورت $\bar{q}$ ضربدر $p : 2$ تجزیه می شودبه عنوان مثال با اعمال (1) به $p = 3{,}\bar{\bar{3}} = \bar{2} + \bar{6}$ به دست می آید و بنابراین تجزیه هر مضرب 3 می تواند به صورت زیر انجام شود:

$$2:3q = \frac{1}{q} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2q} + \frac{1}{6q} \tag{۲}$$

اگر $\bar{6} + \bar{2}$ به عنوان تجزیه استاندارد $\bar{\bar{3}}$ پذیرفته شود، پس تجزیه مصری $p2$: برای هر p اول تا $11(1)$ درست است و با انتخاب p مناسب تجزیه ی:

$$2:pq = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{(p+1)/2} + \frac{1}{p(p+1)/2}\right] \tag{۳}$$

هر عدد ترکیبی n در جدول را پوشش می دهد. به عبارت دیگر، این روش استدلال می کند که مصریان از (1) برای تجزیه اعداد اول 3 ، 5 ، 7 و 11 استفاده می کردند و سپس مضرب های آن اعداد اول را مطابق با (3) تجزیه می کردند. این که مصریان از استفاده

از این فرآیند در $p = 11$ دست کشیدند، به عنوان نشانه ای تعبیر شد که آنها از نوعی غربال اولیه مانند غربال اراتوستن استفاده کرده بودند.این دیدگاه با توجه به این واقعیت گرفته شد که 11 اولین عدد اول است که مربع آن بزرگتر از 101 است، آخرین ورودی جدول. یکی از مشکلات این استدلال این است که اگر n یک عدد مرکب در جدول باشد، n را همیشه می توان به صورت pq با p اول کوچکتر یا مساوی هفت نوشت. مشکل دیگر این است که این روش توضیح قانع‌کننده‌ای درباره این که چرا عدد اول 23 ، باوجود اینکه بزرگ‌تر از 11 است، نیز طبق (1) تجزیه می‌شود، ارائه نمی‌دهد..

معادله (3) تجزیه یافت شده در RMP را برای همه pq = n به جز 35 ، 91 و 95 به دست می دهد. در همه موارد، p کوچکترین ضریب اول n است به جز $n = 55$ ، که در آن p به جای 5 ، 11 در نظر گرفته شد. همانطور که برای 35 : 2 و 91 : 2 تجزیه می شوند براساس:

$$2 : pq = \frac{2}{p+q} \times \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \quad (۴)$$

در [۲]، پیشنهاد شده است که این مربوط به میانگین حسابی و هارمونیک p و q است. در نهایت، 95 : 2 به عنوان 5 برابر تجزیه 19 تجزیه شد.پس داریم:

$$2 : 95 = \bar{5} \times (1\bar{2} + \bar{7}6 + 1\bar{1}4) = \bar{6}0 + 3\bar{8}0 + 5\bar{7}0$$

برای اعداد اول باقیمانده (13) ، روشی که برای اولین بار توسط Hultsch F. در سال 1895 کشف شد و سپس توسط E.M. Bruins در سال 1945 دوباره کشف شد، کار را انجام می دهد [۵].این معادل یافتن عدد a (معمولاً مرکب) است به طوری که $p/2 < a < p2ap$ برابر است با مجموع دو یا سه مقسوم علیه از.a آنجا که:

$$\frac{2}{p} - \frac{1}{a} = \frac{2a-p}{ap} or \frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{2a-p}{ap} \quad (۵)$$

تجزیه را می توان به راحتی پس از یافتن مقسوم علیه a کامل کرد. به عنوان مثال، برای یافتن تجزیه 37 : 2 ، a را به عنوان عدد مرکب 24 در نظر بگیرید. سپس $2ap = 22437 = 11$. از آنجایی که 24 بر 8 و 3 بخش پذیر است که مجموع آنها 11 است، می توانیم بنویسیم:

$$2 : 37 = \frac{1}{24} + \frac{1}{37} \times \left(\frac{8}{24} + \frac{3}{24}\right) = \bar{2}4 + \bar{3}7 \times (\bar{3} + \bar{8}) = \bar{2}4 + 1\bar{1}1 + 2\bar{9}6$$

موافق با تجزیه اهمس. مشکل این روش این است که نحوه انتخاب عدد a را مشخص نمی کند. علاوه بر این، از تکنیک های ریاضی (مدرن) استفاده می کند که به صراحت در منابع مصری موجود ذکر نشده است.

یک روش مبتنی بر منبع بیشتر توسط Waerden der van B. در مقاله خود به نام Table (۲:n) in the Rhind Papyrus خلاصه شده است. این روش 50 ورودی جدول را به پنج گروه تقسیم می کند که اولین آنها مطابق (2) تجزیه می شود. گروه دوم با استفاده از روش تقسیم مصری (به بخش قبل مراجعه کنید) و گروه سوم با ضرب مخرج تجزیه در گروه دوم در عدد مناسب تجزیه می شوند. گروه چهارم با استفاده ازبه اصطلاح اعداد کمکی تجزیه می شود و گروه پنجم شامل موارد استثنایی 35 ، 91 و 101 است.

اگرچه روش بر اساس تکنیک های مصری است، عبدالرحمان عبدالعزیز(نویسنده مقاله) فکر می کند که تقسیم جدول به این تعداد زیادی از گروه ها ضروری نیست.

تلاش دیگری برای تجزیه سیستماتیک $n : 2$ توسط R.J انجام شد. گیلینگز در کتاب ریاضیات در زمان فراعنه [۶]. با در نظر گرفتن تمام تجزیه های احتمالی $n : 2$ ، گیلینگز استدلال کرد که اهمس انتخاب خود را بر اساس قانون پنج حکم انجام داده است. به طور خلاصه، دستور 1 مخرج های بیش از سه رقم را حذف می کند. دستور 2 تجزیه بیش از چهار عبارت را مستثنی می کند. دستور 3 تجزیه بی اهمیت را ممنوع می کند. دستور 4 بیان می کند که کوچک بودن عدد اول ملاحظات اصلی است. ودستور 5 فرض می کند که اعداد زوج به اعداد فرد ترجیح داده می شوند. اگرچه سه اصل اول به طور کلی صادق هستند، روش کلی، Gillings را به بحثی با .Bruckheimer M و .Salomon Y کشاند. برای یک چیز، Gillings در مجموع 22295 تجزیه ممکن را ارائه می دهد، در حالی که تعداد ارائه شده توسط بروکهایمر و سالومون تقریباً 28000 است. کاستی های جزئی و نه چندان جزئی دیگری نیز از جانب گیلینگ ذکر شده است. اما .Bruins E.M در انتقاد از روش Gillings با به چالش کشیدن خود احکام یک قدم فراتر رفت. طبق گفته بروینز [۳]، اهمس هیچ تمایلی به اعداد زوج نداشت، که با اصل 5 در تضاد است. با این حال، در [۱۱] با ذکر موارد متعددی که در آن حکم نقض شده است، انتقاد جدی تری از حکم 4 وارد می شود. از این نظر، خواننده متوجه خواهد شد که حقیقت بیشتر شبیه به خلاف دستور $Gillings4$ است.

اخیراً، .Imhausen، A بر اساس کار .Ritter، J روشی را توسعه داده است که بر ساختار الگوریتمی ریاضیات مصر تأکید می کند [۷]. برای یک مسئله معین، روش یک الگوریتم عددی و یک الگوریتم نمادین ایجاد می کند. در حالی که الگوریتم عددی با حفظ اعداد استفاده شده در مسئله اصلی به منبع نزدیک می شود، الگوریتم نمادین ساختار مسئله را ارائه می دهد و بنابراین آن را به راحتی با مسائل دیگر قابل مقایسه می کند. این روش امیدوارکننده است اما فقط برای متون مشکل و نه برای متون جدول اعمال شده است. استفاده از روش بر روی متون جدول، جدول $n : 2$ در این مورد، مشکل ساز است، زیرا تجزیه $n : 2$ یک پاسخ منحصر به فرد به دست نمی دهد. اگر برخی از اطلاعات دیگر، به ویژه عبارت اول ،a به صورت پیشینی شناخته شوند، به راحتی می توان بر این مشکل غلبه کرد (عبدالرحمان عبدالعزیز نشان خواهد داد که این عدد اول a است، بیش از هر چیز دیگری، که کلید باز کردن قفل جدول $n : 2$ را دارد.) متأسفانه، در هیچ کجای RMP اهمس به ما نمی گوید که a چگونه انتخاب شده است. به همین دلیل، یافتن a در هسته روش برای تجزیه $n : 2$ است که در بخش زیر پیشنهاد خواهد کرد.

فصل ۳

روشی جدید برای بازسازی جدول ۲:n

اگرچه مصری ها به تجزیه بی اهمیت $\bar{n} + \bar{n}$ یا تجزیه با مخرج بسیار بزرگ اجازه نمی دادند، اما هنوز راه های ممکن زیادی برای تجزیه $2 : n$ داشتند. حتی امروز، روش تجزیه $2 : n$ به طور کامل درک نشده است. فقدان منابع اصلی، تعیین فرآیند دقیقی را که مصریان باستان از طریق آن کسرهای فرد را از $\bar{3}$ تا $\bar{101}$ تکرار می کردند بسیار دشوار می کند. با این حال، نظر این نویسنده این است که تکنیک‌های مورد استفاده در روشی که در زیر توضیح داده شده است، بیشتر از هر یک از روش‌های پیشنهادی قبلی برای ترکیب جدول $2 : n$ مرتبط با روش اصلی است.

