



پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پیش‌بینی و مقایسه‌ی قیمت پوند بعد از رای به

خروج بریتانیا از اتحادیه اروپا

نگارنده

شیوا کاظم‌پور دهکردی

استاد راهنما:

دکتر سودابه شمه سوار  
پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی

در رشته آمار و کاربردها

۱۳۹۶

## چکیده

در این پروژه قصد داریم با استفاده از مفاهیم سری زمانی قیمت پوند را قبل و بعد از برکسیت مدل‌بندی کنیم. این مجموعه داده شامل ۴۵۷ داده است که مربوط به بازه‌ی زمانی ۹۴/۱۲/۹ تا ۹۶/۳/۹ می‌باشد. این تحلیل با استفاده از نرم‌افزارهای آماری همچون *Minitab* انجام شده است. پیش از برازش مدل در فصل اول به اختصار به بیان مفاهیم پایه‌ای و مهم در سری‌های زمانی می‌پردازیم. اصولاً داده‌های مالی دارای الگوهای خاصی در سری‌های زمانی هستند اما این پیش فرض برای داده‌ی ما صدق نکرد و به همین جهت در فصل دوم تمامی الگوهای موجود (ایستا و نایستا) در سری زمانی به تفصیل شرح داده شده‌اند. فصل سوم که مهم‌ترین فصل این پروژه می‌باشد شامل تجزیه و تحلیل، مدل‌سازی و پیش‌بینی قیمت پوند با استفاده از مدل‌های میانگین متحرک خودهمبسته یکپارچه<sup>۱</sup> می‌باشد. با توجه به مفاهیم بنیادین ارائه شده در فصل دوم، انتخاب مدل مناسب برای این مجموعه داده در فصل سوم کار دشواری نخواهد بود.

کلمات کلیدی: سری زمانی - مدل میانگین متحرک خودهمبسته یکپارچه - اتحادیه اروپا - ایستایی

---

<sup>۱</sup>ARIMA

## سپاسگزاری

بدینوسیله مراتب تشکر و قدردانی خود را نسبت به زحمات سرکار خانم دکتر شمه سوار اعلام می‌دارم که با نهایت صبر و حوصله از هیچ کمکی دریغ نکردند.

## پیشگفتار

اتحادیه اروپا یک نهاد اقتصادی-سیاسی بوده و جنبه‌های مختلفی از سیاست در اروپا را تحت نظر دارد. کشورهای عضو این اتحادیه از واحد پول یورو استفاده می‌کنند. با این حال، رویای دستیابی به کشور پهناوری به نام "ایالات متحده اروپا" بسیار دور از واقعیت است. به عنوان مثال، این اتحادیه توانایی اعلام جنگ و یا وضع مالیات را ندارد. بسیاری از شهروندان کشورهای اروپایی نیز حس وفاداری بیشتری به کشورهای خود نسبت به تمامی اتحادیه اروپا دارند. غیبت این همبستگی در این قاره باعث شده‌است ساکنان کشورهای زیادی در اروپا از تعیین تکلیف توسط این اتحادیه اظهار نارضایتی کنند. همواره در سیاست انگلیس افرادی حضور دارند که از ادغام این کشور با دیگر کشورهای اروپایی رضایت کامل ندارند. شمار افراد این گروه در سال‌های اخیر و به خصوص در پی بحران اقتصادی سال ۲۰۰۸ افزایش یافته‌است. انگلیس در سال ۱۹۷۳ به اتحادیه اقتصادی اروپا پیوست و سرانجام در دهه ۹۰ میلادی به عنوان عضوی از اتحادیه اروپا شناخته شد. با این حال، این کشور هیچگاه نظارت اتحادیه اروپا را به صورتی که دیگر کشورها قبول کردند، نپذیرفت. به عنوان مثال، انگلیس از پیوستن به منطقه شنگن و تغییر واحد پولی خود به یورو، سر باز زد. از سال ۲۰۰۸ بحران اقتصادی آمریکا بسیار نگران کننده شد. از آنجا که ارزش یورو پس از بحران اقتصادی با افت شدیدی مواجه شد و پس از آن نیز بهبود نیافته و در شرایط بحرانی باقی ماند، این نگرانی برای یورو شدیدتر بود.

بانک مرکزی هر کشور برای مقابله با بحران اقتصادی می بایست منابع مالی کشورش را به منظور رشد فعالیت‌های اقتصادی افزایش دهد. این در حالی است که در بحران اقتصادی سال ۲۰۰۸، بانک‌های مرکزی کشورهای اتحادیه اروپا توانایی این افزایش منابع مالی را نداشتند و در نتیجه، ارزش یورو با کاهش روبرو شد. در حالی که بانک مرکزی آمریکا به بحران اقتصادی واکنش نشان داد و کمک کرد تا اقتصاد این کشور در سال ۲۰۱۰ دوباره رونق گذشته را پیدا کند. انگلیس به دلیل استفاده از پوند به جای یورو، به طور مستقیم با این بحران مالی مواجه نشد. ولی این بحران اقتصادی نگرانی‌هایی درباره عضویت انگلیس در اتحادیه اروپا در این کشور را برانگیخت. این نگرانی‌ها اغلب درباره دچار شدن انگلیس به مشکلات اتحادیه اروپا بوده‌است. در سال ۲۰۱۲، افزایش این نگرانی‌ها و فشار حزب محافظه‌کار، دیوید کامرون (نخست وزیر انگلیس) را بر آن داشت تا برای تصمیم‌گیری درباره آینده این کشور در اتحادیه اروپا یک همه‌پرسی ترتیب دهد.

سری‌های زمانی یکی از مهم‌ترین بخش‌ها در علم آمار است که به شدت در مسایل اقتصادی استفاده می‌شود. از آنجا که اصولاً قیمت ارز و سکه و کلا داده‌های مالی به یکدیگر وابسته‌اند، لذا استفاده از مدل‌های مختلف در سری زمانی بهترین گزینه برای مدل بندی این گونه داده‌هاست. برای مدل بندی از الگوهای آریمما استفاده کرده‌ایم. در این حوزه کتاب تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی ترجمه‌ی حسینعلی نیرومند بهترین منبع برای استفاده بوده است.

# فهرست مطالب

۱	مفهوم سری‌های زمانی و اهداف آن	۱
۲	راهبرد مدل‌سازی	۱.۱
۳	مفاهیم بنیادین در سری‌های زمانی	۲.۱
۴	مانایی داده‌های سری زمانی	۳.۱
۴	ناایستایی در میانگین و واریانس	۱.۳.۱
۴	نوفه‌ی سفید	۲.۳.۱
۵	الگوهای برای انواع سری‌های زمانی	۲
۵	مدل‌هایی برای سری زمانی مانا	۱.۲
۶	فرایندهای میانگین متحرک	۱.۱.۲
۷	فرایندهای اتورگرسیو	۲.۱.۲
۹	مدل آمیخته‌ی میانگین متحرک اتورگرسیو	۳.۱.۲
۱۰	الگوهای برای سری زمانی نامانا	۲.۲



۱۱	مدل‌های ناهمواریانسی شرطی اتورگرسیو	۱.۲.۲
۱۳	مدل‌سازی و تحلیل سری زمانی	۳
۱۴	بررسی رگرسیون داده‌ها	۱.۳
۱۸	بررسی ایستایی میانگین و واریانس	۲.۳
۲۵	برآزش مدل سری زمانی	۳.۳
۳۳	بررسی مجدد استقلال باقی مانده‌ها	۱.۳.۳
۳۴	پیش‌بینی	۴.۳
۳۸	نتیجه‌گیری	
۴۰	واژه‌نامه	
۴۱	مراجع	

## فهرست تصاویر

۸	نمایش مدل اتورگرسیو با پارامترهای مختلف . . . . .	۱.۲
۱۴	نمودار پراکنش درجه ۱ . . . . .	۱.۳
۱۵	نمودار پراکنش درجه ۲ . . . . .	۲.۳
۱۷	نمودار چهار تایی احتمال نرمال برای بررسی شرایط رگرسیونی داده‌ها . . . . .	۳.۳
۲۰	نمودار ایستایی میانگین اولیه . . . . .	۴.۳
۲۲	نمودار ایستایی میانگین نهایی . . . . .	۵.۳
۲۵	نمودار ایستایی واریانس . . . . .	۶.۳
۲۶	نمودار $ACF$ اولیه . . . . .	۷.۳
۲۷	نمودار $PACF$ اولیه . . . . .	۸.۳
۳۰	نمودار نهایی $ACF$ . . . . .	۹.۳
۳۰	نمودار نهایی $PACF$ . . . . .	۱۰.۳
۳۲	نمونه‌های دیگر از نمودار $ACF$ . . . . .	۱۱.۳

۳۲	.....	نمونه‌ای دیگر از نمودار $PACF$	۱۲.۳
۳۷	.....	مقایسه‌ی مدل فیت شده و داده‌ی اصلی	۱۳.۳

## فهرست جداول

۲۱	.....	تحلیل واریانس برای فرض استایی میانگین	۱.۳
۲۴	.....	مقدار انحراف معیار در هر زیر گروه	۲.۳
۳۵	.....	پیش‌بینی قیمت پوند	۳.۳

## فصل ۱

### مفهوم سری‌های زمانی و اهداف آن

یک سری زمانی مجموعه مشاهداتی است که بر حسب زمان مرتب شده باشند. سری‌های زمانی یکی از شاخه‌های آمار و احتمال است که در سایر رشته‌های علوم مانند ژئوفیزیک، اقتصاد، مهندسی ارتباطات، هواشناسی و ... کاربرد فراوانی دارد؛ دامنه کاربردهای سری‌های زمانی روز به روز گسترده‌تر می‌شود و نیاز دانش پژوهان در این زمینه افزون‌تر می‌گردد. تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی بطور نظری و عملی از زمان شروع کار اصلی جورج.ای.پی. باکس و ام.جنکینس در سال ۱۹۷۰ (تحت عنوان تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی، پیش‌بینی و کنترل) به سرعت توسعه پیدا نمود. هدف تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی معمولاً دو چیز است:

- درک یا به مدل در آوردن مکانیسم تصادفی که منجر به مشاهده‌ی سری میشود

- پیش‌بینی مقادیر آینده سری، بر مبنای گذشته آن

در تجزیه و تحلیل یک سری زمانی چندین هدف ممکن وجود دارد. این اهداف را می‌توانیم به صورت

توصیف، تشریح، پیش بینی و کنترل رده بندی کنیم. هر چند توصیف رفتار یک سری زمانی از لحاظ تغییرات موضعی و دراز مدت در آن یا مطالعه وابستگی های موجود بین عناصر سری از بررسی های متداولی است که روی سری های زمانی انجام می شود اما می توان گفت مهم ترین هدف از تحلیل سری زمانی پیش بینی مقادیر آینده آن است.

