پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

تحلیل و بررسی نوسانات نرخ ارز از سال ۱۳۹۲ - ۱۳۹۵

نگارنده

مینا غلامی لاکسار

استاد راهنما: دکترسودابه شمه سوار

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی

در رشته آمار و کاربردها

تیر ماه ۱۳۹۶

چکیده

سری زمانی، داده یا مشاهداتی هستند که در طول زمان جمع‌آوری می‌شود و رابطه خطی با توالی زمان ندارد. در سری‌های زمانی ایستا(میانگین ثابت،واریانس ثابت) با استفاده از مدل‌های میانگین متحرک مرتبه q ، مدل آمیخته میانگین متحرک مرتبه qـ اتورگرسیو مرتبه p و مدل اتورگرسیو مرتبه p به بررسی وپیش بینی سری مورد نظر پرداخته می‌شود. طبق بررسی‌های انجام شده داده‌های مالی(نرخ ارز) دارای واریانس ناثابت هستند. لذا نمی‌توان با استفاده مدل‌هایی همچون مدل میانگین متحرک مرتبهq، مدل آمیخته میانگین متحرک مرتبه q اتورگرسیو مرتبه p و مدل اتورگرسیو مرتبه p به مدل‌بندی پرداخت. بنابراین از مدل‌هایی همچون ناهم‌واریانسی شرطی اتورگرسیو یا و ناهم‌واریانسی شرطی اتورگرسیو تعمیم یافته که دراین مدل‌ها واریانس ناثابت است، برای بررسی و مدل‌بندی نرخ ارز سال ۹۵ ـ ۹۲ استفاده می‌کنیم.

کلمات کلیدی: سری زمانی، سری زمانی ایستا، واریانس ناثابت، مدل ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو تعمیم یافته .

پیشگفتار

در سال ۲۰۰۳ رابرت انگل اقتصادسنج همراه با کلیو گرانگر که او نیز متخصص اقتصادسنجی است، جایزه نوبل اقتصاد را دریافت کرد. انگل جایزه‌اش را «به خاطر روش‌های تحلیل سری‌های زمانی اقتصادی با ناپایداری متغیر در طول زمان$ARCH$» از آن خود کرد. $ARCH$ مخفف این عبارت است: $AutoregressiveConditionalHeteroskedasticity$. این نامی است پیچیده، اما ایده ورای آن را میتوان درک کرد. بسیاری از داده‌ها به گونه‌ای تصادفی حول یک مقدار میانگین ثابت نوسان دارند. به عنوان مثال، قد کودکان شش ساله می‌تواند توزیعی نرمال حول مقدار میانگین خود داشته باشد. هنگامی که این داده‌ها را روی نمودار رسم می‌کنیم، یک منحنی موسوم به زنگی شکل را به وجود می‌آورند که همه دانش آموزان به این خاطر که معلمان‌شان «نمرات را روی منحنی می‌برند» با آن آشنا هستند. اما شمار زیادی از سری‌های زمانی اقتصادی (یا به بیان دیگر داده‌های ثبت شده بر پایه ترتیب تقویمی، به شکل سالیانه یا با وقفه‌های زمانی کوتاه‌تر یا طولانی‌تر) میانگینی ثابت ندارند. به عنوان مثال، جی‌دی‌پی معمولاً با گذر زمان افزایش می‌یابد. حتی اگر یک کارشناس اقتصادسنجی نرخ رشد روند آن را برآورد کند، باز هم درمی‌یابد که جی‌دی‌پی حول این روند نوسان دارد، یعنی ناپایدار است. گذشته از آن اگر جی‌دی‌پی در یک فصل بزرگ‌تر از این روند باشد، احتمالاً در فصل بعد نیز در مقداری بیشتر از آن باقی خواهد ماند و اگر کمتر از روند باشد، احتمالاً کماکان در اندازه‌ای پایین‌تر از آن خواهد ماند. این سری‌های زمانی را «اتورگرسیو» می‌نامند. این سری‌های زمانی عملاً یک میانگین کوتاه مدت و یک میانگین بلند مدت دارند. هر گونه نوسان تصادفی حول مقدار میانگین بلند مدت، میانگین کوتاه مدت را افزایش یا کاهش می‌دهد و حتی اگر هیچ نوسان تصادفی دیگری وجود نداشت، سری زمانی تنها به کندی به مقدار متوسط بلند مدت خود بازمی‌گشت. رفتار اتورگرسیو جی‌دی‌پی از وجود دوره‌های طولانی فعالیت اقتصادی بالاتر یا پایین‌تر از اندازه معمولی (رونق و رکود) حکایت می‌کند. هر چند کارشناسان اقتصادسنجی از مدت‌ها پیش می‌دانسته‌اند که ناپایداری در قیمت سهام، جی‌دی‌پی، نرخ‌های بهره و سری‌های زمانی دیگر در گذر زمان همیشگی نیست، اما پیش از انگل با این فرض نادرست که نوسان حول میانگین کوتاه مدت پایدار است، این میانگین دائماً دگرگون شونده را در قالب مدل

درمی‌آوردند. اگر این ناپایداری (اندازه‌گیری شده به میانجی انحراف معیار) ثابت باشد، کارشناسان آمار سری زمانی مربوطه را «هومواسکداستیک» می‌خوانند. اما انگل دریافت که برای بسیاری از مسائل مانند محاسبه حق بیمه یا قیمت اختیار معامله، نوسان یک سری حول مقدار میانگین به اندازه ناپایداری خود میانگین اهمیت دارد و این نوسان دائمی نیست. این گونه سری‌ها را «هترواسکداستیک» می‌خوانند. همانند آنچه که درباره میانگین جی‌دی‌پی دیدیم، یک سری زمانی (مانند سود شرکت یا نرخ تورم) را برخی اوقات به بهترین شکلی می‌توان به عنوان سری دارای ناپایداری کوتاه مدت یا بلند مدت توصیف کرد. این ناپایداری می‌تواند به گونه‌ای تصادفی حول مقدار بلند مدتش افزایش یا کاهش یابد. اگر نوسان هنگامی که زیاد است، به ماندن در همین سطح بالا گرایش داشته باشد یا هنگامی که اندک است، به ماندن در مقداری پایین متمایل باشد و تنها به کندی به مقدار بلند مدت خود بازگردد، آن گاه خود نوسان، اتورگرسیو خواهد بود. به همان گونه که نوسانات اتورگرسیو در جی‌دی‌پی چرخه کسب و کار را توضیح می‌دهند، ناپایداری اتورگرسیو در قیمت دارایی‌های مالی، چرخه‌های ریسک را که برای معامله‌گران ابزارهای مالی مهم است توصیف می‌کند. انگل راهی را برای فرمول‌بندی و برآورد مدل‌هایی یافت که می‌توانستند این چرخه‌ها را به خوبی توصیف کنند. واژه شرطی در عبارت $ARCH$ حکایت از آن می‌کند که مدل‌های انگل چرخه‌های رخ داده برای مقدار میانگین را نیز در نظر می‌گیرند. مدل $ARCH$ او را که نخستین بار در سال ۱۹۸۲ منتشر شد، می‌توان برای پیش‌بینی میزان نوسان به کار گرفت متغیری که برای سرمایه‌گذاری که می‌خواهند میزان ریسک دارایی‌های خود را در قالب سهام محدود کنند، بسیار مهم است. تیم بولرسلف از شاگردان انگل، این مدل را تعمیم بخشید و طبیعتاً آن را $GARCH$ ($ARCH$تعمیم‌یافته) نامید. $ARCH$ کاربردی عملی در تحلیل‌های موسوم به ارزش در معرض خطر پیدا کرده است. مدل‌های ارزش در معرض خطر برای محاسبه الزامات سرمایه‌ای برای همخوانی با قوانین بازل حاکم بر ریسک‌های بانکداری بین‌المللی استفاده می‌شوند. اقتصاددانان می‌توانند با به‌کارگیری روش $GARCH$ دریابند که یک سبد دارایی که احتمال وقوع یک مقدار بیشینه خسارت برای آن تنها احتمالی مشخص و اندک دارد، تا چه اندازه می‌تواند پرخطر باشد. سرمایه‌گذاران نیز می‌توانند چنین کاری را انجام دهند. در مثالی که در وب‌سایت کمیته نوبل آمده، می‌بینیم که اگر فردی در ۳۱ جولای سال ۲۰۰۲ یک میلیون دلار در قالب یکی از سهام تشکیل‌دهنده شاخص اس‌اندپی ۵۰۰ می‌داشت، مقدار زیان بیشینه در روز بعد با احتمال۹۹ درصد ۶۱۵۰۰ دلار یا نزدیک به ۶ درصد می‌بود.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم بنیادی سری‌های زمانی

در بخش اول این فصل به معرفی میانگین، واریانس و کوواریانس در فرآیندهای تصادفی می‌پردازیم. به دنبال آن مانایی در فرآیندها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. و در نهایت در بخش آخر یک فرآیند تصادفی مانای خاص به نام نوفه سفید[۱] را معرفی می‌کنیم و ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم.