۱.۳ مفاهیم اساسی

از آنجایی که فقط مقادیر فرد n در جدول ظاهر می شود، می توان فرض کرد که مصری ها از این واقعیت آگاه بودند که $2 : 2n$ همان n است. نتیجه این است که کسر واحد با مخرج زوج را می توان به راحتی تکثیر کرد و از این رو کسر واحد بر کسری با مخرج فرد ارجحیت دارد. بدون احتساب $2/3$ ، جدول دارای 103 کسر زوج و تنها 24 کسر فرد است. همچنین می توان فرض کرد که مصری ها اجازه ندادند که مخرج یک کسری به طور دلخواه بزرگ شود. در حال حاضر، اجازه دهید دستور Gillings 1 را بپذیریم که هیچ مخرجی نباید به اندازه هزار باشد. این برای همه ورودی‌های جدول صدق می‌کند، جایی که بزرگ‌ترین عبارت (مخرج) 890 است. در واقع، تنها 13 عبارت از 500 فراتر می‌روند که 10 مورد از آنها زوج هستند.

در $RMP16$ همانی $1 = \bar{6} + \bar{3} + \bar{2}$ را پیدا می کنیم. ضرب هر دو طرف همانی در n منجر به برابری می شود.

$$\bar{n} = \bar{2n} + \bar{3n} + \bar{6n} \tag{۶}$$

RMP ۱۷-۲۰شکی باقی نمی گذارد که مصریان از این برابری آگاه بودند، که معادل این است که می گویند نیم، یک سوم و یک ششم هر عددی به خود عدد جمع می شود. با افزودن n به دو طرف (6) ، تجزیه به دست می آید.

$$2 : n = \bar{n} + \bar{2n} + \bar{3n} + \bar{6n} \tag{۷}$$

یک مورد خاص از (7) را می توان به وضوح در آخرین ورودی جدول مشاهده کرد، جایی که ۲:۱۰۱ به صورت زیر تجزیه می شود:

$$1\bar{0}1 + 2\bar{0}2 + 3\bar{0}3 + 6\bar{0}6$$

در واقع، اهمس این تجزیه را با محاسبه $\bar{2}$ از $\bar{\bar{3}}1\bar{0}1$ از $1\bar{0}1$ ، و $\bar{6}$ از $1\bar{0}1$ قبل از افزودن نتایج به $1\bar{0}1$ انجام داد. از آنجایی که اولین کسر تجزیه $1\bar{0}1$ است و سه کسر آخر به $1\bar{0}1$ می رسد، ما به وضوح می بینیم که مصری ها از استفاده از تجزیه بی اهمیت $\bar{n} + \bar{n}$ خودداری کردند.

برای هر کسی که پاپیروس رایند را می‌خواند، بلافاصله مشخص می‌شود که $RMP16-20$ مجموعه‌ای از مشکلات مرتبط نزدیک را تشکیل می‌دهد و همین امر برای $RMP21-23$ نیز صادق است. مجموعه اخیر به مسائلی با ماهیت متفاوتی می پردازد که مشکلات در حال تکمیل نامیده می شود. به عنوان مثال، $RMP22$ می گوید. "$\bar{\bar{3}} + \bar{30}$ به 1 را کامل کنید." راه حل را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد: $\bar{\bar{3}}$ از 30 برابر با 20 و $\bar{30}$ از 30 برابر با 1 است که در مجموع 21 می شود. از آنجایی که 30 از 21 در 9 بیشتر است، در 30 ضرب کنید تا به 9 برسد. به این معنا که:

$$\begin{array}{rl} 1 & 30 \\ /\bar{10} & 3 \\ /\bar{5} & 6 \\ Result: & 9 \end{array}$$

از آنجایی که $9 = 6 + 3$ ، برای تکمیل کل باید $\bar{10} + \bar{5}$ را اضافه کنیم. برای اثبات، $\bar{\bar{3}}$، $\bar{5}$، $\bar{10}$ و $\bar{30}$ را جمع کنید تا به 1 برسید. به عنوان بخش های 30 این کسرها 20631 هستند که در مجموع 30 می شود. $RPM22$ بینشی عمیق از محاسبات مصری به ما می دهد. کاری که اهمس انجام داده است معادل نوشتن $\bar{\bar{3}} + \bar{30}$ به عنوان $21/30$ است، و از آنجایی که $30 - 21 = 9$ سپس $9/30$ را به $\bar{10} + \bar{5}$ تقسیم می کند. توجه داشته باشید که شکستن $9/30$ آسان بود زیرا 9 مجموع 6 و 3 است، که هر دو مقسوم علیه 30 هستند. منابع مصری موجود مملو از مثال هایی هستند که در آن کسر غیرمصری m:n با نوشتن m به عنوان مجموع مقسوم علیه های متمایز n تجزیه می شود. روش رایج دیگری که مصریان برای شکستن کسری غیرمصری استفاده می کنند، نوشتن آن به صورت $\bar{\bar{3}}$ به اضافه کسری واحد است.

به عنوان مثال، در تجزیه $53:2$ پاسخ گرفتن $\bar{30}$از53 به صورت$\bar{10}$+$\bar{\bar{3}}$+1داده می شود. از آنجایی که $53/30 = 1+23/30$، اهمس می تواند به راحتی با نوشتن $23/30$به عنوان$\bar{10} + \bar{\bar{3}} = 30/(3 + 20)$پاسخ را بیابد. این دو راه شکستن کسر غیر مصری پیوسته توسط کاتبان مصری استفاده می شد. به طور رسمی، یک کسر غیر مصری$m : n$را می‌توان تقلیل‌پذیر نامید اگر بتوان آن را به‌صورت مجموع دو کسر واحد یا به‌عنوان مجموع کسری واحد و$\bar{\bar{3}}$نوشت، که در آن مخرج هر کسر واحد مقسوم علیه n باشد. وقتی کسر تقلیل پذیر m:n به عنوان مجموع دو کسر مصری نوشته نشود، با m/n نشان داده می شود.

تعبیر مصری $\bar{\bar{3}}$در لغت به معنای "دو قسمت" است که $\bar{3}$را "قسمت سوم" می سازد که کل را کامل می کند. در ابتدا، مصریان نمادی برای$3/4$ نیز داشتند که بعداً با $\bar{4} + \bar{2}$ جایگزین شد. اگر بپذیریم کسر$3/4$ را «سه قسمت» و متمم آن$\bar{4}$را «قسمت چهارم» و غیره بنامیم، آنگاه برای$\bar{k}101 \leq k \leq 2$مکمل یک کسر مصری یا تقلیل پذیر است فقط در صورتی که k یکی از اعداد فهرست شده در جدول2 باشد. توجه کنید که$5/6$به صورت $\bar{6}$+$\bar{\bar{3}} = 6/(1+4)$تجزیه شد، اگرچه می‌توانست به صورت $\bar{3}$+$\bar{2} = 6/(2+3)$شکسته

جدول ۲: کسرهای مصری یا تقلیل پذیر به فرم $(k-1)/k$

k	2	3	4	6	12
$(k-1)/k$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\bar{\bar{4}}$	$\bar{\bar{6}}$	$\bar{\bar{12}}$

شود. در واقع هر دو شکل در RMP استفاده می شوند. برای مثال، در محاسبه$11:2$، اهمس $\bar{6}$از11 را به صورت$\bar{\bar{3}}+1+\bar{6}$می نویسد، در حالی که در کار کردن$17\bar{6}:2$ از17 را به صورت$2+\bar{2}+\bar{3}$می نویسد. به طور مشابه، او $7/10$را به عنوان$\bar{\bar{3}}+3\bar{0}$در جدول$10:n$پس از تجزیه$101:2$و به عنوان$\bar{5}+\bar{2}$در 54RMP می شکند. این انعطاف در بیان یک کسر به دو شکل متفاوت باید در ذهن هر کسی که برای بازسازی جدول$n:2$ تلاش میکند، باشد.

قبل از اینکه به روش خود برای رمزگشایی جدول ادامه دهیم، چند نکته لازم است. ابتدا ورودی های جدول را به دو گروه $G1$و$G2$تقسیم می کنیم (این تقسیم بندی مصنوعی است و فقط برای سهولت کار ما انجام می شود). گروه$G1$شامل 29ورودی است که به صورت مجموع دو کسر واحد همراه با$95=n$ بیان می شود.ما95را در$G1$قرار می دهیم زیرا دو کسر آخر آن، $3\bar{8}0$ و $5\bar{7}0$ به$2\bar{2}8$می رسد، کسری واحد متفاوت از$9\bar{5}$. گروه$G2$ شامل 20ورودی باقی مانده است که به صورت مجموع کسرهای سه یا چهار واحدی بیان می شود. دوم، روش ما هر دو گروه را بدون نیاز به تمایز بین اعداد اول و مرکب کنترل می کند. علاوه بر این، روش تجزیه عناصر$G2$ گسترش طبیعی روش مورد استفاده برای تجزیه عناصر$G1$خواهد بود. سوم، یک قانون ساده برای تعیین اولین کسر در هر تجزیه ارائه خواهیم کرد. در نهایت، ما فقط از تکنیک هایی استفاده خواهیم کرد که به شکلی صریح درRMPذکر شده اند.