## ۱.۱ راهبرد مدل سازی

پیدا کردن الگوهای مناسب برای سری های زمانی کار آسانی نیست و به همین منظور راهبرد چندگامی که توسط باکس و جنکینز (۱۹۷۶) ارائه شده است را به کار می بریم. در این روش سه مرحله اصلی وجود دارد که به شرح زیر است:

۱. شناسایی مدل

۲. برازش مدل

۳. مباحث تشخیصی مدل

در مرحله اول رده هایی از مدل سری زمانی انتخاب می شوند که ممکن است برای یک سری مشاهده شده مناسب باشد. مدل انتخابی در این مرحله مدلی آزمایشی است و بعدا در مرحله تحلیل مورد بازنگری قرار می گیرد.

در مرحله برازش مدل سعی بر آن است که به اصل امساک پایدار بمانیم؛ یعنی مدل باید به کمترین مقدار پارامتر نیاز داشته باشد. هر چیز را باید تا حد امکان ساده کرد اما نه ساده تر از آن [۱].

در مرحله آخر به ارزیابی کیفیت مدل می پردازیم. اگر مشکلی یافت نشود می توان مدل را کامل پنداشت و برای پیش بینی آینده از آن استفاده کرد. در غیر این صورت به مرحله اول برمی گردیم و مدل بهتری را

انتخاب می‌کنیم.

## ۲.۱ مفاهیم بنیادین در سری‌های زمانی

دنباله متغیرهای تصادفی  $\{Y_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  یک فرایند تصادفی نامیده می‌شود و به عنوان مدلی برای یک سری زمانی مشاهده شده به کار می‌رود. در ادامه به توضیح توابع مهم در این حوزه می‌پردازیم. برای این فرایند تابع میانگین به صورت زیر تعریف می‌شود:

تابع اتوکوواریانس  $\gamma_{t,s}$  به صورت زیر است:

$$\gamma_{t,s} = Cov(Y_t, Y_s), \quad t, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

که در آن:

$$Cov(Y_t, Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)] = E(Y_t Y_s) - \mu_t \mu_s$$

تابع خودهمبستگی  $\rho_{t,s}$  با رابطه‌ی

$$\rho_{t,s} = Corr(Y_t, Y_s) \quad t, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

تعریف می‌شود که در آن:

$$Corr(Y_t, Y_s) = \frac{Cov(Y_t, Y_s)}{\sqrt{Var Y_t Var Y_s}} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\gamma_{t,t} \gamma_{s,s}}}$$

### ۳.۱ مانایی داده‌های سری زمانی

ایده‌ی اساسی مانایی یا ایستایی آن است که قانون‌های حاکم بر رفتار فرایند در طی زمان تغییر نمی‌کنند و به عبارت دیگر فرایند در تعادل آماری است. به طور کلی فرایند  $\{Y_t\}$  را مانای اکید گویند هرگاه توزیع توام  $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$  به ازای تمامی انتخاب‌های نقطه‌های زمانی  $t_1, t_2, \dots, t_n$  و تمامی انتخاب‌های تاخیر  $K$  همانند توزیع  $Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, \dots, Y_{t_n-k}$  باشد [۲]. در سری زمانی ایستا همبستگی نگار آن به سرعت به سمت صفر میل می‌کند در حالیکه در مورد سری‌های نایستا همبستگی نگار به کندی به سمت صفر میل می‌کند.

#### ۱.۳.۱ نایستایی در میانگین و واریانس

یک سری زمانی ممکن است در میانگین یا در واریانس یا در هر دو مورد نایستا باشد. راه حل مناسب برای ایستا سازی یک سری زمانی که در میانگین نایستا است، تفاضلی کردن آن سری می‌باشد. در مورد سری زمانی که در واریانس نایستا است، یعنی واریانس آن ثابت نیست و همراه با زمان تغییر می‌کند، راه حل مناسب استفاده از تبدیلات باکس-کاکس می‌باشد که در ادامه با جزئیات بیشتر به توضیح هر کدام می‌پردازیم.

#### ۲.۳.۱ نوفه‌ی سفید

نوفه‌ی سفید نمونه‌ی بارز و مهمی از فرایند ماناست که به صورت دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع  $\{e_t\}$  تعریف می‌شود. در واقعیت وایت نویز یا نوفه‌ی سفید سیگنالی است که چگالی توان آن در همه‌ی فرکانس‌ها یکسان است. معمولاً میانگین این فرایند صفر و واریانسش را با  $\sigma_e^2$  نشان می‌دهیم. میانگین متحرک که به صورت  $Y_t = \frac{(e_t + e_{t-1})}{2}$  ساخته می‌شود، مثالی از فرایند مانا است که از نوفه‌ی سفید بدست آمده است. در نتیجه تمام  $e$ ها مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_e^2$  هستند.



## فصل ۲

### الگوهایی برای انواع سری‌های زمانی

سری‌های زمانی به ۲ دسته‌ی مانا و سری‌های نامانا تقسیم می‌شوند. هر کدام از این دسته‌بندی‌ها برای مدل بندی فرایندهای مختلفی در جهان واقعی به کار می‌روهند. در ادامه با جزییات به توضیح هر دسته می‌پردازیم.

#### ۱.۲ مدل‌هایی برای سری زمانی مانا

فرض می‌کنیم  $\{Y_t\}$  سری زمانی مشاهده شده را نشان می‌دهد. به طور کلی این سری زمانی یک فرایندی است که می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی از جمله‌های نوفه سفید به شکل زیر نوشت:

$$Y_t = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots$$

فرایند خطی بالا مفهوم مهمی برای توضیح مدل‌های میانگین متحرک<sup>۱</sup>، اتورگرسیو<sup>۲</sup> و مدل آمیخته‌ی میانگین

---

<sup>۱</sup>Moving Average(MA)

<sup>۲</sup>Autoregressive(AR)

متحرک اتورگرسیو که در ادامه به آنها می‌پردازیم، است.

## ۱.۱.۲ فرایندهای میانگین متحرک

میانگین متحرک یکی از شاخص‌های مهم و مورد استفاده فراوان، در تحلیل تکنیکی است، که با حذف نوسانات قیمتی کمک می‌کند تا سرمایه‌گذار بتواند تصویر بهتری از متوسط قیمت و روند قیمتی را ترسیم کند. [۳] دو نوع میانگین متحرک وجود دارد: میانگین متحرک ساده و میانگین متوسط تصاعدی. میانگین متحرک ساده تنها متوسطی از قیمت سهام، در بازه زمانی مورد نظر است، ولی نحوه محاسبه میانگین متحرک تصاعدی به صورتی است، که هر چه قیمت به انتهای بازه زمانی (قیمت فعلی) نزدیک‌تر می‌شود، وزن سنگین‌تری را در محاسبه میانگین ایفا می‌کند. به بیانی دیگر میانگین متحرک تصاعدی همان میانگین وزنی متوسط قیمت است، که قیمت‌های اخیر، وزن بیشتری را در محاسبه در بر دارند. انواع مختلف این مدل سطوح هموار سازی مخصوص خودشان را دارند. به طور کلی میانگین متحرک هموارتر به تغییرات قیمت کندتر واکنش نشان می‌دهد. در حالیکه میانگین متحرک متلاطم‌تر سریع‌تر واکنش نشان می‌دهد. برای هموار کردن آن باید میانگین قیمت‌های پایانی را در دوره‌ی زمانی طولانی‌تر در نظر گرفت.

در این فرایند معمولاً وزن  $\psi$  که در فرایند خطی بالا به آن اشاره شد را با  $\theta$  جایگزین کرده و فرم کلی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$Y_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \dots + \theta_q e_{t-q}$$

این فرایند به طور کلی به میانگین متحرک مرتبه  $q$  یا  $MA(q)$  شناخته می‌شود. به عنوان مثال  $MA(1)$  را در نظر بگیرید. مدل به صورت  $Y_t = e_t + \theta e_{t-1}$  خواهد بود. برای این مدل عبارات زیر برقرار است:

$$\left. \begin{aligned} E(Y_t) &= \cdot \\ \gamma_0 &= Var(Y_t) = \sigma_e^2(1 + \theta^2) \\ \gamma_1 &= -\theta\sigma_e^2 \\ \rho_1 &= \frac{-\theta}{1+\theta^2} \\ \gamma_k &= \rho_k \quad K \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

و در حالت کلی  $\rho_k$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ \cdot & k > q \end{cases} \quad (2.2)$$

## ۲.۱.۲ فرایندهای اتورگرسیو

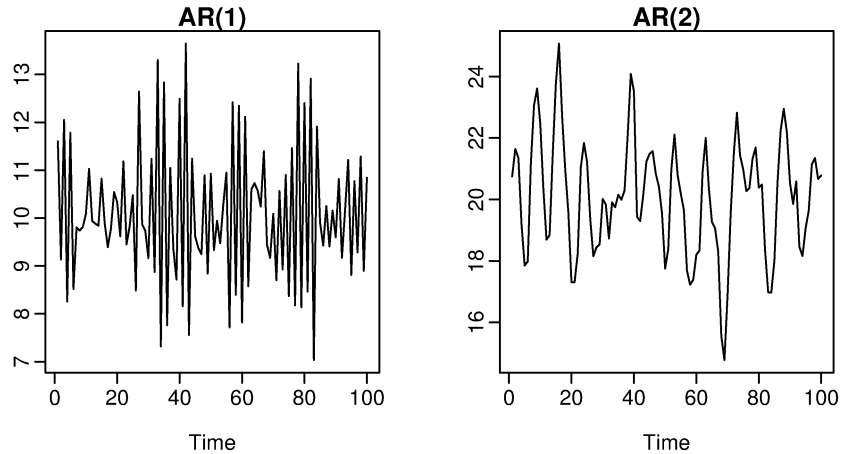
یک مدل خودرگرسیون مدلی است که مقدار فعلی یک متغیر  $Y_t$  فقط به مقادیر قبلی آن متغیر و یک جزء خطا بستگی دارد. مدل خودرگرسیونی مرتبه  $p$  که با نماد  $AR(p)$  نشان داده می‌شود به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t$$

مدل‌های اتورگرسیو برای مدل بندی انواع مختلف سری‌های زمانی کاربرد دارند. شکل ۱-۲ مدلهایی از  $AR(1)$  و  $AR(2)$  نشان می‌دهد. با تغییر پارامترهای  $\phi_1, \dots, \phi_p$  به مدل‌های مختلفی دست پیدا خواهیم

کرد. جمله‌ی واریانس خطا  $e_t$  تنها باعث تغییر در اندازه‌ی سری می‌شود و نه طرح آن.