۱.۱ میانگین‌ها، واریانس‌ها و کوواریانس‌ها

برای فرآیند تصادفی $\{Y_t : t = 0, \pm 1, \pm 2,\}$ تابع میانگین با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_t = E(Y_t), \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \tag{۱.۱}$$

یعنی μ_t صرفاً امید ریاضی در زمان است و به طور کلی می‌تواند در نقطه زمانی t مقداری متفاوت باشد. با تعریف تابع میانگین، تابع اتوکواریانس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma_{t,s} = cov(Y_t, Y_s) \tag{۲.۱}$$

[۱] White noise

در رابطه ، ۵.۳ کواریانس Y_s و Y_t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$cov(Y_t, Y_s) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s)] = E(Y_tY_s) - \mu_t\mu_s \tag{۳.۱}$$

حال تابع خود همبستگی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$corr(Y_t, Y_s) = \frac{cov(Y_t, Y_s)}{\sqrt{var(Y_t)var(Y_s)}} = \frac{\gamma_{t,s}}{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}} \tag{۴.۱}$$

توابع کوواریانس و همبستگی، هر دو برای سنجش معیارهای وابستگی (خطی) بین متغیرهای تصادفی بکار می‌روند، اما تفسیر همبستگی بدون ملاک واحد اندازه‌گیری تا حدی آسان‌تر است. خواصی که از تعاریف بالا حاصل می‌شود را در ادامه ارائه کرده‌ایم.

- $\gamma_{t,t} = var(Y_t)\rho_{t,t} = 1$
- $\gamma_{t,s} = \gamma_{s,t}$
- $|\gamma_{t,s}| \leq \sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{s,s}}$
- $\rho_{t,s} = \rho_{s,t}$
- $|\rho_{t,s} \leq 1$

ρ به ± 1 نزدیک‌تر باشد، بیانگر این مطلب است که وابستگی خطی بین متغیرها قوی است و هرچه این مقدار به صفر نزدیک‌تر باشد، نشان دهنده وابستگی ضعیف بین متغیرها است. در صورتی که داشته باشیم $\rho_{t,s} = 0$ اصطلاحاً گوییم متغیرهای Y_t و Y_s ناهمبسته‌اند.

۲.۱ مانایی

برای انجام استنباط آماری درباره ساختار یک فرآیند تصدفی برپایه سابقه‌ای مشاهده شده از آن فرآیند، معمولاً باید برخی فرض‌های آسان‌ساز را درباره آن ساختار در نظر بگیریم. مهم‌ترین چنین فرض‌هایی، فرض مانایی است. ایده اساسی مانایی آن است که قانون احتمال حاکم بر رفتار فرآیند در طی زمان تغییر نمی‌کند. به یک معنا، فرآیند در تعادل آماری است. به طور مشخص فرآیند Y_t را مانای اکید گویند، هرگاه توزیع توأم متغیرهای $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$ به ازای همه انتخاب‌های نقطه زمانی $t_1, t_2, \ldots, t_n$ و همه انتخاب‌های تأخیر K، همانند توزیع توأم $Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, \ldots, Y_{t_n-k}$ باشد. بدین ترتیب وقتی $n = 1$ باشد، توزیع تک متغیره Y_t به ازای تمام مقادیر t و k همانند توزیع Y_{t-k} خواهد بود. به بیان دیگر، متغیرهای Y به طور حاشیه‌ای هم توزیع هستند. در این صورت نتیجه می‌شود که به ازای همه مقدارهای t و k تابع میانگین برای همه متغیرها ثابت

است. افزون بر آن همه مقدارهای t و k داریم:

$$var(Y_t) = var(Y_{t-k}) \tag{۱.۵}$$

که بدین معنی است که واریانس نسبت به زمان ثابت است. با قرار دادن $n = 2$ در تعریف مانایی مشاهده می‌کنیم که توزیع دو متغیره Y_t و Y_s باید همانند توزیع Y_{t-k} و Y_{s-k} باشد. از این مطلب نتیجه می‌شود که به ازای تمام مقادیر t، s و k داریم:

$$cov(Y_t, Y_s) = cov(Y_{t-k}, Y_{s-k}) \tag{۱.۶}$$

اگر $k = s$ و سپس $k = t$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\gamma_{t,s} &= cov(Y_{t-s}, Y_0) \\
&= cov(Y_0, Y_{s-t}) \\
&= cov(Y_0, Y_{|t-s|}) \\
&= \gamma_{|t-s|}
\end{aligned} \tag{۱.۷}$$

یعنی کوواریانس بین Y_t و Y_s تنها از طریق اختلاف زمانی $|t-s|$ به زمان وابسته است و از طریق زمان‌های t و s به زمان وابسته نیست.

بدین ترتیب، در مورد یک فرآیند مانا می‌توانیم نمادگذاری را ساده‌تر کنیم و بنویسیم:

$$\begin{aligned}
\rho_k &= corr(Y_t, Y_{t-k}) \\
\gamma_k &= cov(Y_t, Y_{t-k})
\end{aligned} \tag{۱.۸}$$

همچنین دقت کنیم که:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{۱.۹}$$

اگر فرآیند مانای اکید و دارای واریانس متناهی باشد، آنگاه تابع اتوکوواریانس آن باید تنها به تاخیر زمانی بستگی داشته باشد.

تعریف دیگری از مانای اکید وجود دارد که از لحاظ ریاضی قدری ضعیف‌تر است و دارای شرایط زیر است:

۱ـ تابع میانگین نسبت به زمان ثابت باشد.

۲ـ به ازای همه مقادیر t و تأخیرهای k داشته باشیم:

$$\gamma_{t,t-k} = \gamma_{0,k} \tag{۱.۱۰}$$

۳.۱ نوفه سفید

مثالی بسیار مهم از یک فرآیند مانا فرآیند موسوم به نوفه سفید است که به صورت دنباله‌ای ازمتغییرهای تصادفی مستقل و هم توزیع e_t تعریف می‌شود. اهمیت آن تنها ناشی از این نیست که خود مدل جالبی است بلکه به این دلیل است که بسیاری از فرآیندهای مفید را می‌توان با استفاده از نوفه سفید ساخت.این واقعیت که e_t مانای اکید است به وضوح دیده می‌شود. یعنی:

$$\begin{aligned} &Pr(e_{t_1} \leq x_1, e_{t_2} \leq x_2, \ldots, e_{t_n} \leq x_n) \\ &Pr(e_{t_1} \leq x_1) Pr(e_{t_2} \leq x_2) \ldots Pr(e_{t_n} \leq x_n) \\ &Pr(e_{t_1-k} \leq x_1) Pr(e_{t_2-k} \leq x_2) \ldots Pr(e_{t_n-k} \leq x_n) \\ &Pr(e_{t_1-k} \leq x_1, e_{t_2-k} \leq x_2, \ldots, e_{t_n-k} \leq x_n) \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

و همچنین داریم:

$$\mu_t = E(e_t) \tag{۱۲.۱}$$

که در اینجا μ_t یک عدد ثابت است. و

$$\gamma_k = \begin{cases} var(e_t) & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

یا به طور جایگزین می‌توان نوشت:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

اصطلاح نوفه سفید از این واقعیت ناشی می‌شود که تحلیل بسامدی مدل نشان می‌دهد که در قیاس با نوفه سفید، همه بسامدها به طور برابر وارد می‌شوند. معمولاً فرض می‌کنیم که فرآیند نوفه سفید میانگین صفر دارد و $var(e_t)$ را با σ_e^2 نشان می‌دهیم.

فصل ۲

مدل هایی برای سری زمانی مانا

در این فصل ابتدا فرآیند خطی کلی را معرفی کرده و به بیان ویژگی‌های آن می‌پردازیم. پس از آن ویژگی‌های فرآیند میانگین متحرک را بررسی می‌کنیم و فرآیند میانگین متحرک مرتبه کلی را معرفی می‌کنیم. در بخش بعدی به معرفی فرآیند اتورگرسیو می‌پردازیم و فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول و مرتبه کلی را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم مدل‌های آمیخته میانگین متحرک اتورگرسیو را بیان می‌کنیم.

۱.۲ فرآیند خطی کلی

همواره فرض خواهیم کرد Y_t سری زمانی مشاهده شده را نشان می‌دهد. از اینجا به بعد همچنین فرض خواهیم کرد e_t نشان دهنده یک سری نوفه سفید مشاهده نشده است، یعنی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر است. در بخش اعظم کار، می‌توان به جای فرض استقلال، فرض ضعیف‌تر ناهمبسته بودن متغیرهای تصادفی e_t را قرار داد، اما این تعمیم اندک را دنبال نخواهیم کرد. یک فرآیند خطی کلی Y_t فرآیندی است که می‌توان آن را به صورت ترکیب خطی موزونی از جمله‌های نوفه سفید حال و گذشته به شکل زیر نمایش داد:

$$Y_t = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots \qquad (۱.۲)$$

اگر طرف راست این عبارت واقعاً یک سری نامتناهی باشد، آنگاه برای آنکه طرف راست از لحاظ ریاضی با معنا باشد باید شرایط معینی برای وزن‌های ψ در نظرگرفته شود. برای هدف‌های ما کافی است فرض شود که:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 \leq \infty \tag{۲.۲}$$

همچنین باید توجه داشته باشیم که چون e_t مشاهده‌نشدنی است، اگر فرض کنیم ضریب e_t برابر یک است، یعنی عملا $\psi_0 = 1$ از کلیت رابطه بالا چیزی نمی‌کاهد.