۲.۳ گروه G۱

بگذارید n عنصری از $G1$ باشد. سپس یافتن یک تجزیه قابل قبول (2جمله ای)$n:2$معادل یافتن دو عدد a و b است به طوری که$2/n=\bar{a}+\bar{b}$از آنجایی که استفاده از یک کسر دو بار مجاز نیست، می توانیم فرض کنیم که a<n<b. از طرف دیگر، a باید بزرگتر از $n/2$باشد، زیرا در غیر این صورت $\bar{a}$ بزرگتر از $2/n$خواهد بود. بنابراین باید$n/2<a<n$داشته باشیم. فرض کنید M و R همانطور که در بخش1 تعریف شده است، یعنی (با استفاده از نماد مدرن)، $M=n/a$ و$R=2-M$. اگر Q قسمت کسری M باشد، $Q=(n-a)/a$ و R مکمل Q به1است. از آنجایی که تجزیه n به طور کامل توسط a، Q و R تعیین می شود، ما به طور طبیعی روی این قسمت های تجزیه تمرکز خواهیم کرد. در واقع، ما نشان خواهیم داد که اکثریت قریب به اتفاق عناصر G۱ به صورت$n=\bar{a}+\bar{k}n:2$تجزیه می شوند، جایی که a بزرگترین عددی است که $(k-1)/k$ شکل کاهش یافته Q) متعلق به مجموعه کسرهای مصری $\bar{\bar{3}}\bar{2}$یا مجموعه کسرهای تقلیل پذیر$3/4, 5/6, 11/12$. از تعاریف Q و R مشخص است که ساده ترین اعداد برای تجزیه اعدادی هستند که برای آنها$Q=R=\bar{2}$باشد. این اعداد با مضرب های3مطابقت دارند. در واقع، اگر n مضرب3باشد و a در نظر گرفته شود.$\bar{\bar{3}}$از n، سپس $n:a=1+\bar{2}$ و بنابراین$Q=R=\bar{2}$از آنجایی که$\bar{n}2$از n برابر$\bar{2}$ است، تجزیه را صورت زیر بدست می آوریم:

$$2:n=\bar{a}+2\bar{n}, a=2n/3. \tag{۸}$$

شواهد زیادی وجود دارد که نشان می‌دهد مصری‌ها از این روش برای یافتن $n:2$ آگاه بودند، زمانی که n مضرب 3 باشد. با این حال، خواهیم دید که حتی اگر مصریان از (8) برای تجزیه مضرب 3 استفاده نمی کردند، روش کلی ما به هیچ وجه تحت تأثیر قرار نمی

گیرد. اعداد بعدی برای تجزیه اعدادی هستند که برای آنها $Q = \bar{\bar{3}}R = \bar{3}$ است. این اعداد مربوط به مضربهای 5 است. در این مورد، با گرفتن a به 3 ضربدر $\bar{5}n$ ، $Q = \bar{\bar{3}}$ و $R = \bar{3}$ به دست می آید.بنابراین تجزیه به صورت زیر بدست می آید:

$$2 : n = \bar{a} + \bar{3n}, a = 3n/5. \tag{۹}$$

اگرچه ممکن است اهمس از این تجزیه آگاه بوده باشد، اما خواهیم دید که او آن را برای همه مضربهای 5 که با (8) پوشش داده نشده اند، استفاده نکرده است. یکی از اشکالات این تجزیه این است که کسرهای واحد فرد را تولید می کند، و قبلاً ذکر کردیم که مصری ها کسرهای زوج را ترجیح می دادند زیرا به راحتی می توان آنها را تکثیر کرد. معادلات (8) و (9) موارد خاصی از یک روش عمومی تر هستند که تمام عناصر $G1$ را تجزیه می کند. اگر n عنصری از $G1$ باشد که با (8) یا (9) پوشانده نشده است، یعنی Q یک کسر مصری نیست، آنگاه این روش معادل یافتن بزرگترین a است که یک Q تقلیل‌پذیر به دست می‌دهد که مکمل R آن کسری واحد است. به عبارت دیگر، با شروع از $n - 1$ به پایین، بگذارید a اولین عدد باشد به طوری که $\bar{a}$ از n معادل $1 + (k-1)/k$ برای $k = 4$ ، 6 ، یا 12 باشد. از آنجایی که $\bar{kn}$ n ، $\bar{k}$ است، ما $\bar{a}$ از n به اضافه $\bar{kn}$ از n برابر با $1 + (k-1)/k + 1/k = 2$ داریم. نتیجه می شود که:

$$2 : n = \bar{a} + \bar{kn}. \tag{۱۰}$$

تصادفی نیست که n عنصری از $G1$ است اگر و فقط اگر اولین عدد a وجود داشته باشد به طوری که $(n-a)/a$ معادل $(k-1)/k$ باشد، جایی که k یکی از ورودی های جدول 2 است. اینها تنها مقادیر k هستند که کسر $(k-1)/k$ مصری یا قابل تقلیل است. آنها به ترتیب منجر به تجزیه مضرب های اعداد اول 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 23 می شوند. این نشان می دهد که فرآیند تجزیه نیازی به تمایز بین مقادیر اولیه و ترکیبی n ندارد. نتیجه این است که رابطه بین 11 که بزرگترین اول تجزیه شده با استفاده از (1) است و 101 که آخرین ورودی در جدول است تا حدودی ساخته شده است. ما روش خود را با دو مثال نشان می دهیم. ابتدا $n = 15$ را می گیریم. سپس باید $8 \le a \le 14$ داشته باشیم. اما فقط $a = 10$ و$a = 9$ یک Q مصری یا تقلیل پذیر را به دست می دهند که مکمل R آن یک کسر واحد است. تجزیه های مربوطه به صورت زیرهستند:

$$\begin{array}{ccccc} *10 & \bar{2} & \bar{2} & \bar{10} & \bar{30} \\ 9 & \bar{\bar{3}} & \bar{3} & \bar{9} & \bar{45} \end{array}$$

چهار ستون نشان دهنده a ، Q و R مجموعه کسرهای واحد حاصله است. ستاره (*) تجزیه داده شده توسط اهمس را نشان می دهد. از آنجایی که 15 بر 3 بخش پذیر است، تجزیه انتخاب شده را می توان با استفاده از (8) به دست آورد. با انجام این کار، نیازی به تجزیه بیشتر نیست. اما حتی اگر تجزیه $\bar{9} + \bar{45}$ نیز در نظر گرفته شود، نادیده گرفته می شود زیرا از کسرهای فرد تشکیل شده است. بعد، $n = 77$ را می گیریم. سپس تنها تجزیه قابل قبول به صورت زیر است:

$$\begin{array}{cccccc} *44 & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{44} & \bar{308} \\ 45 & \bar{\bar{3}} & \bar{6} & \bar{6} & \bar{42} & \bar{462} \end{array}$$

جدول ۳: عناصر نامنظم G۱

n	منظم	RMP	تجزیه های دیگر
35	$\overline{21}\quad\overline{105}$	$\overline{42}\quad\overline{30}$	$\overline{18}\quad\overline{630}$ ، $\overline{20}\quad\overline{140}$
55	$\overline{33}\quad\overline{165}$	$\overline{30}\quad\overline{330}$	$\overline{40}\quad\overline{88}$
91	$\overline{52}\quad\overline{364}$	$\overline{70}\quad\overline{130}$	$\overline{49}\quad\overline{637}$
95	$\overline{57}\quad\overline{285}$	$\overline{60}\quad\overline{380}\quad\overline{570}$	$\overline{60}\quad\overline{228},\overline{50}\quad\overline{950}$

از آنجایی که هر دو تجزیه از جمله های زوج تشکیل شده است، اهمس، مثل همیشه، یکی را انتخاب کرد که بیشترین a را داشته باشد. پس از یافتن اولین (بزرگترین) a متوقف می شود، فرآیند جستجو با تجزیه مورد نظر برای همه عناصر $G1$ به جز 35 ، 55 ، 91 و 95 که نامنظم می نامیم، پایان می یابد. برای هر یک از عناصر نامنظم، جدول 3 تجزیه (منظم) تولید شده توسط روش توصیف شده در بالا را فهرست می کند. دنبال آن تجزیه موجود در RMP را فهرست می کند. ستون آخر تمام تجزیه های 2 جمله ای دیگر را فهرست می کند به طوری که $n/2 < a < n$ و جمله دوم b کمتر از 1000 باشد. توجه کنید که برای هر یک از مضرب های 5 در جدول 3 ، روش ما یک جفت کسر واحد فرد متناسب با (9) به دست می دهد. در حالی که تجزیه یافت شده در RMP از کسری زوج تشکیل شده است. ممکن است به همین دلیل است که تجزیه منظم نادیده گرفته شده است. در مورد سایر عناصر $G1$ با تجزیه های فرد، یعنی 5، 25، 65 و 85 هیچ تجزیه 2 جمله ای حتی برای هیچ a در محدوده مناسب وجود ندارد. اما بیشتر وجود دارد. چهار ورودی در جدول 3 وجوه مشترک کاملاً ظریفی دارند. آنها تنها غیرضرب های 3 هستند که تجزیه دارند که در آن هر دو Q و R را می توان به صورت مجموع حداکثر دو کسر مصری بیان کرد و n/R یک عدد کامل است. با نگاهی دقیق تر به ورودی های نامنظم، معنای آخرین عبارت روشن خواهد شد. در هر مورد، ما متوجه خواهیم شد که انتخابی که توسط اهمس انجام شده است دشوار است.