شکل ۱.۲: نمایش مدل اتورگرسیو با پارامترهای مختلف



امید و واریانس مدل  $AR(1)$  به صورت زیر است:

$$E(Y_t) = \mu \frac{1-\phi_1^t}{1-\phi_1}$$

$$Var(Y_t) = \sigma^2 \frac{1-\phi_1^{2t}}{1-\phi_1^2}$$

همانطور که مشاهده می‌شود امید این فرآیند وابسته به زمان است و بنابراین مانا نمی‌باشد ولی در حالتی که به بی‌نهایت میل می‌کند فرآیند دارای میانگین ثابت است و به عبارت دیگر بطور مجانبی مانا در میانگین خواهد بود. در مورد واریانس نیز وابستگی به زمان مشاهده می‌شود اما می‌توان گفت فرآیند در حد دارای واریانس ثابت بوده و بطور مجانبی مانا در واریانس است. برای نشان دادن مانایی مدل‌های اتورگرسیو ابتدا چند جمله‌ای مشخصه  $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p$  را در نظر می‌گیریم. تنها در صورتی جوابی مانا برای معادله‌ی مشخصه بالا وجود دارد که قدر مطلق  $p$  ریشه‌ی معادله‌ی  $AR$  هر یک بزرگتر از ۱

باشند. بنابراین برقراری دو شرط زیر لازم است:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p &< 1 \\ |\phi_p| &< 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

با حل معادلات یول-واکر خواهیم داشت:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p}$$

### ۳.۱.۲ مدل آمیخته‌ی میانگین متحرک اتورگرسیو

در علم آمار و پردازش سیگنال مدل خودرگرسیو میانگین متحرک که به مدل آرما<sup>۳</sup> مشهور است و گاهی به آن مدل *Box - Jenkins* نیز می‌گویند، مدلی است که معمولاً برای سنجش داده‌های سری زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. زمانی که سری زمانی ما ترکیبی از سری میانگین متحرک و اتورگرسیو باشد، به مدل کلی‌تری به شکل زیر می‌رسیم. بنابراین مدل آرما را در ادبیات علمی به صورت  $ARMA(p, q)$  نمایش می‌دهند. که در آن  $p$  مرتبه مدل  $AR$  و  $q$  مرتبه مدل  $MA$  است.  $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots +$

$$\phi_p Y_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

همانند دو مدل دیگر برای سری‌های مانا قوانین زیر حاکم است:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{(1 - 2\phi\theta + \theta^2)}{1 - \phi^2} \sigma_e^2 \\ \rho_k &= \frac{(1 - \theta\phi)(\phi - \theta)}{1 - 2\theta\phi + \theta^2} \phi^{k-1} \\ \psi_j &= (\phi - \theta) \phi^{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

<sup>۳</sup>ARMA

## مدل $ARIMA$

در صورت عدم فرض ایستایی میانگین در مدل آرما مدل دیگری به نام آریما وجود دارد. در این مدل بر روی داده‌هایی که ایستایی میانگین ندارند یک تفاضل اعمال می‌کنیم و آنرا با  $q$  در مرتبه‌ی این مدل نشان می‌دهیم. مدل‌های  $ARIMA$  بخش مهمی از رویکرد باکس-جنکینز به مدل‌های سری زمانی را می‌سازند. در صورتی که یکی از جزءها برابر با صفر باشند معمولاً به صورت  $ARIMA$  نوشته می‌شود. برای مثال یک  $I(1)$  همان مدل  $ARIMA(0, 1, 0)$  است و یا  $MA(1)$  همان  $ARIMA(0, 0, 1)$  است.

## ۲.۲ الگوهای برای سری زمانی نامانا

هر سری زمانی بدون میانگین ثابت نامانا است و می‌بایست از الگوهای به غیر از مدل‌های  $ARIMA$  و  $ARMA$  برای پیش‌بینی آن‌ها استفاده کرد. در امور مالی واریانس شرطی سود یک دارایی مالی اغلب به عنوان معیاری از مخاطره‌ی آن دارایی در نظر گرفته می‌شود. این معیار بحث مهمی در نظریه‌ی ریاضی قیمت‌گذاری یک دارایی مالی است. یکی از ویژگی‌های مهم برخی از سری‌های زمانی اقتصادی و مالی این است که دارای تغییرپذیری خوشه‌ای هستند یعنی تغییرات بزرگ منجر به تغییرات بزرگ و تغییرات کوچک منجر به تغییرات کوچک می‌شود. به عبارت دیگر سطح جاری تغییرپذیری، رابطه مثبت با مقادیر گذشته آن دارد. به طور کلی در یک بازار کارآمد، سود مورد نظر یا همان میانگین شرطی باید برابر با صفر و بنابراین سری سود باید نوفه‌ی سفید باشد [۴] در نتیجه این دنباله به‌طور پیاپی ناهم بسته است. و این گزاره به این معنی است که واریانس شرطی  $r_t$  به شرط معلوم بودن سودهای گذشته ثابت نیست. واریانس شرطی اغلب با  $\sigma_{t|t-1}^2$  نمایانده می‌شود که  $t-1$  به این معنی است که شرطی کردن نسبت به سودها تا زمان  $t-1$  است. در این شرایط به سراغ مدل‌های زیر می‌رویم.

## ۱.۲.۲ مدل‌های ناهمواریانسی شرطی اتورگرسیو

مدل ناهمواریانسی شرطی اتورگرسیو<sup>۴</sup> روشی برای مدل‌بندی واریانس تغییر یابندهی سری زمانی است می‌دانیم که در یک مدل رگرسیون، جمله خطا دارای ویژگی نرمال با میانگین صفر و واریانس سیگما به توان دو می‌باشد. مدل ARCH یکی از روش‌های مناسب برای مدل‌سازی تغییرپذیری است. برای توصیف آن بحث را با مفهوم واریانس شرطی  $u$  شروع میکنیم. تمایز بین واریانس شرطی و غیر شرطی دقیقاً مشابه با میانگین شرطی و غیر شرطی است. واریانس شرطی  $r_t$  که با  $\sigma^2$  نشان داده می‌شود، از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} E(r_t^2 | r_{t-j}, j = 1, 2, \dots) &= E(\sigma_{t|t-1}^2 \varepsilon_t^2 | r_{t-j}, j = 1, 2, \dots) \quad (5.2) \\ &= \sigma_{t|t-1}^2 E(\varepsilon_t^2) \\ &= \sigma_{t|t-1}^2 \end{aligned}$$

معادله فوق بیان می‌کند که واریانس شرطی  $u$  برابر با امید ریاضی شرطی  $r_t^2$  است. لذا برای زمان  $t$  به شرط معلوم بودن مقدار خطاهای گذشته، محاسبه می‌شود. در مدل ARCH، خودهمبستگی در تغییرپذیری - توسط واریانس شرطی جمله خطا بیان می‌شود که در ساده‌ترین حالت، بستگی به مجذور خطای دوره قبل دارد. به رابطه‌ی زیر توجه کنید:

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$$

مدل فوق را ARCH(1) می‌گویند، زیرا واریانس شرطی فقط بستگی به خطای دوره قبل دارد. توجه شود که معادله بالا فقط بخشی از کل مدل است، زیرا درباره میانگین شرطی  $Y$  که همان معادله اصلی است، چیزی بیان نمی‌کند. در مدل ARCH، معادله میانگین شرطی را به هر شکلی می‌توان تعریف نمود. به عنوان

<sup>۴</sup>ARCH

مثال، مدل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + r_t \quad ; r_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2$$

معادله اول همان رگرسیون مرسوم است و معادله دوم نیز معادله ای برای توصیف واریانس شرطی  $Y_t$  است که تا کنون آن را ثابت فرض میکردیم.



## فصل ۳

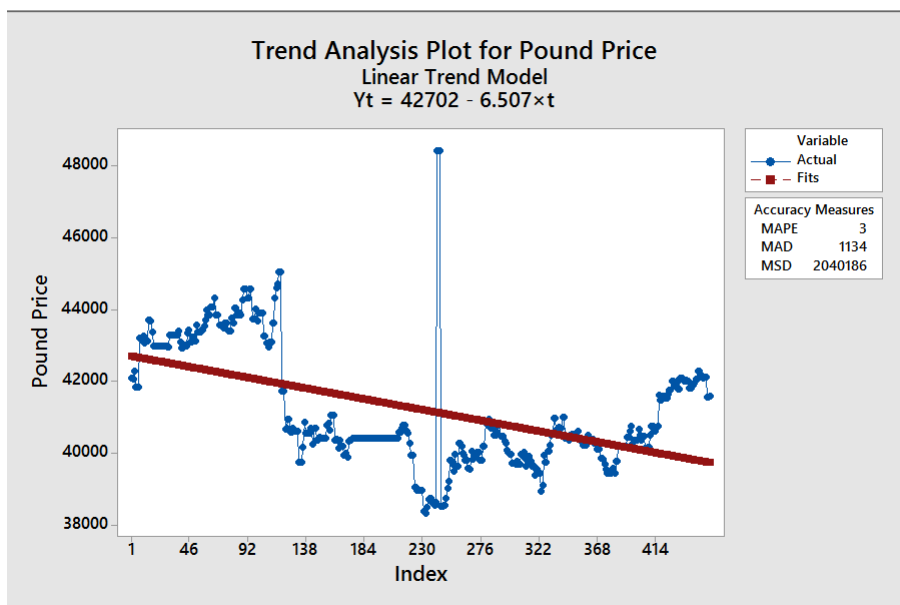
### مدل سازی و تحلیل سری زمانی

هدف این فصل بررسی و تجزیه و تحلیل قیمت پوند قبل از رای به خروج بریتانیا از اتحادیه اروپا (برکسیت) و بعد از آن می باشد. بدین منظور داده های مورد نظر را از طریق سایت رسمی بانک مرکزی جمع آوری کرده ایم. این داده ها از تاریخ ۹۴/۱۲/۹ تا ۹۶/۳/۹ و به تعداد ۴۵۷ است [۵]. یکی از تبعات این همه پرسی سقوط ارزش پوند، نفت و بازارهای جهانی و بهای پوند نسبت به دلار بود که از سال ۱۹۸۵ بی سابقه است. برای بررسی این دیتاست از نرم افزارهای *Minitab* و *R* استفاده شده است. لازم به ذکر است که با توجه به مباحث گفته شده در فصل دوم یکی از مهم ترین و اساسی ترین قدم ها در تشخیص مدل مناسب بررسی ایستایی میانگین و واریانس است. در صورت ایستا نبودن میانگین از روش تفاضلی کردن و در صورت ایستا نبودن واریانس از تبدیلات باکس-کاکس استفاده خواهیم کرد. اکنون می توانیم به برازش مدل سری زمانی به داده هایمان پردازیم.