۲.۲ فرآیند میانگین متحرک

در حالتی که تنها تعدادی متناهی از وزن‌های ψ داشته باشیم، فرآیند موسوم به فر آیند میانگین متحرک را خواهیم داشت. در این حالت نمادگذاری را کمی تغییر می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$Y_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2} + \ldots + \theta_q e_{t-q} \tag{۳.۲}$$

یک چنین سری را میانگین متحرک مرتبه q می‌نامیم و نام آن را با $MA(q)$ کوتاه می‌کنیم. اصطلاح میانگین متحرک از این واقعیت ناشی می‌شود که Y_t با بکار بردن وزن‌های $1, -\theta_1, -\theta_2, \ldots, -\theta_q$ برای متغیرهای $e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, \ldots, e_{t-q}$ به دست می‌آید و سپس با انتقال وزن‌ها و به کار بستن آن‌ها درمورد $e_{t+1}, e_{t-2}, e_{t-3}, \ldots, e_{t-q+1}$ متغیر Y_{t+1} به دست می‌آوریم و همین طور تا آخر پیش می‌رویم. مدل‌های میانگین متحرک ابتدا توسط اسلوتسکی (۱۹۲۷) و ولد (۱۹۳۸) بررسی شدند.

۱.۲.۲ فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول

فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول که در عین حال ساده اما با این وجود مهم هستند و با $MA(1)$ نشان داده می‌شوند را بررسی می‌کنیم. این مدل به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
&Y_t = e_t - \theta e_{t-1} \\
&E(Y_t) = 0 \\
&\gamma_0 = var(y_t) = \sigma_e^2(1+\theta^2) \\
&\gamma_1 = cov(Y_t, y_{t-1}) = cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-1} - \theta e_{t-2}) \\
&= cov(-\theta e_{t-1}, e_{t-1}) = -\theta\sigma_e^2 \\
&\rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2} \\
&cov(y_t, y_{t-2}) = cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-2} - \theta e_{t-3}) = 0 \\
&\gamma_k = \rho_k = 0 \quad k \geq 2
\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

۲.۲.۲ فرآیند میانگین متحرک مرتبه کلی

فرآیند میانگین متحرک مرتبه کلی به صورت زیر تعریف می‌شود و دارای خواص زیر است:

$$\begin{aligned}
&Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q} \\
&\gamma_0 = (1+\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots\theta_q^2)\sigma_e^2\rho_k \\
&\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\theta_2^2+\ldots+\theta_q^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, q \\
&\rho_k = 0, \qquad k > q
\end{aligned} \tag{۵.۲}$$

۳.۲ فرآیند اتورگرسیو

فرآیند اتورگرسیو- چنان که از نام آن‌ها برمی آید- رگرسیون‌هایی برحسب خودشان هستند. به طور مشخص، یک فرآیند اتورگرسیو مرتبه P که با نماد $AR(P)$ نشان داده می‌شود، در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \ldots + \varphi_p Y_{t-p} + e_t \qquad (۶.۲)$$

فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول

$$Y_t = \varphi Y_t + e_t$$

$$var(Y_t) = \gamma_0 = \varphi^2 \gamma_0 + \sigma_e^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1-\varphi^2}$$

$$E(Y_t) = 0$$

$$\gamma_k = \varphi \gamma_{k-1}$$

$$\gamma_k = \varphi^k \frac{\sigma_e^2}{1-\varphi^2}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \varphi^k \qquad (۷.۲)$$

فرآیند اتورگرسیو مرتبه کلی

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \ldots + \varphi_p Y_{t-p} + e_t \qquad (۸.۲)$$

معادلات یول- واکر:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \varphi_1 + \varphi_2\rho_1 + \varphi_3\rho_2 + \ldots + \varphi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 + \varphi_3\rho_2 + \ldots + \varphi_p\rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \varphi_1\rho_{p-1} + \varphi_2\rho_{p-2} + \varphi_3\rho_{p-3} + \ldots + \varphi_p \\
\rho_0 &= 1 \\
var(Y_t) &= \gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \varphi_1\rho_1 - \varphi_2\rho_2 - \ldots - \varphi_p\rho_p} \qquad (۹.۲)
\end{aligned}
$$

۴.۲ مدل‌های آمیخته میانگین متحرک اتورگرسیو

اگر بپذیریم که سری پاره‌ای اتورگرسیو و پاره‌ای میانگین متحرک است، یک مدل سری زمانی کاملا کلی به دست می‌آوریم که:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \ldots + \varphi_p Y_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q} \qquad (۱۰.۲)$$

در این حالت گوییم که Y_t یک فرآیند آمیخته میانگین متحرک اتورگرسیو مرتبه p و q است. چنین فرآیندی را به اختصار با $ARMA(p,q)$ نشان می‌دهند.

فرآیند آمیخته میانگین متحرک اتورگرسیو مرتبه یک و یک

در حالتی که $p = 1$ و $q = 1$ باشد، داریم $ARMA(1,1)$ و رابطه تعریف کننده به صورت زیر قابل بیان است:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \varphi Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1} \\
\gamma_0 &= \frac{(1 - 2\theta\varphi + \theta^2)}{1 - \varphi^2}\sigma_e^2 \\
\rho_k &= \frac{(1 - \theta\varphi)(\varphi - \theta}{1 - 2\theta\varphi + \theta^2}\varphi^{k-1} \qquad (۱۱.۲)
\end{aligned}
$$

فصل ۳

داده‌های نرخ دلار

در این فصل دو سؤال درباره داده‌های نرخ دلار مطرح می‌شود. سؤال اول درباره این موضوع بحث می‌کند که آیا داده‌های نرخ دلار را می‌توان به صورت یک سری زمانی در نظر گرفت که در بخش اول به این سؤال پاسخ داده شده است. سؤال بعدی درباره مانایی نرخ دلار مطرح می‌شود که پاسخ آن در بخش دوم ارائه شده است.

۱.۳ آیا نرخ دلار سری زمانی است؟

سؤال اصلی که مطرح می‌شود این است که آیا داده‌های نرخ دلار یک سری زمانی است یا رابطه خطی با توالی زمان دارد؟ برای بررسی اینکه آیا داده‌های ما سری زمانی هستند یا نه به سراغ نرم‌افزار آماری R می‌رویم. برای این منظور ابتدا فرض می‌کنیم یک مدل رگرسیونی به داده‌ها برازش داده می‌شود و شرایط رگرسیونی را بررسی می‌کنیم.

```
Y=scan()


X1=1:849;

X1

X2=x1^2

X2

Reg=lm(y~X1+x2)
```

```
Reg

Summary(reg)
```

مدل رگرسیونی را با دستور $y \sim x|txz$ برازش می‌دهیم و جدول آنالیز واریانس را با دستور $summary(Reg)$ اجرا می‌کنیم که خروجی آن در جدول ۱.۳ زیر نشان داده شده است.

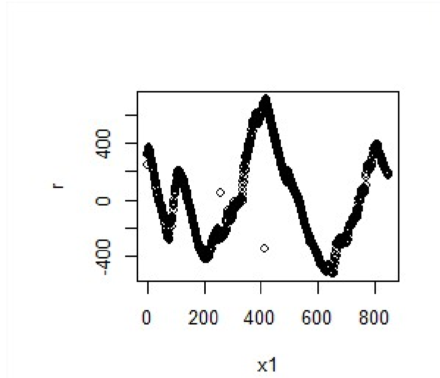
جدول ۱.۳: جدول آنالیز واریانس مدل رگرسیونی

ضرایب	برآورد	خطای استاندارد	آماره t	p-value
عرض از مبدا	۲/۵۰۴e+۰۴	۳/۱۵۸e+۰۱	۷۹۲/۷۹	۰/۰۰۰۰۱
x۱	۱/۱۶۹e+۰۱	۱,۷۱۶e-۰۱	۶۸/۱۱	۰/۰۰۰۰۱
x۲	-۳/۸۰۴e-۰۳	۱/۹۵۵e-۰۴	۱۹/۴۶_	۰/۰۰۰۰۱

با توجه به اطلاعات ارائه شده در ۱.۳ مشاهده می‌کنیم که مقدار $p-value < 0/05$ است و فرض صفر بودن رد می‌شود. با توجه به مقدارهای گزارش شده مدل رگرسیونی به داده‌ها برازش داده می‌شود. وشرایط رگرسیونی را بررسی می‌کنیم. ابتدا نمودار مانده‌ها را رسم می‌کنیم، برای این کار مانده‌های مدل رگسیونی و مقدار برازش داده شده بر اساس مدل رگرسیونی را در آبجکت‌های جدا گانه ایجاد می‌کنیم. به این صورت که مانده‌ها و مقادیر برازش داده شده مدل رگرسیونی را با استفاده از دستورات زیر فراخوانی می‌کنیم.

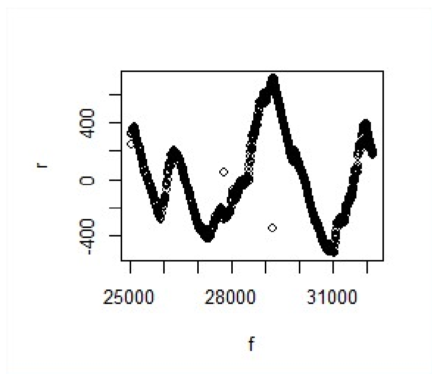
```
r=reisd(reg )

fit=fitted(reg)

plot(x1,r)

Plot(f,r)

hist(r)
```

پس از آن نمودارهای مانده‌ها در برابر توالی زمان، مقادیر برازش داده شده در برابر باقی‌مانده‌ها، هیستوگرام باقی‌مانده‌ها و نمودار احتمال نرمال باقی‌مانده‌ها را به ترتیب در شکل‌های ۱.۳، ۲.۳، ۳.۳ و ۴.۳ ارائه شده است.