$n = 35$ را در نظر بگیرید. از جدول 3 می بینیم که چهار تجزیه 2 جمله ای وجود دارد. با این حال، تجزیه $\overline{630} + \overline{18}$ در نظر گرفته نخواهد شد، زیرا $R = 17 : 18$ را به دست می دهد، که قابل کاهش نیست. بنابراین، تجزیه های زیرقابل قبول هستند:

$$*30 \quad \bar{6} \quad 5/6 \quad \overline{30} \quad \overline{42}$$
$$21 \quad \bar{\bar{3}} \quad \bar{3} \quad \overline{21} \quad \overline{105}$$
$$20 \quad \bar{2} \quad \bar{4} \quad \bar{4} \quad \overline{20} \quad \overline{140}$$

تجزیه منظم ($a = 21$) رد شد زیرا مجموع دو کسر فرد است. از آنجایی که دو تجزیه دیگر از جمله زوج تشکیل شده‌اند، اهمس تجزیه‌ای را انتخاب کرد که بیشترین جمله اول را داشته باشد ($a = 30$) . اگر 5/6 باقیمانده تجزیه انتخاب شده به صورت $\bar{3} + \bar{2}$ نوشته می شد، تجزیه $\overline{105} + \overline{70} + \overline{30}$ را دریافت می کردیم. در عوض، اهمس 5/6 را مانند یک کسر واحد در نظر گرفت، و به همین دلیل است که کمی زمان برد تا توضیح دهد که چگونه مخرج دوم بدست می آید.او نوشت:

$$35 \quad ۳۰ \quad 1 \quad \bar{6} \quad ۴۲ \quad \bar{\bar{3}} \quad \bar{6}$$
$$۶ \quad 7 \quad 5$$

اعداد کمکی 6 ، 7 و 5 در ردیف دوم در هیچ تجزیه دیگری نشان داده نمی شوند. از آنها برای یافتن عدد b استفاده می شود که معادله $\bar{b}$ از 35 برابر $6/5$ را حل می کند. اطلاعات اضافی مورد نیاز است زیرا تا این مرحله R مجموع کسرهای واحد بوده است و بنابراین یافتن عبارات باقی مانده ساده بود. به عنوان مثال، اگر $R = \bar{k}$ آنگاه $b = kn$ و زمانی که R مجموع دو یا سه قسمت باشد، همین امر صادق است. اما در این مورد، $R = 5/6$ و بنابراین $R = 6/51$ $/$.برای بدست آوردن b داریم:

$$b = \frac{6}{5} \times 35 = 6 \times 7 = 42$$

روش دقیق محاسبه b ممکن است هرگز مشخص نباشد، اما منطقی است که بگوییم این نزدیکترین روشی است که اهمس برای استفاده از کسر به معنای امروزی آن دارد. در مرحله بعد، $n = 91$ را در نظر می گیریم، زیرا مشابه مورد $n = 35$ است. در این مورد، تجزیه $6\bar{3}\bar{7} + 4\bar{9}$ نادیده گرفته می شود زیرا به $Q = 42 : 49$ غیر قابل تقلیل منجر می شود.باقی مانده تجزیه ها به صورت زیر هستند:

$$\begin{array}{rrrrrr} *70 & \bar{5} & 1\bar{0} & 703\bar{0} & 7\bar{0} & 13\bar{0} \\ & 52 & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{5}23\bar{6}4 \end{array}$$

مجدداً، تجزیه انتخاب شده ممکن است به صورت زیر بیان شود (اهمس اعداد کمکی 10 ، 13 و 7 را ننوشت)

$$\begin{array}{cccccccc} 91 & ۷۰ & 1 & \bar{5} & 1\bar{0} & ۱۳۰ & \bar{\bar{3}} & 3\bar{0} \\ & & & & & ۱۰ & 13 & 7 \end{array}$$

با نوشتن $R = 7/10$ به عنوان $\bar{5} + \bar{2}$ به جای $3\bar{0} + \bar{\bar{3}}$ اهمس می توانست تجزیه $4\bar{5}5 + 1\bar{8}2 + 7\bar{0}$ را به دست آورد. اما مانند مورد $n = 35$ انتخاب یک تجزیه 3 جمله ای با کسر فرد نسبت به تجزیه 2 جمله ای با مخرج زوج هیچ سودی ندارد.

دیدیم که در کار کردن $35 : 2$ ، اهمس اعداد 5 ، 6 ، و 7 را زیر 42 ، 35 و 30 نوشت. از آنجایی که $542 = 635 = 730 =$ 210 ممکن است که او داشته باشد. کمترین مضرب مشترک سه عدد را پیدا کرد. همین ایده (به طور ضمنی) در تجزیه 91 استفاده شده است، اما در تجزیه دیگری وجود ندارد. علاوه بر این، در فرآیند محاسبه $91 : 2$ ، اهمس کلمه find را قبل از گرفتن $7\bar{0}$ از 91 و دوباره قبل از گرفتن $13\bar{0}$ از 91 نوشت. این تنها تجزیه ای است که در آن کلمه find دو بار نوشته می شود. برای هر دو 35 و 91 ، ما شاهد تغییر آشکار رویه عادی هستیم. در واقع، 35 و 91 تنها عناصر $G1$ هستند که a بزرگتر از $\bar{\bar{3}}$ از n است و b مضرب n نیست.

در حال حاضر برای $n = 55$ تجزیه ممکن به صورت زیر است:

$$\begin{array}{cccccc} 40 & \bar{4} & \bar{8} & 5 & 4\bar{0} & 8\bar{8} \\ 33 & \bar{\bar{3}} & & \bar{3} & 3\bar{3} & 1\bar{6}5 \\ *30 & \bar{\bar{3}} & \bar{6} & \bar{6} & 3\bar{0} & 33\bar{0} \end{array}$$

جدول ۴: مضرب ۳ که n/R برای آنها یک عدد کامل است

$2:n$		R	Q	a	n
$\bar{12}$	$\bar{20}$	$3/4$	$\bar{4}$	12	15
$\bar{36}$	$\bar{60}$	$3/4$	$\bar{4}$	36	45
$\bar{60}$	$\bar{100}$	$3/4$	$\bar{4}$	60	75

اهمس بین تجزیه $\bar{30} + \bar{330}$ وتجزیه منظم $\bar{33} + \bar{165}$ اولی را انتخاب کرد زیرا اولی از مخرج زوج تشکیل شده است. البته، اهمس می‌توانست همانگونه که برای 35 و 91 انجام داده بود، تجزیه را با بزرگترین جمله اول انتخاب کند. ($\bar{40} + \bar{88}$ در این مورد). با این حال، یکی از مزایای تجزیه $\bar{30} + \bar{330}$ نسبت به تجزیه $\bar{40} + \bar{88}$ این است که 330 مضربی از 55 است در حالی که 88 نیست. از آنجایی که مخرج دوم هر تجزیه منظم مضربی از n است، منطقی است که تجزیه فرد 55 را با تجزیه منظم با جمله زوج جایگزین کنیم. علاوه بر این، با نوشتن $R = 5/8$ به عنوان $\bar{2} + \bar{8}$ می بینیم که تجزیه $\bar{40} + \bar{88}$ معادل تجزیه منظم $\bar{440} + \bar{110} + \bar{40}$ است. از دو تجزیه منظمم، به وضوح $\bar{30} + \bar{330} + \bar{440} + \bar{110} + \bar{40}$ ترجیح داده می شود.

در نهایت، ما $n = 95$ را در نظر می گیریم. در این مورد، تجزیه $\bar{50} + \bar{950}$ نادیده گرفته می شود، زیرا Q قابل تقلیل تولید نمی کند، و بنابراین تجزیه های قابل قبول به صورت زیر هستند:

$$\begin{array}{cccccc} 60 & \bar{2} & \bar{12} & 52 & \bar{60} & \bar{228} \\ & 57 & \bar{\bar{3}} & \bar{3} & \bar{57} & \bar{285} \end{array}$$

تجزیه منظم $\bar{57}+\bar{285}$ نادیده گرفته می شود زیرا از کسرهای فرد تشکیل شده است. تنها گزینه باقی مانده اهمس $\bar{60}+\bar{282}$ است. اما از آنجایی که $12/5$ را می توان به عنوان مجموع دو کسر زوج $\bar{4}$ و $\bar{6}$ نوشت، اهمس تجزیه 3 جمله ای معادل $\bar{60} + \bar{380} + \bar{570}$ را انتخاب کرد. برخلاف موارد 35 و 91 در این مورد هر دو 380 و 570 حتی مضربی از 95 هستند و بنابراین ارزش آن را داشت که تجزیه 3 جمله ای را انتخاب کنیم. اهمس در این تجزیه گیر کرده بود زیرا نتوانست تجزیه منظم دیگری از دو جمله زوج پیدا کند، همانطور که برای $n = 55$ انجام داد.