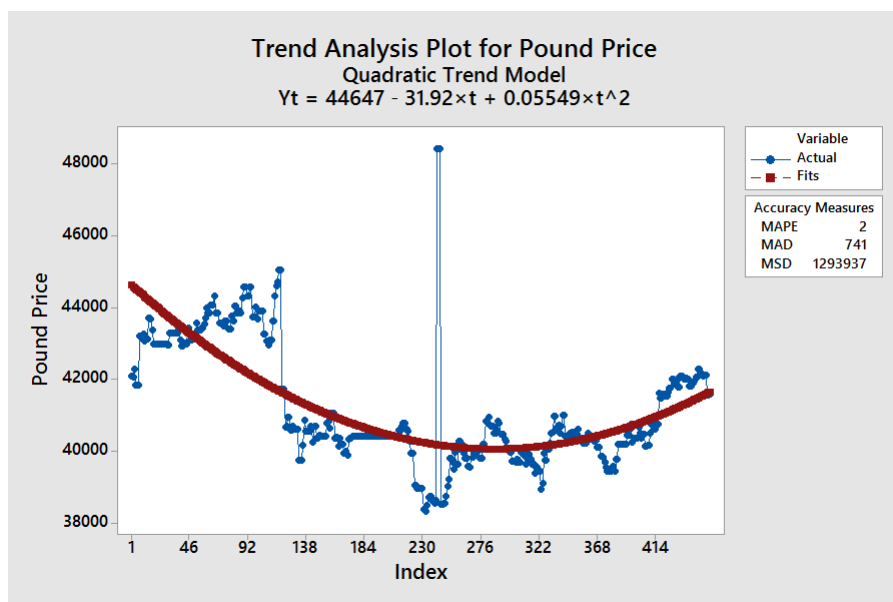
### ۱.۳ بررسی رگرسیون داده‌ها

قبل از برازش مدل‌های سری زمانی ابتدا می‌بایست اولین شرط مهم در برقراری این مدل‌ها که وابسته بودن باقی‌مانده‌ها است را بررسی کنیم. اول از همه نمودار ۱-۳ و ۲-۳ که پراکنش درجه ۱ با متغیر کمکی زمان و نمودار درجه‌ی دو با متغیرهای کمکی زمان و توان دوم زمان داده‌ها را نشان می‌دهد، رسم می‌کنیم.

شکل ۱.۳: نمودار پراکنش درجه ۱



شکل ۲.۳: نمودار پراکنش درجه ۲



مقدار  $MSD$  در معادله‌ی درجه دو کمتر است پس به نظر می‌رسد که این مدل بهتر است اما برای اطمینان این فرض را آزمون می‌کنیم. بدین منظور یک مدل رگرسیونی درجه دو به داده‌هایمان فیت می‌کنیم. برای برقراری شروط مدل سری زمانی ضرایب رگرسیونی باید صفر باشند. جزییات مدل رگرسیونی فیت شده به شرح زیر است. لازم به ذکر است که در این مدل  $C_2$  متغیر پیوسته‌ی زمان و  $C_3$  توان دوم زمان است:

نوع	ضرایب	انحراف معیار ضرایب	T-Value	P-Value	VIF
ثابت	۴۴۶۴۷	۱۶۱	۲۷۷/۵۵	۰/۰۰۰	
$C_2$	-۳۱/۹۲	۱/۶۲	-۱۹/۶۸	۰/۰۰۰	۱۶/۰۷
$C_3$	۰/۰۵۵۴۹	۰/۰۰۳۴۳	۱۶/۱۸	۰/۰۰۰	۱۶/۰۷

معادله‌ی رگرسیونی:

$$\text{Pound Price} = 44647 - 31/92 C2 + 0/05549 C3$$

به این مدل یک مدل رگرسیون خطی میگویند. با توجه به مقادیر  $P - value$  فرض صفر که صفر بودن

ضرایب رگرسیونی است رد نمی‌شود. مدل رگرسیونی درجه دو نیز به داده‌ها برازش می‌دهیم.

VIF	P-Value	T-Value	انحراف معیار ضرایب	ضرایب	نوع
	0/000	384/53	109	41902	ثابت
1/00	0/000	-8/48	0/00116	-0/00987	C3

معادله‌ی رگرسیونی:

$$\text{Pound Price} = 41902 - 0/00987 C3$$

به نظر می‌رسد که مدل رگرسیونی درجه دو نیز مناسب است! در این شرایط بهترین کار سنجش استقلال

باقی مانده هاست. برای این منظور از دستور *Runs* استفاده می‌کنیم. فرض صفر در این آزمون استقلال باقی

مانده هاست. با توجه به مقدار صفر  $P - value$  نتیجه می‌گیریم که داده‌ها مستقل نیستند و به یکدیگر

وابسته‌اند و سری زمانی مناسب این دیتاست می‌باشد.

Runs test for RESI1

$$\text{Runs above and below } K = -7/00530E - 13$$

$$\text{The observed number of runs} = 27$$

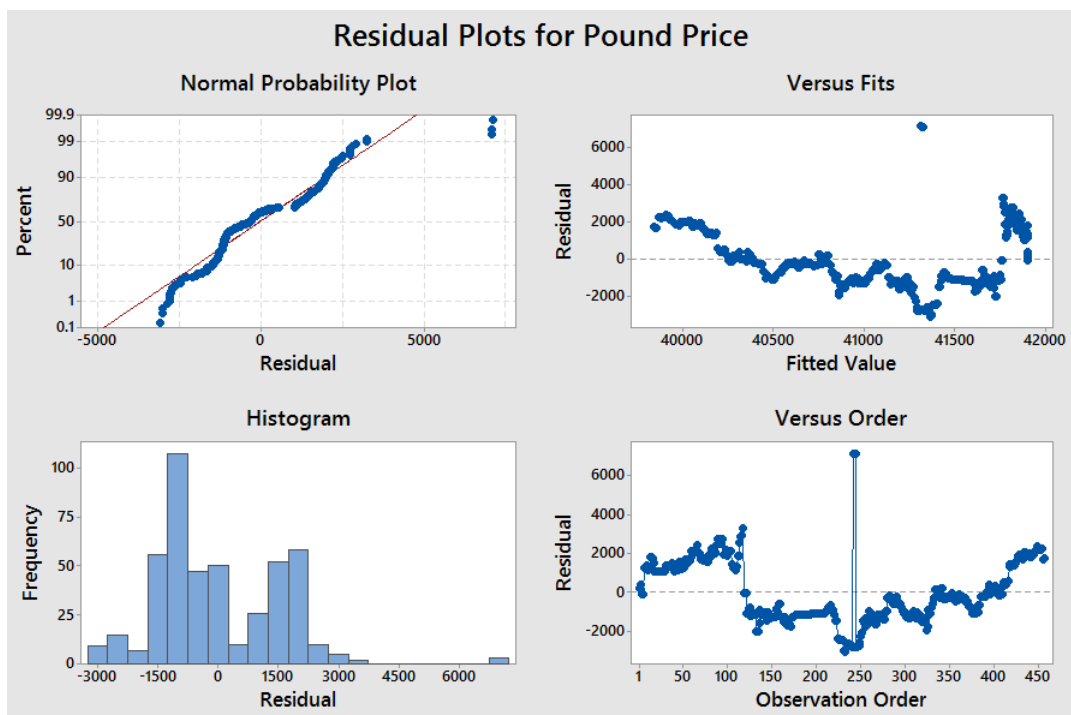
$$\text{The expected number of runs} = 220/404$$

۱۸۳ observations above K, ۲۷۴ below

P-value = ۰/۰۰۰

اکنون به تفسیر چهار نموداری که از برازش مدل رگرسیونی بدست آمده می‌پردازیم. شکل ۳-۳ بیانگر این نمودار چهارتایی است.

شکل ۳-۳: نمودار چهار تایی احتمال نرمال برای بررسی شرایط رگرسیونی داده‌ها



تفسیر نمودارها:

بالا چپ: این نمودار پراکندگی باقی مانده‌ها را نشان می‌دهد. از این نمودار برای تشخیص پیروی باقی مانده‌ها از توزیع  $N(0, \sigma^2)$  استفاده می‌شود. هرچه تجمع داده‌ها روی یک خط باشد یعنی نرمال است. طبق نمودار

داده‌ها به شکل مناسب و کاملی روی خط قرار نگرفته‌اند و احتمالاً نرمال نیست.

بالا راست: نمودار پراکندگی باقی‌مانده‌ها بر اساس مقادیر برازش داده شده که برای تشخیص ایستایی واریانس باقی‌مانده‌ها به کار می‌رود. در صورتیکه باقی‌مانده‌ها به صورت تصادفی پخش شده باشند، ایستایی واریانس داریم. در غیر این صورت واریانس ایستا نخواهد بود. به عبارت دیگر اگر دارای هر گونه روندی بودند یعنی ثابت نیست. در ابتدای این نمودار شاهد یک روند جزئی هستیم ولی برای اطمینان این مورد را آزمون خواهیم کرد. پایین چپ: این نمودار هم نرمال بودن را نشان می‌دهد و نمودار هیستوگرام باقی‌مانده‌هاست. در اینجا به هیچ عنوان شاهد نمودار زنگوله‌ای شکل نرمال نیستیم.

پایین راست: این نمودار پراکندگی باقی‌مانده‌ها بر اساس مقادیر مشاهده شده‌ی متغیر پاسخ که برای تشخیص استقلال باقی‌مانده‌ها به کار می‌رود را نشان می‌دهد. به عبارت دیگر نشان دهنده‌ی استقلال باقیمانده‌ها است. مشخص است که در اینجا استقلال نداریم زیرا روند بسیار واضحی مشاهده می‌شود و استفاده از دستور *Runs* نیز گواهی بر این قضیه بوده است.

## ۲.۳ بررسی ایستایی میانگین و واریانس

همانطور که در قسمت قبل دیدیم، مدل رگرسیونی مناسب این داده نمی‌باشد و به دنبال برازش مدل سری زمانی هستیم. شرط بعدی در سری زمانی ایستایی میانگین و واریانس است. بدین منظور ابتدا دیتاست را به ۱۷ دسته ۲۷ تایی تقسیم می‌کنیم، که به عنوان فاکتور می‌شناسیم.

$$MTB = \text{let } C^3 = C^2 \wedge 2$$

$$MTB = \text{set } C^4$$

DATA= (۱ : ۱۷)۲۷

DATA= end.

حال به بررسی ایستایی میانگین داده‌های اصلی با توجه به ستون فاکتور می‌پردازیم. فرض صفر در این آزمون ایستایی میانگین است.