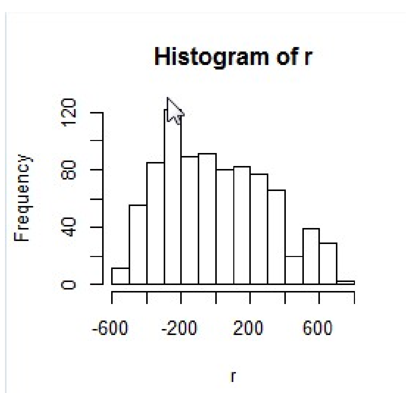
شکل ۱.۳: نمودار توالی زمان مانده‌ها در برابر

با توجه به شکل ۱.۳ چون مانده‌ها دارای روند خاص نیست، پس حدس می‌زنیم که مانده‌ها مستقل نیستند.



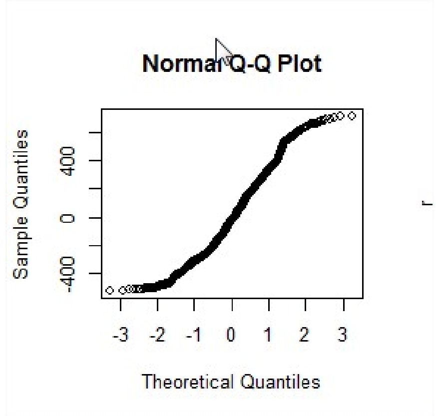
شکل ۲.۳: نمودار مقادیر برازش داده شده در برابر مانده‌ها

با توجه به شکل ۲.۳ چون مانده‌ها داخل یک مستطیل نیستند، لذا حدس می‌زنیم مانده‌ها دارای واریانس ثابت نیستند.



شکل ۳.۳: نمودار هیستوگرام باقی‌مانده‌ها

با توجه به شکل ۴.۳ چون نمودار مانده‌ها شبیه به زنگوله نیست، حدس می‌زنیم مانده‌های ما نرمال نیستند.



شکل ۴.۳: نمودار احتمال نرمال

با توجه به شکل ۱.۳ چون مانده‌ها دارای روند نیستند حدس می‌زنیم مانده‌ها مستقل نیستند. برای استنباط دقیق‌تر به سراغ آزمون فرض‌های آماری می‌رویم. برای این کار ابتدا کتابخانه $library(randtests)$ را فراخوانی کرده و با استفاده از دستور $runs.test(r)$ مطابق جدول ۲.۳ چون مقدار $p-value$ فرض مستقل بودن مانده‌ها رد می‌شود.

جدول ۲.۳: بررسی استقلال مانده‌ها

p-value	آماره
۰/۰۰۰۰۱	۲۷/۷۶۳-

در این مرحله با استفاده از دستور $Shapiro.test(r)$ مطابق جدول ۳.۳ فرض نرمال بودن مانده‌ها را آزمون می‌کنیم.

جدول ۳.۳: بررسی نرمال بودن مانده ها

p-value	آماره
۰/۰۰۰۰۱	۰/۹۶۸۰۱

با توجه به جدول ۳.۳ مقدار $P-value$ که از ۰,۰۵ کوچکتر است، فرض نرمال بودن مانده‌ها رد می‌شود. با توجه به استنباط‌های انجام شده مدل رگرسیونی مناسب نیست، لذا به سراغ سری زمانی می‌رویم.

۲.۳ آیا نرخ ارز ایستاست؟

برای بررسی این سؤال ابتدا به سراغ تعریف ایستایی می‌رویم. به یاد می‌آوریم که سری‌های زمانی ایستا هستند که میانگین و واریانس ثابت دارند. ابتدا آبجکت فاکتور برای دسته بندی داده‌ها را با دستورات زیر می‌سازیم:

```
Factor=rep(1:85,each=10)

Factor=factor[1:849]

Library(Rcmdr)

Levene.test(y,factor)
```

جدول ۴.۳: بررسی همگنی واریانس

p-value	آماره
۰/۰۰۰۰۱	۳/۲۵۷۸

با توجه به جدول ۴.۳فرض برابری واریانس‌ها با توجه به مقدار $P - value$ رد می‌شود. با توجه به رد برابری واریانس‌ها باید این فرض در آزمون برابری میانگین‌ها در نظر بگیریم. در نرم افزارR پیش فرض نابرابری واریانس‌ها را در نظرمی‌گیرد. با دستور زیر برابری میانگین‌ها را آزمون می‌کنیم:

```
Oneway.test(y~factor)
```

جدول ۵.۳: بررسی همگنی میانگین

p-value	آماره
۰/۰۰۰۰۱	۸۱۲۶۶۰

طبق جدول ۵.۳ چون $p - value$ کمتر از ۰,۰۵ است فرض برابری میانگین‌ها رد می‌شود لذا داده ها را یک مرتبه تفاضلی می کنیم و مجدد ثبات واریانس و میانگین را بررسی می کنیم.

```
Y1=diff(y)
```

```
Library(Rcmdr)

factor1=factor[1:848]

Leven.test(y1,factor1)
```

جدول ۶.۳: بررسی همگنی واریانس ها

آماره	p-value
۲/۱۶۱۷	۰/۰۰۰۰۱

با توجه به جدول ۶.۳ مقدار $P-value$ که از ۰,۰۵ کوچکتر است، فرض همگنی واریانس‌ها رد می‌شود.

حال به بررسی ثبات میانگین‌ها می پردازیم:

```
oneway.test(y1~factor1)
```

جدول ۷.۳: بررسی ثبات میانگین

آماره	p-value
۳/۵۱۱۴	۰/۰۰۰۰۱

با توجه به جدول ۷.۳ مقدار $P-value$ کمتر از ۰,۰۵ است، لذا فروض مربوطه رد می‌شود. در این مرحله بار دیگر داده‌ها را تفاضلی می‌کنیم و سپس آزمون برابری واریانس‌ها را انجام می‌دهیم.

```
y2=diff(y1)

factor2=factor[1:847]

levene.test(y2,factor2)
```

جدول ۸.۳: بررسی همگنی واریانس ها

آماره	p-value
۳/۱۶۰۴	۰/۰۰۰۰۱

که با توجه به جدول ۸.۳ مقدار $P - value$ کمتر از ۰٫۰۵ است ، لذا فرض مربوطه رد می‌شود. با اعمال فرض بالا به سراغ بررسی ثبات میانگین می‌رویم:

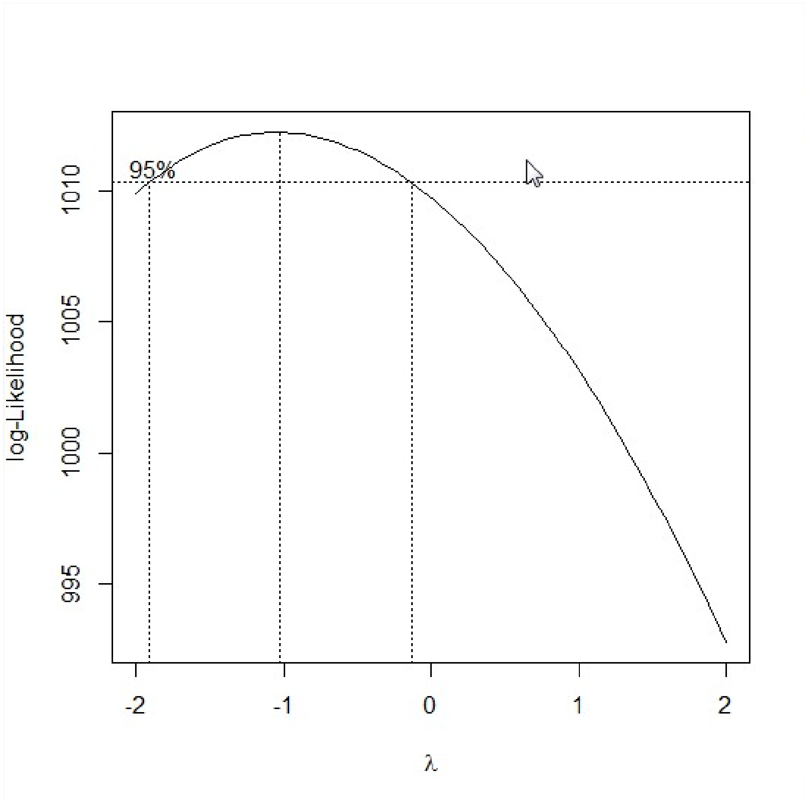
```
oneway.test(y2~factor2)
```

جدول ۹.۳: بررسی ثبات میانگین

آماره	p-value
۰/۱۳۰۰۹	۱

با مقایسه مقدار $P - value$ فرض برابری میانگین‌ها پذیرفته می‌شود. تا اینجا میانگین داده‌ها با دو مرتبه تفاضلی کردن، ثابت شد و یکی از شرایط مدل‌های ایستا فراهم شد. حال به سراغ بررسی شرط دیگر یعنی ثبات واریانس می‌رویم. ملاحظه شد که با دو مرتبه تفاضلی کردن واریانس هم چنان ناثابت است. از این رو به سراغ تبدیل باکس- کاکس می‌رویم.

```
x1=1:849
x2=x1^2
reg=lm(y~ x1+x2)
library(MASS)
boxcox(reg,lambada=seq(-2,2,.1))
```



شکل ۵.۳

با توجه به شکل ۵.۳ مقدار ماکسیمم ۱- می باشد لذا داده ها را به توان ۱- میرسانیم و مجدد تفاضلی کردن اعمال می کنیم و ثبات واریانس را بررسی می کنیم.

```
y3=y1^(-1)

y1=diff(y3)

y2=diff(y1)

levene.test(y2,factor2)
```

جدول ۱۰.۳: بررسی همگنی واریانس

p-value	آماره
۰,۰۰۰۰۱	۳/۱۷۸۵

مشاهده می‌شود که تبدیل باکس- کاکس برای ثبات واریانس کار مؤثری نکرد و داده‌ها ناایستا در واریانس است.