تجزیه و تحلیل فوق ما را وادار می کند تا از تکنیک های مبتکرانه ای که باید در تجزیه ورودی های نامنظم استفاده شده است، قدردانی کنیم. این استدلال که تکنیک های مشابهی توسط مصری ها استفاده می شد را می توان با تجزیه و تحلیل سه مضرب 3 که وضعیت مشابهی برای آنها رخ می دهد تقویت کرد. تجزیه های مربوطه در جدول 4 آمده است. برای مثال، جمله دوم تجزیه نامنظم $\bar{20} : 15 = \bar{12} + 2$ را می توان با تقسیم 15 بر 3 و سپس ضرب کردن نتیجه در 4 به دست آورد. اکنون، $3/4$ را به عنوان $\bar{2} + \bar{4}$ بنویسید. ، تجزیه معادل $\bar{12} + \bar{30} + \bar{60}$ را به دست می آوریم. اهمس از آخرین تجزیه استفاده نکرده است، زیرا $2 : 15$ دارای تجزیه زوج منظم $\bar{10} + \bar{30}$ است. این با تجزیه $n = 55$ مطابقت دارد. البته ممکن است اهمس متوجه تجزیه نامنظم نشده باشد، زیرا ممکن است به عنوان مضرب 3 ، 15 مطابق با (8) تجزیه شده باشد.

۳.۳ گروه G۲

اگر n عنصری از $G2$ باشد، در آن صورت n نمی تواند تجزیه 2 جمله ای داشته باشد که در آن Q و R شرایطی را برآورده کنند که Q قابل کاهش است و R یک کسر واحد است. به عنوان گام بعدی طبیعی، اهمس شرطی را حفظ کرد که Q قابل تقلیل باشد، اما اجازه داد R مجموع دو یا سه کسر واحد باشد. اگر هنوز تجزیه یافت نشد، اهمس اجازه داد Q مجموع سه یا چهار کسر واحد باشد. به عنوان آخرین راه، او $n2$: را طبق (7) تجزیه کرد. برای هر n، ابتدا تجزیه های ممکن 3 جمله ای و سپس، در صورت لزوم، تجزیه های 4 جمله ای را فهرست می کنیم (تجزیه هایی با قطعات کمتر از $\overline{1000}$ فهرست نمی شوند). با بررسی دقیق این تجزیه ها، نشان خواهیم داد که به جز در موارد خاص، اهمس تجزیه را انتخاب نکرده است، اگرجمله های آن بیشتر از $n10$ باشد. همانطور که در مورد $G1$ تجزیه انتخاب شده معمولاً تجزیه ای است که بیشترین a را دارد، و تجزیه زوج (مگر اینکه بخشی از R کمتر از $\overline{10}$ داشته باشد) همیشه به تجزیه همان مرتبه با یک ترجیح داده می شود یا کسرهای فرد بیشتر.

اگر قوانین فوق را برای $G2$ اعمال کنیم، تقریباً در هر مورد تجزیه مطلوب حاصل می شود. به دلیل بسیاری از موقعیت‌های احتمالی که ممکن است ایجاد شود، ما مطمئن خواهیم شد که تک تک عناصر $G2$ را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. با انجام این کار، رویه زیربنایی به وضوح قابل مشاهده خواهد بود. با شروع با $n = 133$ جمله تجزیه ممکن به صورت زیراست:

$$\begin{array}{cccccccc}
10 & \bar{5} & \overline{10} & \bar{2} & \bar{5} & \overline{10} & \overline{26} & \overline{65} \\
*8 & \bar{2} & \bar{8} & \bar{4} & \bar{8} & \bar{8} & \overline{52} & \overline{104}
\end{array}$$

از آنجایی که تجزیه اول یک جمله فرد دارد، تجزیه دوم انتخاب شد زیرا فقط کسرهای زوج دارد. برای $n = 17$ ما سه تجزیه زیر را داریم:

$$\begin{array}{cccccccc}
*12 & \bar{3} & \overline{12} & \bar{3} & \bar{4} & \overline{12} & \overline{51} & \overline{68} \\
12 & \bar{3} & \overline{12} & \bar{2} & \overline{12} & \overline{12} & \overline{34} & \overline{204} \\
10 & \bar{2} & \bar{5} & \bar{5} & \overline{10} & \overline{10} & \overline{85} & \overline{170}
\end{array}$$

توجه داشته باشید که دو تجزیه اول دارای یک عدد اول هستند، $2a = 1$. اکنون، تجزیه دوم انتخاب نشد زیرا اهمس به R اجازه نداد جملات کوچکتر از 10 داشته باشد. از آنجایی که دو تجزیه دیگر هر کدام یک کسر فرد دارند، اهمس عبارت با اولین جمله بزرگتر(یا مخرج آخر کوچکتر)را ترجیح داد.

برای $n = 19$ ، داریم:

$$\begin{array}{cccccccc}
*12 & \bar{2} & \overline{12} & \bar{4} & \bar{6} & \overline{12} & \overline{76} & \overline{114} \\
12 & \bar{2} & \overline{12} & \bar{3} & \overline{12} & \overline{12} & \overline{57} & \overline{228}
\end{array}$$

از آنجایی که Q و بنابراین R (به ترتیب، $7/12$ و $5/12$) در هر دو تجزیه یکسان هستند، اهمس تصمیم گرفت که R را به عنوان $\bar{4} + \bar{6}$ به جای $\bar{3} + \overline{12}$ بشکند زیرا اولی از اعداد زوج تشکیل شده است. علاوه بر این، هر دو جمله $\bar{4} + \bar{6}$ کمتر از 10 هستند

در حالی که جمله دوم $\overline{12}+\bar{3}$ بزرگتر از 10 است. این مهم است، زیرا در تجزیه 17 ،اهمس $Q=5/12$ را به عنوان $\overline{12}+\bar{3}$ نوشت. به همین ترتیب، او $R=7/12$ را به عنوان $\bar{4}+\bar{3}$ در تجزیه 17 نوشت، اما $Q=7/12$ را به عنوان $\overline{12}+\bar{2}$ در تجزیه 19 نوشت.همه اینها نشان می دهد که نگه داشتن شرایط R کمتر از 10 یک بخش اساسی در تعیین چگونگی تجزیه n : 2 است. از سوی دیگر، اهمس در شکستن Q انعطاف پذیرتر بود، زیرا هیچ تاثیری در تجزیه نهایی $n2$: نداشت. به همین دلیل، ما فقط یک شکل از $Q=5/12$ را در تجزیه $n=17$ فهرست کردیم، در حالی که هر دو شکل $R=5/12$ را در تجزیه n = ۱۹ فهرست کردیم.

ممکن است تعجب کنید که چرا اهمس ۲:۱۹ را به صورت زیرتجزیه نکرد:

$$10 \qquad \bar{\bar{3}} \quad \bar{5} \quad \overline{30} \qquad \overline{10} \qquad \overline{10} \quad \overline{190}$$

این حتی شگفت‌انگیزتر است که بدانیم $\overline{30}+\bar{5}+\bar{3}=10:9=Q$ ورودی جدول 10 : n است. به طور مشابه، 13 : 2 را می توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$7 \qquad \bar{\bar{3}} \quad \bar{7} \quad \overline{21} \qquad \bar{7} \qquad \bar{7} \quad \overline{91}$$

ممکن است اهمس از این تجزیه استفاده نکرده باشد زیرا در هیچ جای جدول اجازه داده نشده است که Q به عنوان کسر 3 به علاوه دو واحد نوشته شود. مهمتر از آن، آخرین جمله Q در هر دو تجزیه برابر با $a3$ است. از آنجایی که هر جمله Q متفاوت از $\bar{\bar{3}}$ مقسوم علیه a برای هر ورودی در جدول است، ما معتقدیم که این محتمل ترین دلیل برای رد این تجزیه است. جالب توجه است که این تجزیه 13 و 19 در پاپیروس آخیم (یونانی) حدود 400 پس از میلاد یافت می شود. با این حال، حتی در پاپیروس آخیم، تجزیه $\overline{153}+\bar{9}=17:n2$ را نمی توان یافت. در این مورد، هیچ راه آسانی برای شکستن 9 : 8 $=Q$ وجود ندارد. برای مثال، گرفتن $\bar{\bar{3}}$ از 9 ، 6 را با باقیمانده 9 : 2 به دست می آورد، بازگشتی ناخواسته به جدول 2 : n .