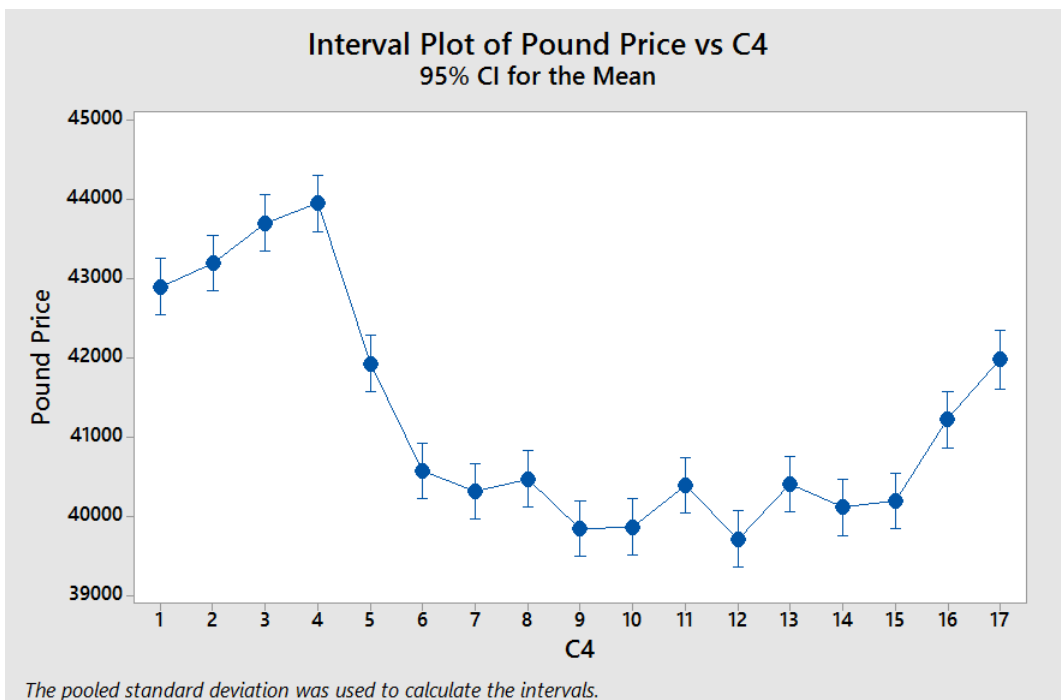
مقدار	فاکتور	سطح
۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷	۱۷	C4

نتایج تحلیل واریانس به صورت زیر است:

منبع	درجه آزادی	مجموع مربعات تعدیل شده	میانگین مجموع مربعات تعدیل شده	F-Value	P-Value
C4	۱۶	۸۸۴۰۱۹۹۶۸	۵۵۲۵۱۲۴۸	۶۳/۱۲	۰.۰۰۰
Error	۴۴۰	۳۸۵۱۳۸۷۳۱	۸۷۵۳۱۵		
Total	۴۵۶	۱۲۶۹۱۵۸۶۹۹			

شکل ۴۰۳ نشان دهنده‌ی نمودار ایستایی میانگین بر روی داده‌های اولیه است.

شکل ۴.۳: نمودار ایستایی میانگین اولیه



با توجه به مقدار  $P - value$  که صفر است نتیجه می‌شود که فرض صفر رد شده و میانگین داده‌ها ایستا نیست. اکنون با استفاده از روش‌های مختلف اقدام به ایستا کردن میانگین می‌کنیم. ابتدا یک تفاضل درجه یک می‌گیریم و سپس دوباره ایستایی را چک می‌کنیم. به یاد داشته باشید که بنا بر تجربه در عمل بیش از دو مرتبه تفاضل گیری کار ساز نمی‌باشد و حداکثر بار این عمل را تکرار می‌کنیم. برای این کار از دستور *diff* استفاده می‌کنیم.

### Interval Plot of Pound Price VS C4

MTB= diff C1 c7

حال دوباره ایستایی را مثل حالت اول چک می‌کنیم. با این تفاوت که اکنون داده‌ی اصلی ما ستونی است



که *diff* خورده است. تحلیل واریانس جدول ۱۰۳ را در نظر بگیرید:

جدول ۱۰۳: تحلیل واریانس برای فرض استاتی میانگین

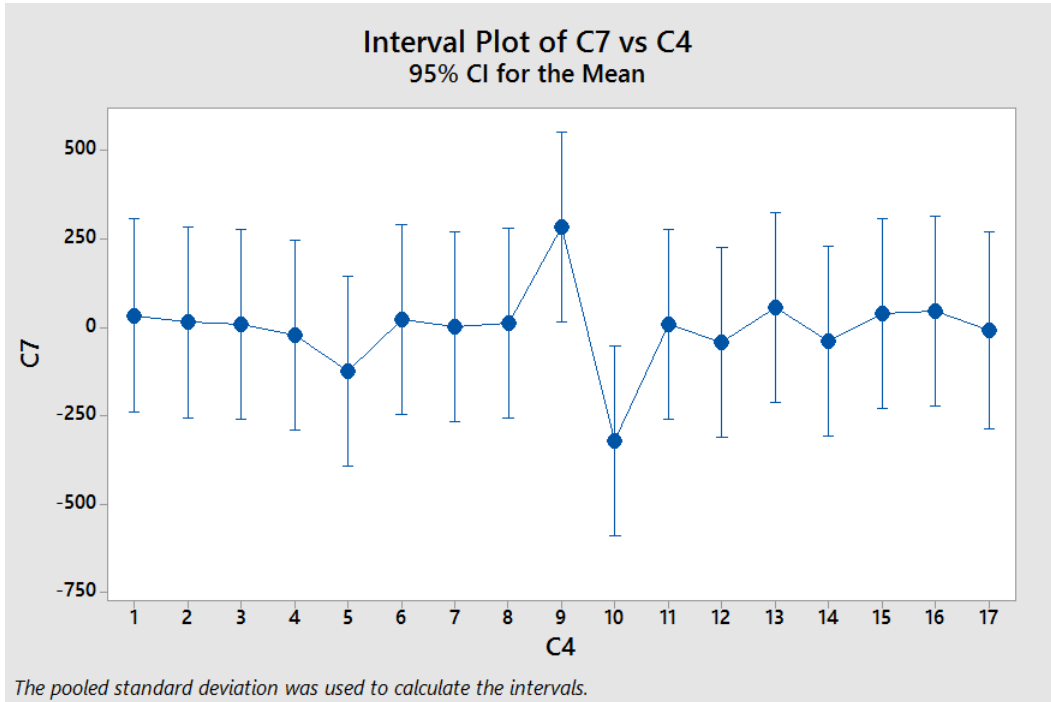
منبع	درجه آزادی	SS تعدیل شده	MS تعدیل شده	F-Value	P-Value
C4	۱۶	۵۶۷۷۲۵۳	۳۵۴۸۲۸	۰/۷۰	۰/۷۹۲
خطا	۴۳۹	۲۲۱۶۶۶۷۰۴	۵۰۴۹۳۶		
کل	۴۵۵	۲۲۷۳۴۳۹۵۷			

خلاصه‌ای از مدل که از نرم‌افزار بدست آمده به صورت زیر است:

S	R-sq	R-sq(adj)	R-sq(pred)
۷۱۰/۵۸۸	۲/۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

با توجه به نتایج بالا، نمودار ۵۰۳ را رسم می‌کنیم.

شکل ۵.۳: نمودار ایستایی میانگین نهایی



با توجه به مقدار  $P - value$  که بسیار از  $0.05$  بزرگتر است، فرض صفر که همان ایستایی میانگین است را می‌پذیریم.

اکنون به بررسی ایستایی واریانس می‌پردازیم.

در نرم افزار *Minitab* از دستور زیر استفاده می‌کنیم.

*Stat* → *Anova* → *Test forequalvariances*

نتایج به شرح زیر است:

سطح اطمینان =  $99.705$

پ-ارزش	آماره	روش
۰/۰۰	-	مقایسه چندگانه
۲۲۱۶۶۶۷۰۴	۴۳۹	لون
۰/۲۹۴	۱/۱۶	کل

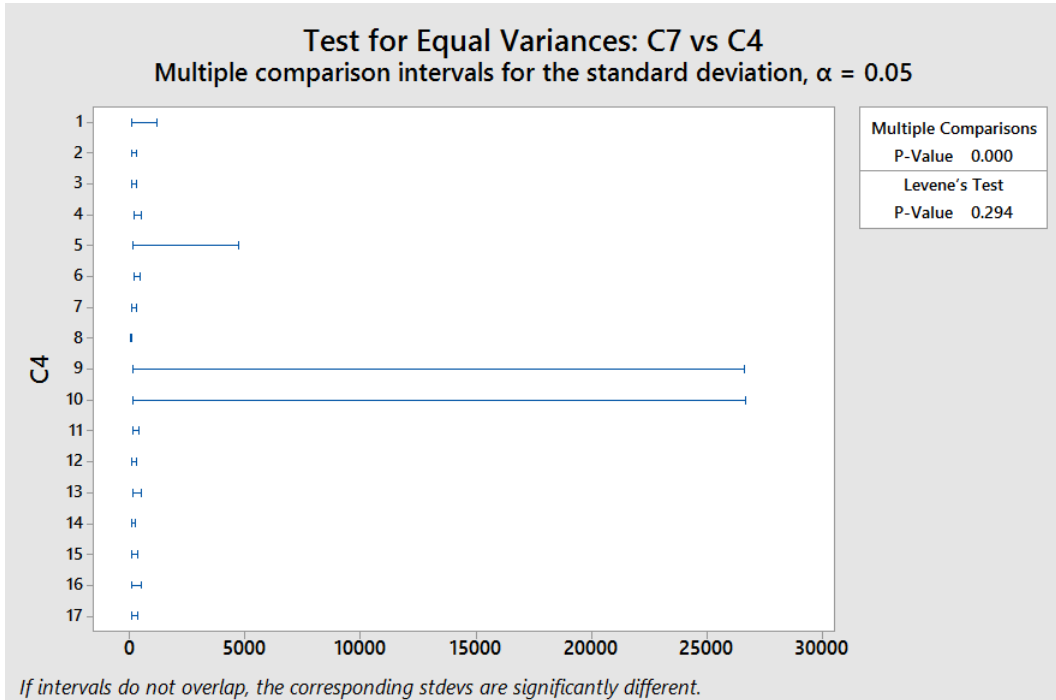
جدول ۲۰۳ مقادیر انحراف معیار برای هر گروه را نشان می‌دهد. این مقادیر برای بررسی ایستایی واریانس

که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم، از اهمیت بالایی برخوردار است.