فصل ۴

مدل‌های سری زمانی ناهم واریانسی

۱.۴ مقدمه‌ای بر مدل‌های ناهم واریانسی

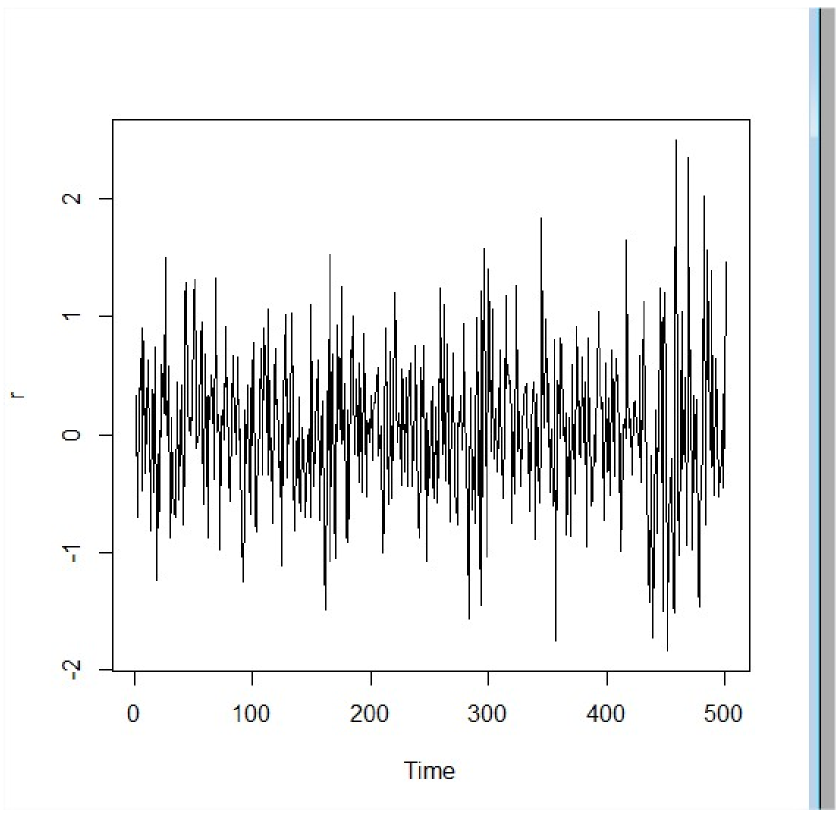
مدل‌هایی که تا کنون مورد بحث قرار گرفته‌اند با ساختار میانگین شرطی داده‌های سری زمانی سروکار دارند. اما اخیرا کارهای بسیاری درباره مدل‌بندی ساختار واریانس شرطی داده‌های سری زمانی انجام شده‌اند که انگیزه آن‌ها عمدتاً از نیازهای مربوط به مدل‌بندی امور مالی ناشی می‌شود. گیریم Y_t سری زمانی مورد نظر باشد. واریانس شرطی y_t به مقدارهای گذشته $Y_t, Y_{t-1}, \ldots$ عدم حتمیت در انحراف Y_t از میانگین شرطی $E(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots)$ را اندازه می‌گیرد. اگر Y_T از نوع مدل مدل آمیخته میانگین متحرک و اتورگرسیو پیروی کند، واریانس شرطی (یک گام به جلو) به ازای هر مقدار از حال و گذشته فرآیند همیشه برابر با واریانس نوفه سفید است. در واقع، ثابت بودن واریانس شرطی برای پیشگوهای هر تعداد ثابت از گام‌ها به جلو درباره فرآیند مدل میانگین متحرک و اتورگرسیو درست است. در عمل واریانس شرطی (یک به جلو ممکن است) با مقدارهای جاری و گذشته فرآیند تغییر کند. از این رو واریانس شرطی خود فرآیندی است که اغلب با نام فرآیند وارایانس شرطی از آن یاد می‌شود. ایجاد مدل‌هایی برای فرآیند واریانس شرطی که با آن بتوانیم تغییرپذیری مقدارهای آینده را براساس داده‌های جاری و گذشته پیشگویی کنیم، موضوع اصلی این فصل است.

۲.۴ برخی ویژگی مشترک سری‌های زمانی مالی

در امور مالی، واریانس شرطی سود یک دارایی مالی اغلب به عنوان معیاری از مخاطره آن دارایی در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم p_t سری زمانی مثلاً بهای روزانه نوعی دارایی مالی باشد. سود (به طور پیوسته مرکب) در روز tـام به صورت زیر می‌شود:

$$r_t = log(p_t) - log(p_{t-1}) \tag{۱.۴}$$

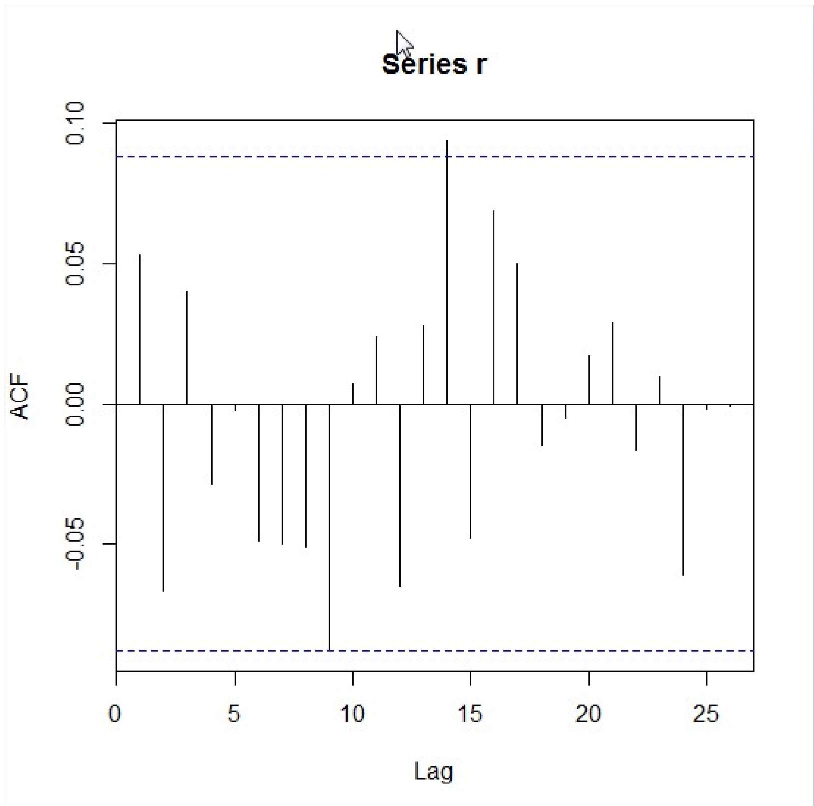
گاهی سودها را در ۱۰۰ ضرب می‌کنند که بتوان آن‌ها را به عنوان تغییرات درصدی بها تعبیر کرد. به عنوان مثال، داده‌های $CREF$ ارزش روزانه واحدی از صندوق $CREF$ را در طی ۲۶ اوت ۲۰۰۴ تا ۱۵ اوت ۲۰۰۶ در نظر می‌گیریم. نمودار شکل (۱.۴) نمایش سری سود را نشان می‌دهد که سودها در برخی دوره‌های زمانی پایدارتر بودند و در اواخر دوره بسیار ناپایدارتر شدند. به این الگوی متناوب آرامش و ناپایداری با دوام قابل توجه خوشه بندی نا پایدار می‌گویند. ناپایداری در یک سری زمانی به پدیده‌ای اطلاق می‌شود که در آن واریانس شرطی سری زمانی در طی زمان تغییر می‌کند.