برای $n=29$ ، داریم:

$$\begin{array}{cccccccccc}
20 & \quad & \bar{4} & \bar{5} & \quad & \bar{2} & \overline{20} & \quad & \overline{20} & \overline{58} & \overline{580} \\
18 & \quad & \bar{2} & \bar{9} & \quad & \bar{3} & \overline{18} & \quad & \overline{18} & \overline{87} & \overline{522}
\end{array}$$

از آنجایی که اولین تجزیه مجموع اعداد زوج است، باید آن چیزی باشد که اهمس انتخاب کرده است. اما جمله دوم R در هر دو تجزیه بزرگتر از 10 است و بنابراین هیچ یک از آنها قابل قبول نبود. در نتیجه، اهمس برای سومین عبارت در کنار a جستجو کرد و تجزیه را به دست آورد:

$$\begin{array}{l}
*24 \qquad \bar{6} \quad \overline{24} \qquad \bar{2} \quad \bar{6} \quad \bar{8} \qquad \overline{24} \quad \overline{58} \quad \overline{174} \quad \overline{232} \\
24 \qquad \bar{6} \quad \overline{24} \qquad \bar{2} \quad \bar{4} \quad \overline{24} \qquad \overline{24} \quad \overline{58} \quad \overline{116} \quad \overline{696} \\
20 \qquad \bar{2} \quad \overline{20} \qquad \bar{4} \quad \bar{5} \quad \overline{10} \qquad \overline{20} \quad \overline{116} \quad \overline{145} \quad \overline{290}
\end{array}$$

بدیهی است که اولین تجزیه آن چیزی است که باید انتخاب شود.

برای $n = 31$ ، داریم:

$$\begin{array}{ccccccccc}
*20 & \bar{2} & 2\bar{0} & \bar{4} & \bar{5} & 2\bar{0} & 1\bar{2}4 & 1\bar{5}5 \\
18 & \bar{\bar{3}} & 1\bar{8} & \bar{6} & \bar{9} & 1\bar{8} & 1\bar{8}6 & 2\bar{7}9
\end{array}$$

از آنجایی که هر یک از دو تجزیه دارای یک عدد فرد است، اولین مورد انتخاب می شود زیرا یک جمله اول بزرگتر دارد. برای $n = 37$ تنها تجزیه ممکن به صورت زیراست:

$$\begin{array}{cccccccc}
*24 & \bar{2} & 2\bar{4} & \bar{3} & \bar{8} & 2\bar{4} & 1\bar{1}1 & 2\bar{9}6
\end{array}$$

همانطور که انتظار می رود، این تجزیه یافت شده در RMP است.

برای $n = 41$ ، داریم:

$$\begin{array}{cccccccc}
*24 & \bar{\bar{3}} & 2\bar{4} & \bar{6} & \bar{8} & 2\bar{4} & 2\bar{4}6 & 3\bar{2}8 \\
24 & \bar{\bar{3}} & 2\bar{4} & \bar{4} & 2\bar{4} & 2\bar{4} & 1\bar{6}4 & 9\bar{8}4
\end{array}$$

انتخاب در این مورد ساده است.

برای $n = 43$ ،اهمس یکی از تجزیه های زیررا انتخاب نکرد:

$$\begin{array}{cccccccc}
30 & \bar{3} & 1\bar{0} & \bar{2} & 1\bar{5} & 3\bar{0} & 8\bar{6} & 6\bar{4}5 \\
24 & \bar{\bar{3}} & \bar{8} & \bar{8} & 1\bar{2} & 2\bar{4} & 3\bar{4}4 & 5\bar{1}6
\end{array}$$

زیرا در هر دو مورد بزرگترین جمله R بزرگتر از 10 است.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
*42 & & 4\bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{7} & 4\bar{2} & 8\bar{6} & 1\bar{2}9 & 3\bar{0}1 \\
36 & \bar{6} & 3\bar{6} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{8} & 3\bar{6} & 8\bar{6} & 1\bar{7}2 & 7\bar{7}4 \\
30 & \bar{3} & 1\bar{0} & \bar{3} & \bar{6} & 1\bar{5} & 3\bar{0} & 1\bar{2}9 & 2\bar{5}8 & 6\bar{4}5 \\
28 & \bar{2} & 2\bar{8} & \bar{4} & \bar{7} & 1\bar{4} & 2\bar{8} & 1\bar{7}2 & 3\bar{0}1 & 6\bar{0}2
\end{array}$$

درست است که تجزیه انتخاب شده دارای چهار جمله است که یکی از آنها فرد است، اما این مزیت را دارد که تنها تجزیه ای است که بزرگترین جمله R برای آن کمتر از 10 است. علاوه بر این، $Q = 4\bar{2}$ ساده تراز همه است.

برای $n = 47$ داریم:

$$
\begin{array}{lllllll}
*30 & \bar{2}\ \ \bar{15} & \bar{3}\ \ \bar{10} & \bar{30}\ \ \bar{141}\ \ \bar{470} \\
28 & \bar{\bar{3}}\ \ \bar{84} & \bar{4}\ \ \bar{14} & \bar{28}\ \ \bar{188}\ \ \bar{658}
\end{array}
$$

اگرچه تجزیه انتخاب شده دارای کسر فرد است، اما به این دلیل انتخاب شد که R باقیمانده تجزیه دیگر دارای بخشی کمتر از $\bar{10}$ است. به بیان دقیق، تجزیه دوم حتی نباید فهرست شود زیرا $Q = \bar{\bar{3}} + \bar{84}$ دارای عبارت بزرگتر از $a = 28$ است و بنابراین قابل کاهش نیست.

برای $n = 53$ تنها تجزیه 3 جمله است:

$$
*30 \qquad \bar{\bar{3}}\ \ \bar{10} \qquad \bar{6}\ \ \bar{15} \qquad \bar{30}\ \ \bar{318}\ \ \bar{795}
$$

از آنجایی که 15 بزرگترین عبارت R، بزرگتر از 10 است، اهمس باید برای تجزیه 4 جمله ای جستجو می کرد. او به دست آورد:

$$
48 \qquad \bar{12}\ \ \bar{48} \qquad \bar{2}\ \ \bar{3}\ \ \bar{16} \qquad \bar{48}\ \ \bar{106}\ \ \bar{159}\ \ \bar{848}
$$

اما بزرگترین عبارت R در این تجزیه 16 است و اهمس را مجبور به پذیرش تجزیه قبلی می کند. یک احتمال دیگر وجود دارد که اهمس می توانست در نظر بگیرد.

برای مثال:

$$
36 \qquad \bar{3}\ \ \bar{12}\ \ \bar{18} \qquad \bar{4}\ \ \bar{6}\ \ \bar{9} \qquad \bar{36}\ \ \bar{212}\ \ \bar{318}\ \ \bar{477}
$$

با این حال، این بدان معناست که Q باید به سه کسر واحد تقسیم شود، کاری که اهمس تاکنون انجام نداده بود. همچنین تعداد عبارت‌ها را از 3 به 4 افزایش می‌دهد. به نظر می‌رسد که اهمس با وجود بزرگ‌ترین عبارت R در تجزیه انتخابی که بزرگتر از 10 است، انتخاب معقولی انجام داده است.

تنها مورد دیگری که در آن عدد بزرگتر از 10 در شکستن R استفاده شده است در تجزیه 23 ، عضوی از $G1$ است. در آن صورت، گزینه های ممکن (از جمله احتمال شکسته شدن Q به سه کسر واحد) وجود دارد:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
20 & \bar{10} & \bar{20} & & \bar{2} & \bar{4} & \bar{10} & \bar{20} & \bar{46} & \bar{92} & \bar{230} \\
18 & \bar{6} & \bar{9} & & \bar{2} & \bar{6} & \bar{18} & \bar{18} & \bar{46} & \bar{138} & \bar{414} \\
16 & \bar{4} & \bar{8} & \bar{16} & \bar{2} & \bar{16} & & \bar{16} & \bar{46} & \bar{368} & \\
*12 & \bar{\bar{3}} & \bar{4} & & \bar{12} & & & \bar{12} & \bar{276} & &
\end{array}
$$

واضح است که آخرین تجزیه جذاب ترین است حتی اگر آخرین جمله آن کمی بزرگتر از آخرین جمله تجزیه اول باشد. علاوه بر این، تجزیه انتخاب شده دارای یک Q تقلیل‌پذیر به شکل $(k-1)/k$ است، ویژگی مهمی که هیچ تجزیه‌ای از هیچ عنصری از $G2$ نمی‌تواند داشته باشد.

برای $n = 59$ ، هیچ تجزیه 3 یا 4 جمله ای با Q قابل تقلیل وجود ندارد. از این رو، اهمس به دنبال تجزیه ای بود که در آن Q ممکن است به صورت مجموع سه کسر واحد شکسته شود. این تجزیه 3 جمله ای را به همراه دارد:

$$*36 \qquad \bar{2} \quad \bar{12} \quad \bar{18} \qquad \bar{4} \quad \bar{9} \qquad \bar{36} \quad 2\bar{36} \quad 5\bar{31}$$

مشاهده کنید که اهمس Q را به سه کسر واحد تقسیم نکرد تا زمانی که انجام این کار کاملاً ضروری شد (نگاه کنید به $n = 53$). اما پس از یک بار انجام این کار، از انجام مجدد آن تردید نکرد.