جدول ۲.۳: مقدار انحراف معیار در هر زیر گروه

انحراف معیار	N	C4
۳۳۰/۹۰	۲۶	۱
۱۷۰/۶۶	۲۷	۲
۱۶۸/۷۴	۲۷	۳
۲۷۵/۹۲	۲۷	۴
۷۲۶/۱۶	۲۷	۵
۲۷۸/۶۳	۲۷	۶
۱۲۵/۸۵	۲۷	۷
۳۹/۸	۲۷	۸
۱۹۱۸/۴۵	۲۷	۹
۱۹۳۴	۲۷	۱۰
۱۹۹/۹۰	۲۷	۱۱
۱۵۶/۸۱	۲۷	۱۲
۲۵۹	۲۷	۱۳
۱۰۶/۶	۲۷	۱۴
۱۷۹/۱۶	۲۷	۱۵
۲۱۳/۲۶	۲۷	۱۶
۱۵۱/۲۶	۲۵	۱۷

شکل ۶.۳: نمودار ایستایی واریانس



با توجه به مقدار  $P - value$  که بسیار از  $0.05$  بزرگتر است فرض صفر که ایستایی واریانس است پذیرفته می‌شود. این مطلب به وضوح از شکل ۶.۳ نیز قابل مشاهده است. لازم به ذکر است که مقدار مربوط به آزمون *Leven* مورد نظر است. اگر واریانس ثابت نباشد می‌بایست از تبدیل *Boxcox* استفاده شود. این تبدیل باید روی داده‌ی اصلی اعمال شود.

### ۳.۳ برآزش مدل سری زمانی

پس از برقراری شروط مهم سری زمانی که همان ایستایی میانگین و واریانس است، اقدام به برآزش مدل مناسب می‌کنیم. به طور کلی از دو نمودار زیر مدل سازی استفاده می‌شود:

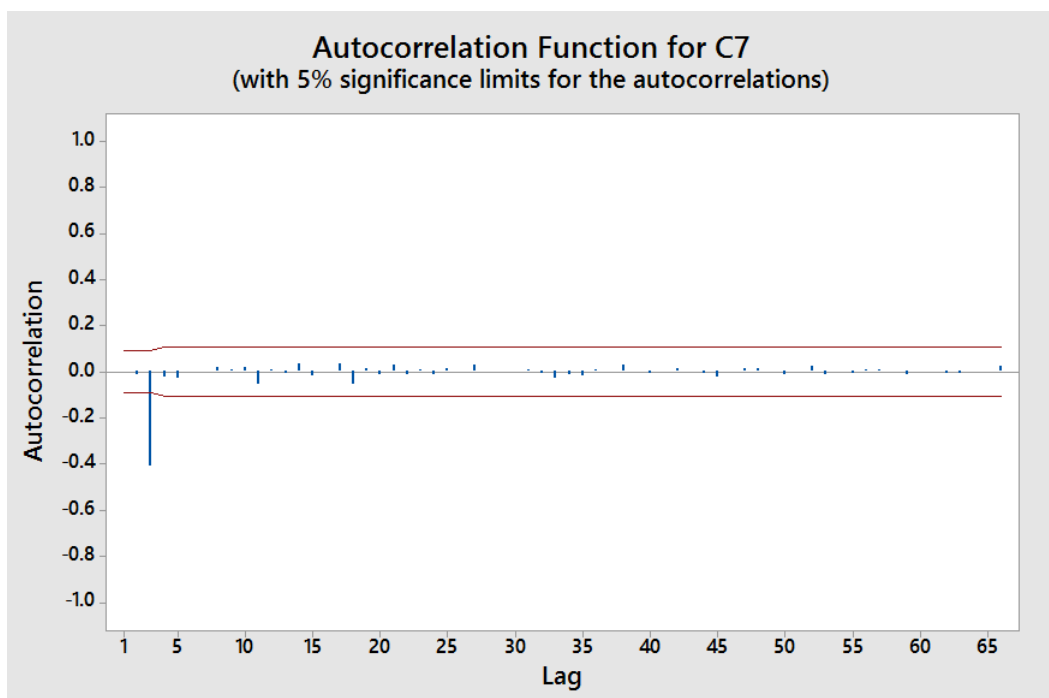
- Auto Correlation Function (ACF)

- Partial Auto Correlation Function (PACF)

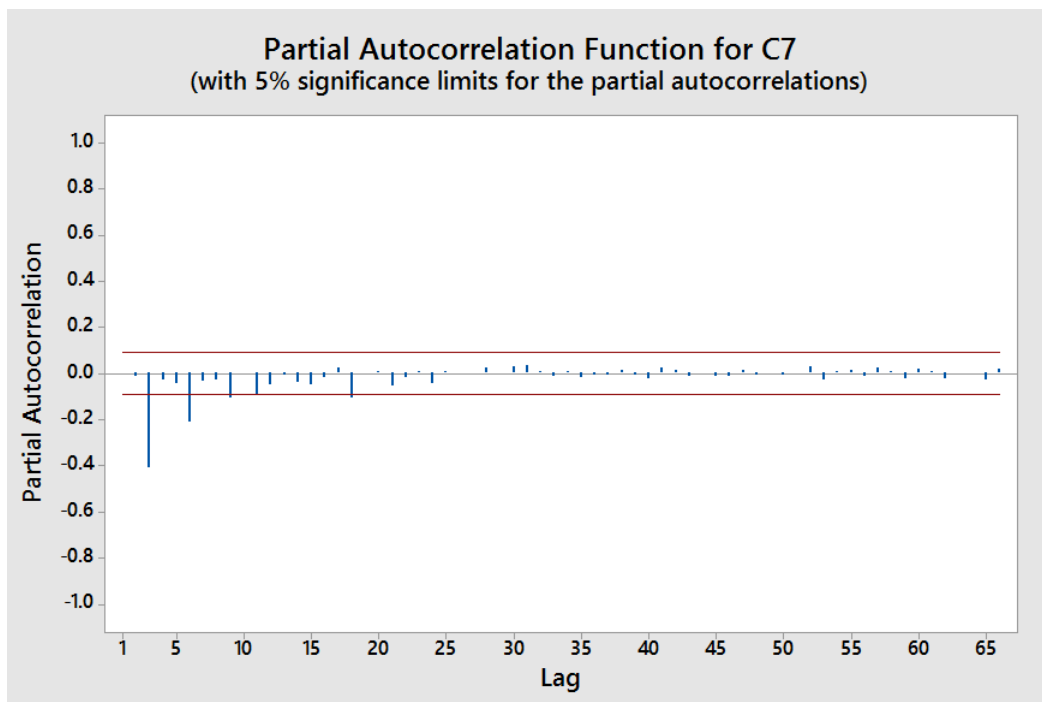
ابتدا طبق شکل‌های ۷۰۳ و ۸۰۳ نمودارهای همبستگی و همبستگی جزئی را روی ستونی که واریانس و میانگین‌اش ثابت شده است، رسم کرده و از روی این نمودارها به تعداد مرتبه‌های میانگین متحرک و اتورگرسیو

پی می‌بریم.

شکل ۷۰۳: نمودار ACF اولیه



شکل ۸.۳: نمودار  $PACF$  اولیه



با توجه به نمودار  $ACF$  حدس می‌زنیم که یک ترم  $MA$  غیر فصلی و با توجه به نمودار  $PACF$  انتظار می‌رود که سه ترم  $AR$  داشته باشیم. حال از طریق دستور زیر اقدام به برازش مدل آر‌ایما می‌کنیم.

**Stat** → *TimeSeries* → *ARIMA*

فرض صفر در این مدل وجود  $AR$  و  $MA$  است. حال فرض‌های ابتدایی که در بالا به آن اشاره شد را

اعمال کرده و نتیجه به شکل زیر خواهد بود:

برآورد نهایی پارامترها

نوع	ضرایب	انحراف معیار ضرایب	T	P
۱ AR	۰/۰۹۳۴	۰/۱۰۲۷	۰/۹۱	۰/۰۶۱
۲ AR	-۰/۰۱۳۰	۰/۰۴۳۲	-۰/۳	۰/۰۶۵
۳ AR	-۰/۴۰۹۷	۰/۰۴۳۴	-۹/۴۴	۰/۰۰
۱ MA	۰/۱۱۹۵	۰/۱۱۲۵	۱/۰۶	۰/۲۸۶
ثابت	-۰/۷۵	۲۶/۶۶	-۰/۰۳	۰/۱۷۷
میانگین	-۰/۵۷	۲۰/۰۵		

تعداد مشاهدات: ۴۵۶

مجموع مربعات باقی مانده‌ها = ۱۸۸۵۱۱۷۹۲

همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر  $P - value$  بسیار بزرگ‌اند و این مدل به هیچ عنوان قابل قبول نیست و حدس‌مان اشتباه بوده است. اتورگرسیو و میانگین متحرک ترم‌های ۱ تا ۵ را می‌گیرند. بنابراین ۲۵ حالت وجود دارد که می‌بایست چک شوند. لازم به ذکر است که روی داده‌ی ما اکنون یکبار تفاضل داده شده است، بنابراین مرتبه‌ی  $Difference$  صفر خواهد بود.

به عنوان مثال در حالت بعدی یک مرتبه‌ی دیگر به میانگین متحرک اضافه کرده و آنرا ۲ می‌کنیم. نتایج به شرح زیر است:

برآورد نهایی پارامترها



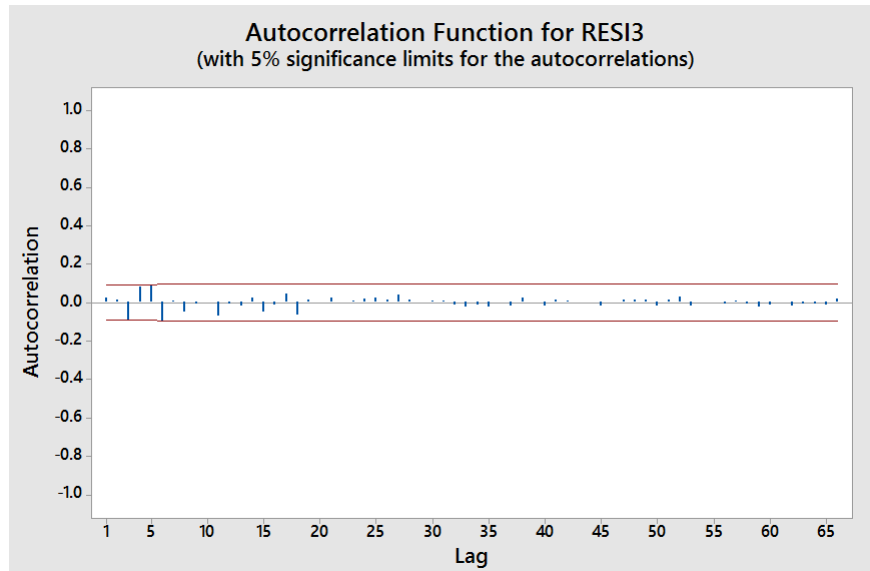
نوع	ضرایب	انحراف معیار ضرایب	T	P
۱ AR	۰/۲۶۶۴	۰/۱۱۲۸	۲/۳۱	۰/۰۰۹
۲ AR	۰/۳۲۰۵	۰/۰۹۴۴	۳/۳۰	۰/۰۰۱
۳ AR	-۰/۳۶۶۲	۰/۰۴۵۹	-۷/۹۴	۰/۰۰۰
۱ MA	۰/۳۶۳۵	۰/۱۱۹۱	۳/۰۶	۰/۰۰۲
۲ MA	۰/۳۸۵۹	۰/۱۱۴۸	۳/۳۶	۰/۰۰۱
ثابت	-۰/۸۶۲	۷/۴۹۴	-۰/۱۳	۰/۰۰۸
میانگین	-۱/۱۰۶	۹/۶۱۷		