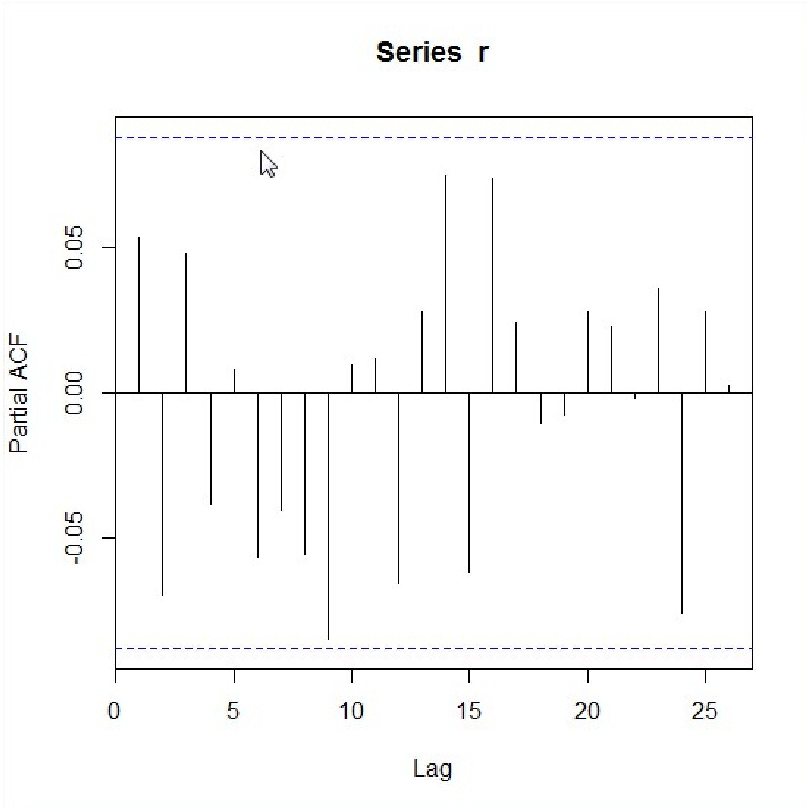
شکل ۱.۴: نمودار سری سود

با رسم نمودارهای خود همبستگی و خود همبستگی جزئی که در شکل‌های ۳.۴ و ۲.۴ نمایش داده شده‌اند، حاکی از آن است که سودها به هیچ وجه همبستگی پیاپی ندارند. اما خوشه ناپایدار در نشان‌دهنده این است که ممکن است داده‌ها مستقل و

هم‌توزیع نباشند و گرنه واریانس در زمان ثابت می‌بود. این نخستین جا در بررسی ما از مدل‌های سری زمانی است که نیاز داریم بین ناهمبسته بودن مقدارهای سری و مستقل بودن مقدارهای سری تمایز قائل شویم. اگر مقدارهای سری واقعاً مستقل باشند، تبدیل‌های لحظه‌ای ناخطی از قبیل لگاریتم، قدر مطلق، یا مجذور کردن استقلال را حفظ می‌کند. اما در مورد همبستگی چنین نیست، زیرا همبستگی تنها معیاری از وابستگی خطی است.



شکل ۲.۴: نمودار خود همبستگی



شکل ۳.۴: نمودار خود همبستگی جزئی

ساختار وابستگی پیاپی مرتبه بالاتر در داده‌ها را با بررسی ساختار خودهمبستگی قدرمطلق توان دوم سودها یا ساختار همبستگی توان دوم سودها می‌توان کشف کرد. اگر سودها مستقل وهم توزیع باشند، آنگاه قدر مطلق توان سودها نیز چنین هستند، و در نتیجه آن‌ها نیز نوفه سفید خواهند بود. بنابراین اگر توان دوم یا قدرمطلق سودها، برخی خود همبستگی‌ها معنی‌دار داشته باشند، آن‌گاه این خود همبستگی‌ها دلیل‌هایی علیه این فرض که سودها مستقل و هم توزیع‌اند در اختیار ما می‌گذارند. در واقع نمودار خود همبستگی و نمودار خود همبستگی جزئی قدرمطلق توان دوم سودها و نمودار خود همبستگی و نمودار خود همبستگی جزئی نمونه‌ای توان دوم سودها در نمایش ۲.۴ و ۳.۴ برخی خود همبستگی‌های معنی‌داری را نمایان می‌کنند و از آنجا شواهدی را فراهم می‌آورند که سودهای روزانه $CREF$ مستقل و هم توزیع نیستند. این ابزارهای دیداری اغلب با آزمون کردن رسمی اینکه توان دوم داده‌ها خودهم بسته‌اند یا نه با استفاده از آزمون باکس- لیوکینگ تکمیل می‌شوند. چون نیازی به برازش مدل نداریم، درجه آزادی توزیع خی دو تقریب زننده برای آماره باکس- لیوکینگ برابر با تعداد همبستگی‌های به کار رفته در آزمون است. بنابراین، اگر m خود همبستگی توان دوم داده‌ها را در آزمون به کار بگیریم، در صورتی که ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو وجود نداشته باشد، آماره آزمون تقریباً به صورت خی دو با m درجه آزادی توزیع می‌شود. این رویکرد را می‌توان به حالتی که میانگین شرطی فرآیند ناصفر است و اینکه یک مدل آمیخته میانگین متحرک و اتورگرسیو برای توصیف

ساختار خودهمبستگی داده‌ها رساست یا نه گسترش داد. در آن حالت، خودهمبستگی نخست توان دوم مانده‌های حاصل ازاین مدل را می‌توان برای آزمون مربوط به حضور ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو به کاربرد. آماره باکس- لیوکینگ متناظر، تحت فرض نبود اثر ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو ، توزیع خی دو با m آزادی خواهد داشت.

۳.۴ ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو مرتبه اول

انگل ابتدا مدل نا هم‌واریانسی شرطی اتورگرسیو را برای مدل‌بندی واریانس تغییر یابنده سری زمانی پیشنهاد کرد. چنانچه در بخش قبلی بحث شد، سری سود یک دارایی مالی مثلاً r_t با وجود اینکه خوشه‌بندی ناپایداری را به نمایش می‌گذارد، اغلب دنباله‌ای به طور پیاپی ناهمبسته با میانگین صفر است. این وضع حاکی از آن است که واریانس شرطی r_t به شرط معلوم بودن سودهای گذشته ثابت نیست. واریانس شرطی که از آن به نام ناپایداری شرطی نیز r_t یاد می‌شود، با $\sigma^2_{t|t-1}$ نمایانده می‌شود. زیر نویس $t-1$ به این معنی است که شرطی کردن نسبت به پارامترها نسبت به سودها تا زمان $t-1$ است. وقتی r_t دردسترس باشد، مجذور سود r_t^2 برآوردگری نااریب برای $\sigma^2_{t|t-1}$ را فراهم می‌سازد. یک سری متشکل از مقدارهای بزرگ توان دوم سود ممکن است از دوره‌های نسبتاً آرام خبر دهد. مدل ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو از لحاظ صوری مدلی رگرسیونی با ناپایداری شرطی به عنوان متغییر پاسخ و تاخیرهای گذشته توان دوم سود به عنوان متغییر کمکی است به عنوان مثال برای ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو سری سود به صورت:

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma^2_{t|t-1}\varepsilon_t \\ \sigma^2_{t|t-1} &= \omega + \alpha r^2_{t-1} \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

تولید می شود که درآن α و ω پارامترهای مجهول اند، ε_t دنباله‌ای از متغییرهای تصادفی مستقل وهم توزیع هر یک با میانگین صفر و واریانس واحد است (که به عنوان نوآوری شناخته می شود) و ε_t بازای $j = 1, 2, \ldots$ مستقل از r_{t-j} فرض می‌شود که نوآوری ε_t دارای واریانس واحد باشد به طوری که واریانس شرطی r_t برابر $\sigma^2_{t|t-1}$ است. این نتیجه از رابطه‌های زیر حاصل

می‌شود.

$$\begin{aligned} E(r_t^2|r_{t-j}, j=1,2,3,\ldots) &= E(\sigma_{t|t-1}^2\varepsilon_t^2|r_{t-j}, j=1,2,3,\ldots) \\ &= \sigma_{t|t-1}^2 E(\varepsilon_t^2|r_{t-j}, j=1,2,3,\ldots) \\ &= \sigma_{t|t-1}^2 E(\varepsilon_t^2) \\ &= \sigma_{t|t-1}^2 \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

درحالی که مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو به مدل رگرسیون شباهت دارد، واقعیت اینکه واریانس شرطی مستقیما مشاهده شدنی نیست (و از این رو متغییر پنهان خوانده می‌شود) ظرافت‌هایی را در کاربست مدل‌های ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو در تحلیل داده وارد کار می‌کند. برای مثال کشف رابطه رگرسیونی به طور نموداری امری بدیهی نیست. برای انجام این کار، مناسب است که نوعی کمیت مشاهده شدنی را به جای واریانس شرطی در رابطه ۲.۴ جانشین کنیم. گیریم، قرار دهیم:

$$\eta_t = r_t^2 - \sigma_{t|t-1}^2 \tag{۴.۴}$$

η_t یک سری به طور پیاپی ناهمبسته با میانگین صفر است. به علاوه، η_t با سودهای گذشته ناهمبسته است. با جایگذاری رابطه ۵.۴ در رابطه ۲.۴ داریم:

$$\sigma_{t|t-1}^2 = r_t^2 - \eta_t \tag{۵.۴}$$

$$r_t^2 = \eta_t + \omega + \alpha r_{t-1}^2 \tag{۶.۴}$$

بدین ترتیب، تحت مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه ۱ برای سری سودها، سری توان دوم سودها در مدل اتورگرسیو مرتبه ۱ صدق می‌کند. براساس این ملاحظه سودمند، با مشخص کردن مدل اتو رگرسیو مرتبه ۱ برای توان دوم سودها مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه ۱ را می‌توان مشخص کرد. توان سودها باید نامنفی باشند، معقول است که مقید کنیم پارامترهای α و ω همواره نامنفی باشند. همچنین اگر سری سود مانا واریانس σ^2 باشد، آنگاه گرفتن امید ریاضی از دو طرف رابطه۶.۴ نتیجه می‌دهد

$$\sigma^2 = \omega + \alpha\sigma^2 \tag{۷.۴}$$

یعنی $\sigma^2 = \frac{\omega}{(1-\alpha)}$ و از آنجا $0 \leq \alpha \leq 1$ درواقع، می‌توان نشان داد که شرط $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مانایی ضعیف مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه ۱ ، ،لازم و کافی است. در نگاه اول به نظر می‌رسد که مفهوم مانایی و ناهم واریانسی شرطی ممکن است ناسازگار باشند. اما مانایی ضعیف یک فرآیند مستلزم آن است که میانگین فرآیند ثابت و هرگاه تاخیرهای دو دوره زمانی یکسان باشند، کوواریانس در هر دوره زمانی متناهی و همانند باشد. به ویژه واریانس برای فرآیندی به طور مانا ضعیف، مقداری ثابت است. یک ویژگی رضایت بخش مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه ۱ آن است که، اگر چه نوآوری η_t توزیع نرمال دارد، توزیع مانای مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه ۱ دم‌های کلفت دارد، یعنی کشیدگی آن $\frac{E(r_t^4)}{\sigma^4-1}$ بزرگ‌تراز صفراست. (چولگی نرمال همیشه صفر است، و توزیعی با کشیدگی مثبت را دم کلفت گویند، در که توزیع با کشیدگی منفی دم نازک خوانده می‌شود).