برای $n = 61$ تجزیه 3 جمله ای وجود ندارد، و تجزیه 4 جمله ای وجود دارد:

$$48 \qquad \bar{4} \quad \bar{48} \qquad \bar{2} \quad \bar{6} \quad \bar{16} \qquad \bar{48} \quad 1\bar{22} \quad 3\bar{66} \quad 9\bar{76}$$

$$45 \qquad \bar{3} \quad \bar{45} \qquad \bar{3} \quad \bar{5} \quad \bar{9} \qquad \bar{45} \quad 1\bar{83} \quad 3\bar{05} \quad 5\bar{49}$$

$$*40 \qquad \bar{2} \quad \bar{40} \qquad \bar{4} \quad \bar{8} \quad \bar{10} \qquad \bar{40} \quad 2\bar{44} \quad 4\bar{88} \quad 6\bar{10}$$

تجزیه اول نادیده گرفته می شود زیرا 16 (آخرین جمله R) بزرگتر از 10 است، و تجزیه دوم به دلیل داشتن اعداد فرد کنار گذاشته می شود. تجزیه سوم تجزیه ای است که توسط اهمس ارائه شده است.

برای $n = 67$ تنها تجزیه 3 یا 4 جمله ای است:

$$*40 \qquad \bar{\bar{3}} \quad 1\bar{20} \qquad \bar{5} \quad \bar{8} \qquad \bar{40} \quad 3\bar{35} \quad 5\bar{36}$$

اهمس این تجزیه را انتخاب کرد اما $Q = 27/40$ را به جای $\bar{\bar{3}} + 1\bar{20}$ به عنوان $\bar{2} + \bar{8} + \bar{20}$ نوشت. باز هم، اهمس از شکل دوم Q اجتناب کرد زیرا جمله دوم آن مقسوم علیه 40 نیست، شرط لازم برای تقلیل پذیر .Q

برای $n = 71$ ، تنها تجزیه 3 جمله ای است:

$$42 \qquad \bar{\bar{3}} \quad \bar{42} \qquad \bar{6} \quad \bar{7} \qquad \bar{42} \quad 4\bar{26} \quad 4\bar{97}$$

متأسفانه، این تجزیه یافت شده در RMP نیست. اما در حال حاضر اهمس اجازه داده بود که Q به صورت مجموع سه کسر واحد نوشته شود، که به او تجزیه شد:

$$*40 \qquad \bar{\bar{2}} \quad \bar{4} \quad \bar{40} \qquad \bar{8} \quad \bar{10} \qquad \bar{40} \quad 5\bar{68} \quad 7\bar{10}$$

این تجزیه زوج جمله ای است که در جدول ظاهر می شود. البته، ممکن است اهمس این تجزیه را انتخاب کرده باشد، زیرا او ممکن است $Q = \bar{\bar{3}} + \bar{42}$ تجزیه دیگر را به صورت $\bar{2}\bar{12} + \bar{7}+$ یا $\bar{4}\bar{22} + \bar{6}+$ شکسته باشد، که هر دو دارای تعداد اصطلاحات مشابه Q تجزیه انتخابی هستند. معلوم شد که اجازه دادن به Q که مجموع سه کسر واحد نوشته شود از 59 به بعد، منجر به تجزیه‌های مشابه زمانی می‌شود که Q تقلیل‌پذیر است، مگر در این مورد.

برای $n = 73$ هیچ تجزیه 3 جمله ای وجود ندارد، و بنابراین ما با تجزیه 4 جمله ای باقی می‌مانیم:

$$\ast 60 \qquad \bar{6}\quad \overline{20} \qquad \bar{3}\quad \bar{4}\quad \bar{5} \qquad \overline{60}\quad \overline{219}\quad \overline{292}\quad \overline{365}$$

$$60 \qquad \bar{6}\quad \overline{20} \qquad \bar{2}\quad \bar{5}\quad \overline{12} \qquad \overline{60}\quad \overline{146}\quad \overline{365}\quad \overline{876}$$

اولین تجزیه به وضوح انتخاب بهتری است.

برای $n = 79$ هیچ تجزیه 3 جمله ای وجود ندارد و تجزیه 4 جمله ای وجود دارد:

$$\ast 60 \qquad \bar{4}\quad \overline{15} \qquad \bar{3}\quad \bar{4}\quad \overline{10} \qquad \overline{60}\quad \overline{237}\quad \overline{316}\quad \overline{365}$$

$$60 \qquad \bar{4}\quad \overline{15} \qquad \bar{2}\quad \overline{10}\quad \overline{12} \qquad \overline{60}\quad \overline{146}\quad \overline{365}\quad \overline{876}$$

تجزیه اول با تجزیه موجود در جدول مطابقت دارد. توجه داشته باشید که تجزیه دوم علیرغم اینکه از اعداد زوج تشکیل شده است رد شد. این به این دلیل است که بزرگترین جمله $R12$ است، عددی بزرگتر از 10 .

برای $n = 83$ ، جستجوی اهمس برای تجزیه 3 جمله ای بی نتیجه بود. او به دنبال تجزیه های مرتبه بالاتر بود:

$$\ast 60 \qquad \bar{3}\quad \overline{20} \qquad \bar{4}\quad \bar{5}\quad \bar{6} \qquad \overline{60}\quad \overline{332}\quad \overline{415}\quad \overline{498}$$

$$60 \qquad \bar{3}\quad \overline{20} \qquad \bar{3}\quad \bar{5}\quad \overline{12} \qquad \overline{60}\quad \overline{249}\quad \overline{415}\quad \overline{996}$$

بدیهی است که اولین تجزیه آن چیزی است که باید انتخاب شود.

برای $n = 89$ ، تجزیه 3 یا 4 جمله ای وجود ندارد مگر اینکه Q را به سه کسر واحد بشکنیم. این تجزیه زیر را بدنبال دارد:

$$\ast 60 \qquad \bar{3}\quad \overline{10}\quad \overline{20} \qquad \bar{4}\quad \bar{6}\quad \overline{10} \qquad \overline{60}\quad \overline{356}\quad \overline{534}\quad \overline{890}$$

که در RMP یافت می شود.

برای $n = 97$ ، باید Q را به چهار کسر واحد تقسیم کنیم تا تنها تجزیه را بدست آوریم:

$$\ast 56 \qquad \bar{2}\quad \bar{8}\quad \overline{14}\quad \overline{28} \qquad \bar{7}\quad \bar{8} \qquad \overline{56}\quad \overline{697}\quad \overline{776}$$

باز هم این تجزیه ای است که اهمس داده است.

برای $n = 101$ ، هیچ تجزیه 3 یا 4 جمله ای وجود ندارد، حتی اگر Q را به چهار کسر واحد بشکنیم. این امر اهمس را مجبور کرد که تجزیه پیش‌فرض $\overline{606} + \overline{303} + \overline{202} + \overline{101}$ را انتخاب کند که از (7) با تنظیم $n = 101$ به دست آمده است. لازم به ذکر است که 101 دارای تجزیه است:

$$60 \qquad \bar{\bar{3}} \quad 6\bar{0} \qquad \bar{4} \quad 1\bar{5} \qquad 6\bar{0} \quad 4\bar{0}4 \quad 15\bar{1}5$$

که می توانست توسط اهمس انتخاب شود. در این مورد، داشتن بزرگترین جمله R برابر با 15 قابل قبول بود (مانند مورد 53) اگر کوچکترین قسمت را مجبور به کمتر از $1\bar{0}00$ نمی کرد. این نه تنها با قوانین ما برای تجزیه عناصر $G2$ مطابقت دارد، بلکه توضیح می دهد که چرا 101 آخرین عدد در نظر گرفته شده توسط اهمس بود. البته، ممکن است پس از یافتن تجزیه برای هر عدد فرد از 3 تا 99 ، کاتب تجزیه 101 را به عنوان نمونه اولیه از چگونگی تجزیه هر عدد فرد بیش از صد ارائه دهد.استفاده از توان های 10 به عنوان کرانه های بالا کاملاً با روش مصری ها درانجام ریاضیات مطابقت دارد.

در نهایت، فرض کنید که اجازه می دهیم Q مجموع حداکثر چهار کسر مصری باشد، که مخرج هر کسری واحد مقسوم علیه a است. سپس ما همچنان همان تجزیه انتخابی را برای هر عنصر $G2$ دریافت می کنیم، مشروط بر اینکه تعداد عبارت ها افزایش نیابد. علاوه بر این، اعمال قوانین مشابه برای $G1$ منجر به هیچ تغییری در تجزیه منظم نمی شود، و ثابت می کند که جدول می تواند و باید به عنوان یک موجودیت واحد در نظر گرفته شود.