تعداد مشاهدات: ۴۵۶

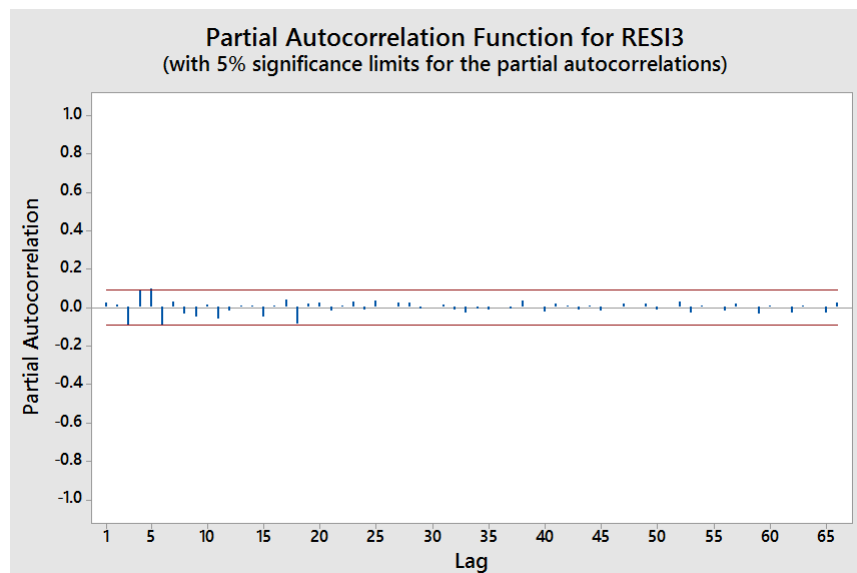
مجموع مربعات باقی مانده‌ها:  $SS = 183515276$

با توجه به مقادیر  $P - value$  که همگی از ۰/۰۵ کوچکترند، به نظر می‌رسد که مدل با این پارامترها مدل مناسبی برای برازش می‌باشد و  $AR$  و  $MA$  های غیر فصلی باید در مدل حضور داشته باشند. برای اطمینان نمودارهای  $ACF$  شکل ۹۰۳ و  $PACF$  شکل ۱۰۰۳ را برای باقی مانده‌های این مدل رسم می‌کنیم.

شکل ۹.۳: نمودار نهایی  $ACF$



شکل ۱۰.۳: نمودار نهایی  $PACF$



همانطور که مشاهده می‌کنیم تمام خطوط در دو نمودار داخل باند قرار گرفته اند و این موضوع به این

معنی است که یعنی تمام اطلاعات داده‌ها در مدل آمده و چیزی از قلم نیفتاده است. اما همانطور که دیده می‌شود لگ پنجم نمودار  $PACF$  کمی خارج قرار گرفته است؛ با آزمون و خطاهای بیشتر سعی می‌کنیم به مدلی دست یابیم که این مشکل کوچک را نیز نداشته باشد اما اگر مدل بهتری بدست نیامد همین مدل را انتخاب کرده و با توجه به آن مقادیر آینده را پیش‌بینی می‌کنیم.

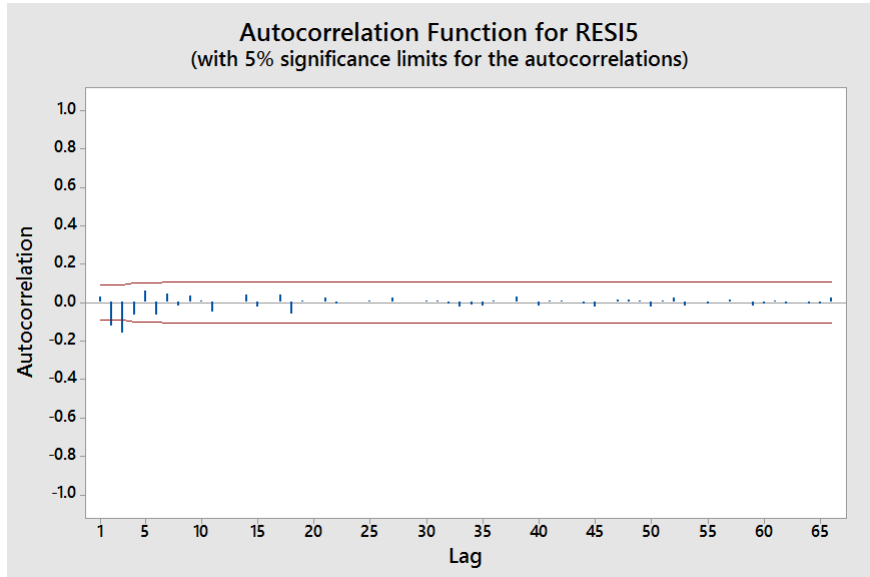
به عنوان مثال مدلی با پارامترهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\left. \begin{array}{l} AR = 2 \\ Difference = 0 \\ MA = 1 \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

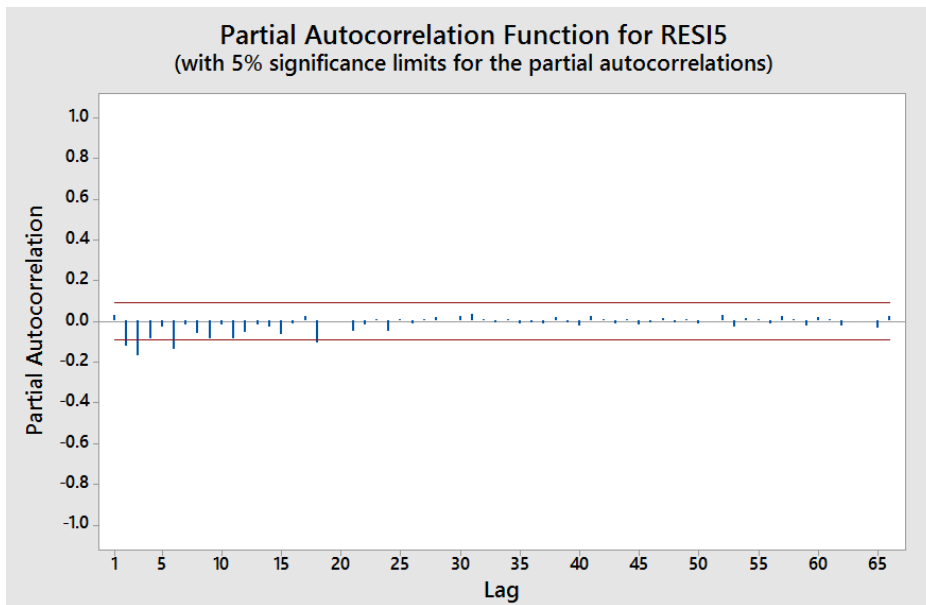
نتایج به صورت زیر است:

نمودارهای  $11.0.3$  و  $12.0.3$  نشان دهنده توابع  $ACF$  و  $PACF$  است.

شکل ۱۱.۳: نمونه‌ای دیگر از نمودار  $ACF$



شکل ۱۲.۳: نمونه‌ای دیگر از نمودار  $PACF$



همانطور که دیده شد مقدار  $P - value$  برای جمله‌ی ثابت از  $0/05$  بیشتر شد و در نتیجه این افزایش اثرش را در نمودارها نشان داد و باعث شده که چند لگ به مقدار کمی از باند خارج شوند. در نتیجه مدل ما به صورت  $ARIMA(3, 1, 2)$  در می‌آید.

### ۱.۳.۳ بررسی مجدد استقلال باقی مانده‌ها

برای اطمینان از درستی مدل و درستی فرایند یکبار دیگر استقلال باقی مانده‌ها را چک می‌کنیم. اگر فرض استقلال باقی مانده‌ها پذیرفته شد، یعنی مدل بدست آمده درست انجام شده است و اگر فرض استقلال رد شد یعنی هنوز اطلاعات مفیدی در باقی مانده‌هایمان وجود دارد که استفاده نکرده‌ایم. این بار نیز مانند جالت قبل از  $RunsTest$  برای صحت درستی استفاده می‌کنیم. آزمون دوها برای باقیمانده‌ها

$$0/0424869 = K \text{ دوها بالا و پایین}$$

$$234 = \text{تعداد دوهای مشاهده شده}$$

$$228/561 = \text{میانگین تعداد دوها}$$

۲۳۸ مشاهده بالای  $K$  و ۲۱۸ مشاهده زیر آن قرار دارد.

$$0/609 = P\text{-value}$$

مقدار  $P - value$  بیشتر از  $0/05$  شد و فرض استقلال پذیرفته می‌شود. به این دلیل به استقلال باقی مانده‌ها در این مرحله نیاز داریم که نشان دهیم نمودارهایی که در بالا رسم کردیم همه به طور تصادفی بین دو باند قرار گرفته‌اند.

### ۴.۳ پیش‌بینی

آخرین و مهم‌ترین مرحله پیش‌بینی است. مجموع داده ما شامل ۱۱۷ داده قبل از رخداد برکسیت است. ابتدا یک پیش‌بینی برای قیمت پوند بعد از برکسیت انجام می‌دهیم. از داده‌ی ۹۵ تا ۱۲۰ را طبق دستور زیر پیش‌بینی می‌کنیم:

$Stat \rightarrow TimeSeries \rightarrow ARIMA \rightarrow Forecast$

جدول ۳۰۳ به خوبی مقادیر این پیش‌بینی را نشان می‌دهد.