کاربست مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه ۱ ، پیش گویی واریانس شرطی آینده است. مثلاً شخص ممکن است، به پیش بینی h گام به جلو علاقه‌مند باشد،

$$\sigma^2_{t+h|t} = E(r^2_{t+h}|r_t, r_{t-1}, \ldots) \tag{۸.۴}$$

به ازای $h = 1$ از فرمول ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه ۱ نتیجه می‌دهد:

$$\sigma^2_{t+h|t} = \omega + \alpha r_t^2 = (1-\alpha)\sigma^2 + \alpha r_t^2 \tag{۹.۴}$$

که متوسطی از واریانس دراز مدت و توان دوم سود جاریست.به طور مشابه با استفاده از فرمول امیدریاضی مکرر داریم:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{t+h|t} &= E(r^2_{t+h}|r_t, r_{t-1}, \ldots) \\
&= E(E(\sigma^2_{t+h|t+h-1}\varepsilon^2_{t+h}|r_{t+h-1}, r_{t+h-2}, \ldots)|r_t, r_{t-1}, \ldots) \\
&= E(\sigma^2_{t+h|t+h-1}E(\varepsilon^2_{t+h})|r_{t-1}, r_{t-2}, \ldots)|r_t, r_{t-1}, \ldots) \\
&= E(\sigma^2_{t+h|t+h-1}|r_t, r_{t-1}, \ldots) \\
&= \omega + \alpha E(\sigma^2_{t+h-1}|r_t, r_{t-1}, \ldots) \\
&= \omega + \alpha\sigma^2_{t+h-1|t} \qquad (۱۰.۴)
\end{aligned}$$

که درآن قرارداد $\sigma^2_{t+h} = r^2_{t+h}$ به ازای $h > 0$ پذیرفته‌ایم. فرمول بالا دستوری را برای محاسبه واریانس شرطی h گام به جلو دراختیار می‌گذارد.

۴.۴ مدلهای ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو تعمیم یافته

فرمول‌های پیش‌بینی که در بخش پیشین به دست آوردیم هم قوت‌ها و هم ضعف‌های مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه ۱ را نشان می‌دهند، زیرا پیش‌بینی واریانس‌های شرطی آینده تنها شامل جدیدترین توان دوم سود است. در عمل، می‌توان انتظار داشت که با گنجاندن توان دوم همه سودهای گذشته با وزن کمتر برای ناپایداری‌ها دورتر، دقت پیش‌بینی ممکن است بهبود یابد. یک رویکرد عبارت است از گنجاندن توان دوم سودهای با تأخیر بیشتر در مدل. مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو مرتبه q که توسط انگل (۱۹۸۲) پیشنهاد شد، که با تعمیم رابطه به صورت زیرمشخص می‌شود:

$$\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \alpha_1 r^2_{t-1} + \alpha_2 r^2_{t-2} + \ldots + \alpha_q r^2_{t-q} \qquad (۱۱.۴)$$

در اینجا به q مرتبه ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو گفته می‌شود. رویکرد دیگری که توسط بولرسلف (۱۹۸۶) و تیلور (۱۹۸۶) پیشنهاد شده، P تأخیر از واریانس شرطی را در مدل وارد می‌کند، که در اینجا از P به عنوان مرتبه ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو تعمیم یافته یاد می‌کنند. مدل مرکب، مدل ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو تعمیم یافته، نامیده می‌شود.

$$\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \beta_1 \sigma^2_{t-1|t-2} + \ldots + \beta_p \sigma^2_{t-p|t-p-1} + \alpha_1 r^2_{t-1} + \alpha_2 r^2_{t-2} + \ldots + \alpha_q r^2_{t-q} \qquad (۱۲.۴)$$

که بانمادگذاری پسرویB، این مدل را چنین می‌توان بیان کرد:

$$(1 - \beta_1 B - \ldots - \beta_p B^p)\sigma^2_{t|t-1} = \omega + (\alpha_1 B + \ldots + \alpha_p B^p) r^2_t \qquad (۱۳.۴)$$

یادآورمی‌شویم که در برخی نوشتگان، نمادگذاری $GARCH(p,q)$ به صورت $GARCH(q,p)$ نوشته می‌شود، یعنی جای مرتبه‌های عوض شده است.

برای تعیین مرتبه‌های ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو تعمیم یافته بازهم سودمند است که مدل مربوط به واریانس شرطی را برحسب توان دوم سودها بیان کنیم. تعریف $\eta_t = r^2_t - \sigma^2_{t|t-1}$ را به خاطر بیاورید. مشابه با مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو می‌توانیم نشان دهیم که η_t دنباله به طور پیاپی ناهمبسته است.

$$r^2_t = \omega + (\beta_1 + \alpha_1) r^2_{t-1} + \ldots + (\beta_{max(p,q)} + \alpha_{max(p,q)}) r^2_{t-max(p,q)} + \eta_t - \beta_1 - \beta_1 \eta_{t-1} - \ldots \qquad (۱۴.۴)$$

که در آن به ازای همه عدد صحیح $k > p$ داریم $\beta_k = 0$ و به ازای $k > q$ داریم $\alpha_k = 0$.

این رابطه نشان می‌دهد که مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو تعمیم یافته از مرتبه p و q برای سری سود مستلزم آن است که

مدل برای توان دوم سودها یک مدل آمیخته میانگین متحرک و اتو رگرسیو مرتبه ماکسیمم p و q باشد. بدین ترتیب، می توانیم فنون تعیین مدل برای مدل‌های آمیخته میانگین متحرک و اتورگرسیو را درباره ی سری توان دوم برای تعیین ماکسیمم p و q به کار بندیم. توجه کنید که اگر $q < p$ باشد، در تعیین مدل پنهان خواهد ماند. در چنین حالت‌هایی، می‌توانیم ابتدا یک مدل ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو تعمیم یافته از مرتبه p و q بیرازانیم و سپس p از طریق آزمودن معنی‌داری برآوردضریب‌های ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو حاصل برآورد کنیم.

۵.۴ روش برآورد ماکسیمم درستنمایی

برای حالت نوآوری‌های نرمال، تابع درستنمایی مدل ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو تعمیم یافته را می‌توان به آسانی بدست آورد. محاسبات را برای حالت مدل ناهم واریانسی شرطی اتورگرسیو تعمیم یافته از مرتبه ۱ و ۱ مانا تشریح می‌کنیم. گسترش به حالت کلی سرراست است. به شرط معلوم بودن پارامترهای ω و α و β واریانس‌های شرطی را می‌توان به طور بازگشتی به ازای $t \geq 2$ با فرمول زیر

$$\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \alpha r^2_{t-1} + \beta\sigma^2_{t-1|t-2} \quad (۱۵.۴)$$

و با مقدار آغازین $\sigma^2 1|0$ که تحت فرض مانایی برابر با واریانس ناشرطی $\sigma^2 = \frac{\omega}{(1-\alpha-\beta)}$ قرار داده می‌شود، حساب کرد. از تابع چگالی احتمال شرطی و تابع چگالی توأم زیر استفاده می‌کنیم.

$$f(r_t|r_{t-1},\ldots,r_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{t|t-1}}} exp\frac{-r^2_t}{2\sigma^2_{t|t-1}} f(r_n,\ldots,r_1) = f(r_{n-1},\ldots,1)f(r_n|r_{n-1},\ldots,r_1) \quad (۱۶.۴)$$

تکرار فرمول آخر و گرفتن لگاریتم، فرمول زیر را برای تابع لگاریتم درستنمایی بدست می‌دهد:

$$L(\omega,\alpha,\beta) = -\frac{n}{2}log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{log(\sigma^2_{t-1|t-2}) + \frac{r^2_t}{\sigma^2_{t|t-1}}\} \quad (۱۷.۴)$$

برای برآوردگرهای درستنمایی ω و α و β صورت بسته‌ای وجود ندارد. اما می‌توان آن‌ها را با ماکسیمم‌سازی تابع لگاریتم درستنمایی به طور عددی حساب کرد. برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی دارای توزیع تقریباً نرمال با مقدارهای واقعی پارامترها به عنوان میانگین‌های آن‌ها، هستند. کوواریانس‌های آن‌ها را می‌توان در ماتریسی که با Λ نمایانده می‌شود، گرد آورد. این

ماتریس به شرح زیر به دست می‌آید؛ گیریم

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

بردار پارامترها باشد. مولفه i ام θ را به صورت θ_i بنویسید. به طوری که $\omega = \theta_1$ و $\alpha = \theta_2$ و $\beta = \theta_3$ عنصرهای قطری Λ همان واریانس‌های تقریبی برآوردگرها هستند. در صورتی که عناصر خارج قطر کوواریانس‌های تقریبی آن‌هایند. بنابراین، نخستین عنصر قطری Λ واریانس تقریبی $\hat{\omega}$، عنصر Λ(۱، ۲) کوواریانس تقریبی بین $\hat{\omega}$ و $\hat{\alpha}$ است و به همین‌طور تا آخر.