فصل ۴

نتیجه گیری

با نگاهی به مجموعه ای از تجزیه های انتخاب شده توسط اهمس به عنوان زیر مجموعه ای از مجموعه همه تجزیه های ممکن، می توان به درک بهتری از جدول به عنوان یک کل دست یافت. خواهیم دید که تعداد انتخاب های موجود برای مصریان باستان جز کسری کوچک از تعداد انتخاب های موجود در یک ماشین حساب مدرن است. همچنین خواهیم دید که روش مصری برای بیان $n2$: مزیتی نسبت به معادل اعشاری خود دارد که همیشه یک بسط محدود (واحد کسر) را می پذیرد.

فرض کنید n یک عدد فرد کمتر از 100 باشد و a اولین جمله در تجزیه n باشد. سپس با شروع از n به پایین، اولین انتخاب برای $an - 1$ و آخرین انتخاب $2/(1 + n)$ است، که مجموعاً $2/(1 - n)$ انتخاب می شود. با جمع اعداد فرد از 3 تا 99 ، مجموعاً 1225 انتخاب برای a بدست می آوریم. اکنون، تجزیه حداکثر چهار قسمت را که هیچکدام کوچکتر از $1\bar{0}\bar{0}0$ نیستند، فراخوانی کنید، اگر $Q = (n - a)/a$ را بتوان به صورت مجموع حداکثر چهار کسر واحد یا به عنوان مجموع کسری واحد و $\bar{\bar{3}}$ نوشت. سپس 1225 انتخاب برای یک مجموعه تنها 255 تجزیه قابل قبول را تولید می کنند، بسیار کمتر از تقریباً 28000 تجزیه ممکن که توسط یک کامپیوتر مدرن تولید می شود.

مهمتر از همه، مجموعه تجزیه های قابل قبول شامل تجزیه داده شده توسط اهمس برای هر عدد به جز 35 و 91 است. برای این اعداد استثنایی، اهمس تجزیه های $\bar{4}\bar{2} + \bar{3}0$و $1\bar{3}0 + \bar{7}0$ را می دهد، در حالی که مجموعه تجزیه های قابل قبول شامل تجزیه های معادل $1\bar{0}5 + \bar{7}0 + \bar{3}0$ و $4\bar{5}5 + 1\bar{8}2 + \bar{7}0$ است. علاوه بر این، اگر مضرب های 3 را طبق (8) تجزیه کنیم، آنگاه تنها با 143 موقعیت تجزیه قابل قبول برای 32 غیرضرب 3 باقی می‌مانیم که به طور متوسط کمتر از پنج تجزیه در هر عدد است. نتیجه این است که پس از درک روش، بازسازی جدول دیگر کار دشواری نیست که به نظر می رسید. یک کاتب با تجربه مطمئناً می تواند کار را در یک یا دو روز به پایان برساند. او به زودی متوجه خواهد شد که عددی با مقسوم علیه های بسیار کم، به خصوص عدد اول، انتخاب خوبی برای a نیست. در واقع، a مضربی از 10 یا 12 برای هر عنصر $G2$ است به جز 101 ، 43 ، 97 ، $n = 13$. اتفاق می افتد که برای $n = 97$ و $n = 101$ ، نمی توان تجزیه قابل قبولی را پیدا کرد. جمله اول مضرب 10 یا 12 است.

بگذارید a و n مانند بالا باشند. سپس می توان استدلال کرد که مصری ها از روش سیستمیک زیر برای شکستن $n2$: به کسرهای واحد استفاده کردند. در مرحله اول، کاتب سعی می کند عدد k بزرگتر از 1 و کمتر از 11 را پیدا کند که معادله را برآورده کند.

$$2 : n = \bar{a} + \bar{kn} \tag{۱۱a}$$

اگر مرحله قبل نتواند تجزیه n را ایجاد کند، کاتب عدد دوم راL جستجو می کند به طوری که $K < l \leq 10$

$$2 : n = \bar{a} + \bar{kn} + \bar{ln} \tag{۱۱b}$$

اگر هنوز تجزیه یافت نشد، کاتب عدد سوم m را معرفی می کند، جایی که $k < L < m \leq 10$ و

$$2 : n = \bar{a} + \bar{kn} + \bar{ln} + \bar{mn} \tag{۱۱c}$$

در همه موارد به جز $(n = 71)$ a انتخاب شد تا $Q = (n-a)/a$ معادل یک کسر مصری یا تقلیل‌پذیر باشد، و تنها زمانی که این کار نمی‌توانست انجام شود، کاتب اجازه می‌دهد که Q مجموع سه یا چهار کسر واحد باشد.

قابل توجه است که هر ورودی در جدول تا 100 ، به غیر از 23 ، 35 ، 53 و 91 ، دقیقاً یکی از $(11a)$ تا $(11c)$ را برآورده می کند. این بدان معنی است که مصریان n را به گونه ای تجزیه کردند که k،L ، و m اعداد صحیح بزرگتر از 1 ونه بزرگتر از 10 ، پایه زیرین باشند. همانطور که برای 35 و 91 ، آنها تنها مقادیر n دارای تجزیه هستند که در آن عبارتی غیر از a مضرب غیر صحیح n است. مقادیر مربوط به k آنها $6/5$ و $10/7$ است. از سوی دیگر، 23 و 53 تنها ورودی هایی هستند که دارای تجزیه با جمله بزرگتر از $n10$ هستند. برای $n = 23$ آخرین جمله (دوم) $12n$ است، در حالی که برای $n = 53$ جمله آخر (سوم) $15n$ است. با نگاهی به جدول $2 : n$ به این صورت، می بینیم که مصری ها از سیستم اعدادی کاملاً مشابه سیستم اعشاری ما استفاده می کردند، اما آنها از استفاده از مجموع بی نهایت اجتناب می کردند. به جای نوشتن:

$$\frac{2}{n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{u_3}{10^2} + \frac{a_4}{10^4} + \ldots, 0 \leq a_i \leq 9 \tag{۱۱}$$

آنها $2/n$ (به استثنای 91 ، $n = 23$،35، 53) را به صورت زیربیان کردند:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{kn} + \frac{1}{ln} + \frac{1}{mn}, 2 \leq k \leq L \leq m \leq 10 \tag{۱۲}$$

که در آن از اصطلاحات سوم و چهارم فقط در صورت نیاز استفاده می شود. مصری‌ها سیستم خود را ترجیح می‌دادند زیرا نمایشی محدود و در عین حال دقیق $2/n$ را ارائه می‌داد. با دانستن اینکه در میان ورودی های جدول، تنها $2/25$,$2/5$ دارای بسط اعشاری محدود هستند، ممکن است با دیدگاه آنها همدل تر شود. ما فکر می کنیم که در نظر گرفتن این بینش جدید باید به شدت نحوه تلقی از محاسبات مصری را تغییر دهد.

واژه نامه فارسی به انگلیسی

اعداد کمکی	auxiliary numbers
بخش پذیر	divisible
پاپیروس ریاضی ریند	Rhind Mathematical Papyrus(RMP)
تجزیه	decomposition
تقلیل پذیر	Redusible
شکل هیرو گلف	hieroglyphic form
عدد مرکب	composite number
غربال اراتوستن	Eratosthen sieve
فرد	odd
کسر مصری	egyptian fraction
کسر واحد	unit fraction
مخرج کسر	denominator
مضرب	multiple
مقسوم علیه	divisor

Abstract

The main aim of this text is to study decomposing $2/n$ into unit fractions. As a matter of fact the Rhind Mathematical Papyrus (RMP) contains the decomposition of $2/n$ as the sum of unit fractions for odd n ranging from 5 to 101، in this text methods in RMP is considered. The main reference of this text is .[١]

کتاب‌نامه

[۱]Abdulaziz، A. A. On the Egyptian method of decomposing ۲/n into unit fractions Historia Mathematica ۳۵ (۲۰۰۸) ۱۸–۱ .

[۲] Brown، K.، .۱۹۹۵ The Rhind Papyrus ۲/nTable.http://www.mathpages.com/home/Rhind.htm

[۳] Bruins، E.M.، .۱۹۷۵ The part in ancient Egyptian mathematics. Centaurus ،۱۹ ۲۵۱–۲۴۱

[۴]Bruins، E.M.، .۱۹۸۱ Reducible and trivial decompositions concerning Egyptian arithmetics. Janus ۶۹ ، ۲۹۷-۲۸۱

[۵]Gardner، M.، .۲۰۰۵ Vulgar Fractions and the ۲/nth Table. http://egyptianmath.blogspot.com.

[۶] Gillings، R.J.، .۱۹۷۸ Response to "Some comments on R.J. Gillings' analysis of the ۲/n table in the Rhind Papyrus." Historia Mathematica ،۵ .۲۲۷–۲۲۱

[۷] Imhausen، A.، .۲۰۰۲ The algorithmic structure of the Egyptian mathematical problem texts. In: Steele، J.، Imhausen، A. (Eds.)، Under One Sky: Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East. Ugarit Verlag، Münster، pp. .۱۶۶–۱۴۷

[۸]van der Waerden، B.L.، .۱۹۸۰ The (۲:n) table in the Rhind Papyrus. Centaurus ،۲۳ .۲۷۴–۲۵۹

College of Science

School of Mathematics، Statistics، and Computer Science

On decomposition to unit Egyptian fractions

Author: Seyedeh Hoda Safi

Supervisor: Dr. Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi

۱۶ مرداد ۱۴۰۲