جدول ۳.۳: پیش‌بینی قیمت پوند

دوره	پیش‌بینی	حد پایین	حد بالا	مقدار واقعی
۹۶	۸۷۴/۷۴	-۱۳۲۶/۷	۱۱۷۷	۸۲۱
۹۷	۷/۳۶	-۱۳۸۵/۶	۱۱۳۰/۴۴	۰/۰۰
۹۸	۸/۷۸	-۱۳۲۱/۷۵	۱۲۰۴/۲۰	۰/۰۰
۹۹	۲۷۹/۹۴	-۱۳۹۸/۷۸	۱۳۳۸/۹۱	۲۷۸/۰۰
۱۰۰	۱۸/۹۶	-۱۳۵۶/۳۰	۱۳۹۴/۲۳	۳۴۴
۱۰۱	۲۱۶/۱۲	-۱۳۶۸/۷۴	۱۴۰۰/۹۷	۲۲۲
۱۰۲	۲۰/۴۷	-۱۳۶۸/۵۴	۱۴۰۹/۴۹	۰/۰۰
۱۰۳	۲/۸۱	-۱۳۸۶/۴۳	۱۳۹۲/۰۵	۰/۰۰
۱۰۴	۰/۵۵	-۱۳۹۲/۳۴	۱۳۹۳/۴۳	۰/۰۰
۱۰۵	۶۳۷/۳۱	-۱۴۰/۲۰	۱۳۸۵/۵۸	۶۳۴/۰۰
۱۰۶	۳/۶۶	-۱۳۹۶/۷۳	۱۳۸۹/۴۰	۰/۰۰
۱۰۷	۲۰۴/۳۸	-۱۳۹۷/۸۲	۱۳۸۹/۰۶	۲۰۴/۰۰
۱۰۸	۰/۵۳	-۱۳۹۳/۹۷	۱۳۹۲/۹۲	۳/۰۰
۱۰۹	۱۱۱/۰۶	-۱۳۹۴/۶۳	۱۳۹۲/۵۰	۱۱۳/۰۰
۱۱۰	۱۳۹۰/۲۹	-۱۳۹۳/۲۹	۱۳۹۳/۸۷	۱۴۰/۰۰
۱۱۱	۰/۹۳	-۱۳۹۴/۵۲	۱۳۵۲	۰/۰۰
۱۱۲	۵۲۵/۶۳	-۱۳۹۴	۱۳۹۲/۹۸	۵۳۸/۰۰
۱۱۳	۱/۴۳	<sup>۳۵</sup> -۱۳۹۴	۱۳۹۲	۰/۰۰

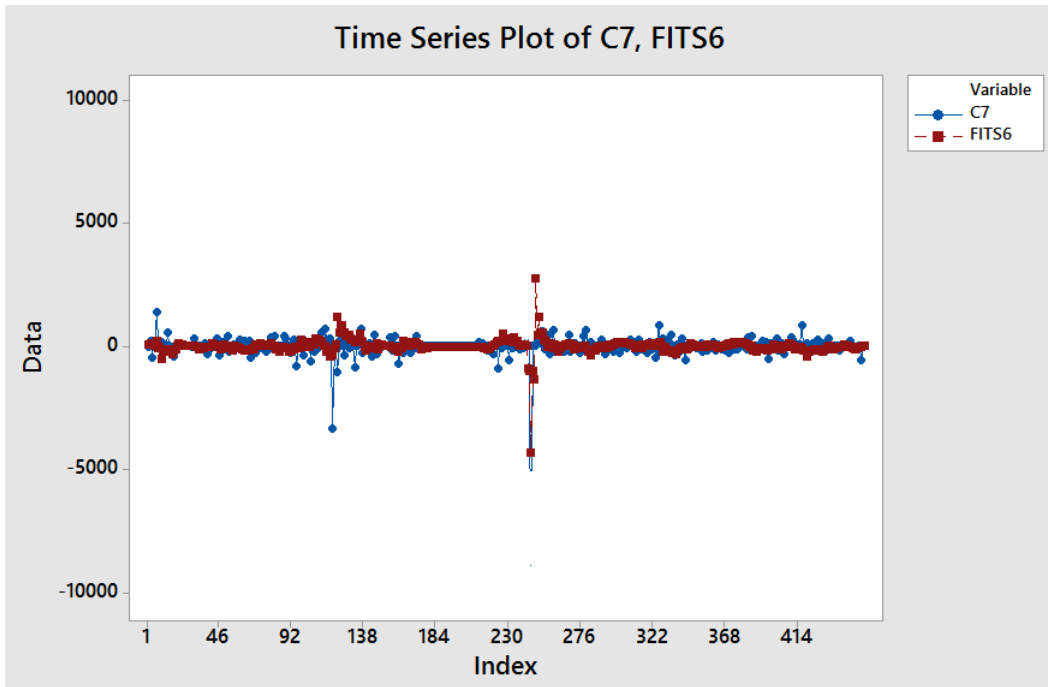
دوره	پیش‌بینی	حد پایین	حد بالا	مقدار واقعی
۱۱۴	۶۸۱/۱۰	-۱۳۹۴/۷۲	۱۳۹۲/۵۱	۶۸۵/۰۰
۱۱۵	۲۹۱/۳۹	-۱۳۹۵/۰۰	۱۳۹۲/۲۲	۲۹۱/۰۰
۱۱۶	۱۰۰/۰۶	-۱۳۹۴/۶۸	۱۳۹۲/۵۲	۱۰۸/۰۰
۱۱۷	۳۰۰/۱۸	-۱۳۹۴/۸۰	۱۳۹۲/۴۲	۳۲۵/۰۰
۱۱۸	۱/۰۱	-۱۳۹۴/۶۳	۱۳۹۲/۶۱	۰/۰۰
۱۱۹	۳۳۲۱/۱۲	-۱۳۹۴/۷۵	۱۳۹۲/۵۰	۳۳۱۹/۰۰
۱۲۰	۱/۰۵	-۱۳۹۴/۶۷	۱۳۹۲/۵۷	۰/۰۰

همانطور که مشاهده می‌شود مدل ما توانست به خوبی قیمت پوند را قبل و بعد از برکسیت پیش‌بینی کند. ممکن است عجیب برسد که چطور توانستیم قیمت پوند را بعد از رای به خروج بریتانیا از اتحادیه اروپا مدل آریما پیش‌بینی کنیم، یکی از مهم‌ترین دلایلش این است که قیمت پوند تاثیر شگرفی بر بازار ارز ایران نگذاشت! و همانطور که در قسمت‌های قبل نشان دادیم واریانس این دیتاست از ابتدا برخلاف دیگر داده‌های مالی کاملاً ثابت بود. گرچه در چند روزی بعد از این اتفاق قیمت دلار ۱۰ تومان، یورو ۵۴ تومان و پوند ۲۰۰ تومان کاهش داشت اما این کاهش ناگهانی در روزها و هفته‌های بعد دیده نشد.

نمودار ۳-۱۳ نشان دهنده‌ی مدل فیت شده بر داده‌ی اصلی است. از روی این نمودار نیز می‌شود به راحتی به درستی مدل برازش داده شده رسید.



شکل ۱۳.۳: مقایسه‌ی مدل فیت شده و داده‌ی اصلی



## نتیجه گیری

شاید بتوان گفت اهمیت قیمت ارز در اقتصاد ایران همانند اهمیت نرخ بهره پایه در اقتصادهای توسعه یافته است. متغیری کلیدی که تغییرات آن می تواند بسیاری از متغیرهای اقتصادی همانند تورم، تورم انتظاری، صادرات، واردات و تغییرات قیمت برخی دیگر از متغیرها همانند قیمت سکه، مسکن و ارزش سهام شرکت ها را تحت تاثیر قرار می دهد و از این جهت پیش بینی جهت حرکت آن در اقتصاد ایران از اهمیت بالایی برخوردار است. شرایط معاصر ایجاب میکند که در زمان حال به آینده اندیشه شود این واقعیتی است که سبب شده است مفاهیم نوینی به مانند آینده نگاری، آینده بینی و آینده سنجی پدیدار شود. از این رو اینگونه به نظر می رسد که برای بازار ارز کشوری مثل ایران حرکتی به بزرگی خروج بریتانیا از اتحادیه اروپا می تواند تبعات گوناگونی داشته باشد.

با بررسی و تحلیل داده های قیمت پوند ۱ سال اخیر این نتیجه به دست آمد که رای به خروج بریتانیا باعث نواسات زیادی در چند روز پس از آن شد. اما پس از دو هفته بازار به حالت قبل خود برگشت. به عبارت دیگر واریانس داده های پوند کاملاً ثابت بود و مدل های  $ARIMA$  به راحتی به آن برازش داده شد. این مجموعه داده می تواند مثال نقضی برای داده های مالی باشد، چرا که داده های مالی معمولاً به دلیل ثابت نبودن واریانسشان از مدلهایی چون  $ARCH$  پیروی می کنند.

در نهایت پس از برآزش مدل به پیش‌بینی بخشی از داده‌های در دسترس پرداخته شد. نتایج حاکی از آن است که مدل میانگین متحرک خود همبسته یکپارچه به خوبی قادر به پیش‌بینی قیمت پوند بوده است.

## واژه‌نامه

<b>Autoregressive</b> .....	اتورگرسیو
<b>Moving Average</b> .....	میانگین متحرک
<b>White Noise</b> .....	نوفه سفید
<b>Choise</b> .....	انتخاب
<b>Biasedness</b> .....	اریبی
<b>Autocorrelation</b> .....	خود همبستگی
<b>Stationary process</b> .....	فرایند مانا
<b>Analysis of Residuals</b> .....	تحلیل مانده‌ها

## کتابنامه

- [۱] جاناتان دی. کرایر، کونگ-سیک چن. (۱۳۹۲) "تحلیل سری‌های زمانی با برنامه کاربردی در آر". ترجمه محمدرضا مشکانی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی. صفحه ۱۳.
- [۲] جاناتان دی. کرایر، کونگ-سیک چن. (۱۳۹۲) "تحلیل سری‌های زمانی با برنامه کاربردی در آر". ترجمه محمدرضا مشکانی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی. صفحه ۲۲.
- [۳] جوج ای. پی. باکس، گویلیم ام. جنکینز، گرگوری سی، رینسال. (۱۳۹۳) "تحلیل سری‌های زمانی، پیش بینی و کنترل". ترجمه محمدرضا مشکانی. تهران: دانشگاه صنعتی شریف.
- [۴] جاناتان دی. کرایر، کونگ-سیک چن. (۱۳۹۲) "تحلیل سری‌های زمانی با برنامه کاربردی در آر". ترجمه محمدرضا مشکانی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی. صفحه ۳۳۶.

[۵] [www.cbi.ir](http://www.cbi.ir)

## Abstract

The purpose of this project is to find a suitable model before and after Brexit by using different concepts of time series. This dataset consists of 457 pound prices from 9/12/94 up until 9/3/96. Minitab software is used to analyse this dataset. In chapter one we have explained some basic concepts of time series. Financial data usually follows a special pattern in time series. However this hypothesis was not completely true for this dataset and as a result we have described all kind of patterns in time series. Third chapter is the most important one since it includes analysing, modelling and predicting the price of pound using ARIMA models. According to different definitions which have been mentioned in chapter two, it will not be difficult to find the proper model.

**Keywords:** Time Series - ARIMA- BREXIT - Stationary



College of Science

School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

# Comparing and Predicting The Price of Pound After Brexit

Shiva Kazempour Dehkordi

Supervisor: Dr. Soudabeh Shemesavar

A thesis submitted to Graduate Studies Office

in partial fulfillment of the requirements for the degree of

B.Sc. in

Statistics

2017