فصل ۵

برازش مدل مناسب برای داده های نرخ ارز

از فصل سوم به یاد داریم که داده‌های نرخ ارز با دو مرتبه تفاضلی کردن به مانایی در میانگین رسید. برای برازش مدل مناسب، ابتدا یک مدل آمیخته میانگین متحرک و اتورگرسیو برای میانگین ثابت درنظر می‌گیریم و سپس با استفاده از مانده مدل آمیخته میانگین متحرک و اتورگرسیو مدل مناسب برای واریانس داده در نظر می‌گیریم.

```
library(forecast)
```

برازش مدل آمیخته میانگین متحرک و اتورگرسیو با استفاده از دستور زیر:

```
m1=Arima(y,order=c(3,2,0))
```

محاسبه مقدار $p-value$ ضرایب:

```
(1-pnorm(abs(m1$coef)/sqrt(diag(m1$var.coef))))*2
```

حال مدل آمیخته میانگین متحرک و اتورگرسیو را برازش می‌دهیم و مقدار $P-value$ را برای ضرائب محاسبه می‌کنیم.

جدول ۱.۵ : برازش مدل آمیخته اتورگرسیو ومیانگین متحرک

ضرایب	p-value
ar۱	۰
ar۲	۰
ar۳	۰

با توجه به جدول ۱.۵این که مقدار $P-value$ از ۰,۰۵ کمتر است، فرض صفربودن ضرایب رد می‌شود و ضرایب در مدل حضور دارند.

```
r1=resid(m1)
library(FinTS)
ArchTest(r)
```

جدول ۲.۵: آزمون اثر نداشتن مدل ناهم واریانسی شرطی و اتورگرسیو

آماره	p-value
۳۷۴/۲۵	۰/۰۰۰۰۱

با توجه به ۲.۵ که مقدار $P-value$ از ۰,۰۵ کمتر است، فرض اثرنداشتن مدل نا هم واریانسی شرطی اتو رگرسیو رد می‌شود. حال به سراغ برازش مدل نا هم واریانسی شرطی اتو رگرسیو تعمیم یافته می‌رویم:

```
r2=r1^2
library(TSA)
u=garch(r2,order=c(0,1))
summary(u)
```

جدول ۳.۵: برازش مدل نا هم واریانسی شرطی و اتو رگرسیو تعمیم یافته

ضرایب	برآورد	خطای استاندارد	آماره t	p-value
a۰	۰/۰۰۰۱	۷/۴۶۵e+۰۶	۲/۴۱۰۲	۰/۰۰۰۱
a۱	۰/۰۰۰۱	۱/۷۲۱e-۰۱	۱/۳۲۹	۰/۱۸۴

باتوجه به جدول ۳.۵بررسی‌های انجام شده در برازش مدل نا هم واریانسی شرطی و اتو رگرسیو تعمیم یافته مقدار خطا را افزایش داده و با خطای نزدیک به ۰,۲ مدل بالا را می‌پذیریم.

مدل ARIMA(۳،۲،۰)-GARCH(۰،۱)

```
library(rugarch)

garch11.spec = ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(3,0))

 variance.model = list(garchOrder = c(0,1))

garch.fit = ugarchfit(garch11.spec, y2, fit.control=list(scale=TRUE))
```

با استفاده از دستور زیر ضرایب مدل را بدست می آوریم که در جدول ۴.۵ نشان داده شده است

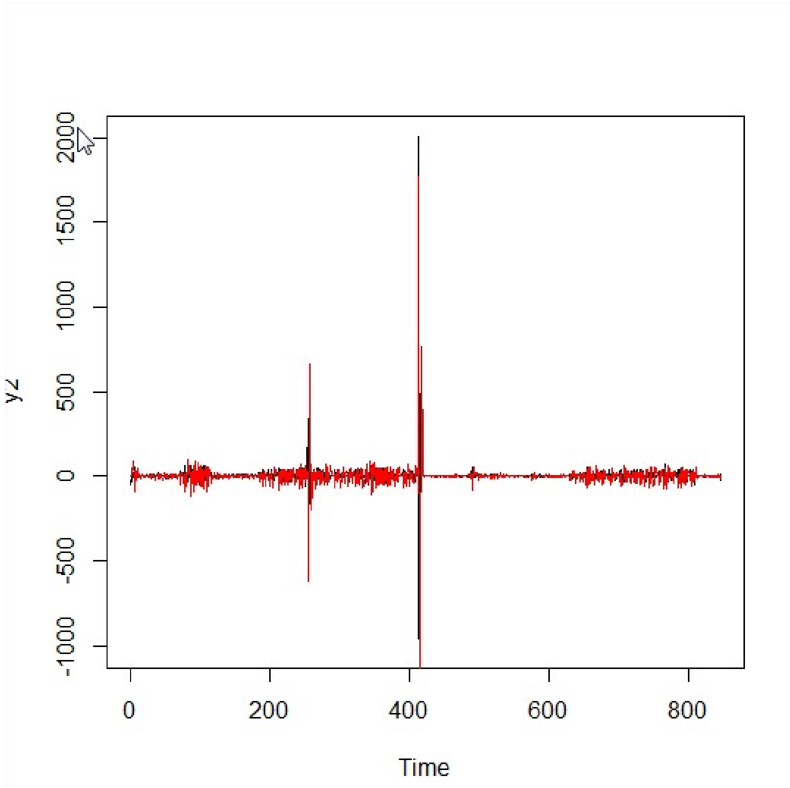
```
garch.fit@fit$ coef
```

جدول ۴.۵: ضرایب

ضرایب	برآورد
Mu	۰/۹۱۰۲
ar۱	-۱/۸۳۱۵
ar۲	-۱/۳۶۶۵
ar۳	-۰/۷۱۱۴
omega	۱۷/۹۷۰۶
beta ۱	۰/۹۵۴

با استفاده از دستورهای زیر نمودار سری زمانی و مقادیر برازش یافته را رسم می‌کنیم.

```
a=garch.fit@fit$ fitted.values

ts.plot(y2)

lines(a,col="red")
```



شکل ۱.۵: نمودار سری زمانی و مقادیر برازش یافته

و در نهایت مدل را به صورت رابطه ۱.۵ می‌نویسیم:

$$x_t - 0.09102 = -1.8315x_{t-1} - 1.3665x_{t-2} - 0.7114x_{t-3} + x_{t-1} + x_{t-2}$$
$$\sigma^2_{t|t-1} = 17.9706636 + 0.95409745\sigma^2_{t-1|t-2} \quad (۱.۵)$$

نتیجه گیری

در این مطالعه، که نرخ دلار در سال های ۹۵-۹۲ بررسی شده است،بااستفاده از رویکرد سری زمانی و خطای ۸۰%،مدل مناسب، برازش داده شد. بااستفاده از مدل های ناهم واریانسی شرطی اتو رگرسیو تعمیم یافته به مدل بندی برای سری مورد نظر پرداخته شده است،و با استفاده ازمدل مورد نظر می توان به پیش بینی نرخ دلار در روزهای آتی پرداخت.

واژه‌نامه فارسی-انگلیسی

واژه‌نامه فارسی-انگلیسی

استقلال	independence
توزیع	Distribution
چگالی احتمال توام	joint probability density
خود همبستگی	autocorrelation
خود همبستگی جزئی	partial autocorrelation
درستنمایی	likelihood
ضرایب	Coefficients
سری زمانی	time series
فرآیند تصادفی	stochastic process
فرآیند خطی کلی	General linear process
فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول	The first-order moving average process
مانایی	stationarity
مانده	residual
متغیر	variable
میانگین	mean
ناهم واریانسی	Heterogeneity
نوفه‌ی سفید	whitenoise
واریانس شرطی	Conditional variance
کوواریانس	covariance

نام نامه

نام نامه

کتاب‌نامه

[۱] جرج ای،پی،باکس، گویلیم ام جنکینز وگرکوری،سی رنیسال، ترجمه محمد رضا مشکانی، تحلیل سری زمانی،پیش بینی کنترل

[۲] جاناتان دی کرایر،کونگ سی چن، ترجمه محمدرضا مشکانی، تحلیل سری زمانی با برنامه کاربردی آر

[۳] ترجمه حسین علی نیرومند، تجزیه و تحلیل سری زمانی

[4] http://www.cbi.ir/exrates/rates$_{f}a.aspx$

College of Science

School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Analysis of exchange rate volatility from 1392-1395

Mina Gholami Laksar

supurvisor:Dr:Sudabeh Shemeh Savar

A thesis submitted to Graduate Studies Office

in partial fulfillment of the requirements for the degree of

B.Sc./Master of Science/Doctor of Philosophy in

Pure Mathematics/ Applied Mathematics/ Statistics/ Computer Science

yyyy

Abstract

Time series are data or observations that are collected over time. And there is no linear relationship with the time sequence. In the static time series (constant mean, constant variance), the AR (P), MA (q), ARMA (p, q) models are considered for the desired series. According to the study, financial data (exchange rate) has an irreversible variance, so it is not possible to model with models such as AR (P, MA (q), ARMA (p, q), so the model For example, ARCH, GARCH, which has an irreversible variance in these models, is used to examine and model the exchange rate of 2014-2017.

Key words: *Time Series, Stationary time series, Inconstant variance, Garch model.*